Séance n^{o}5
Pratique des éléments finis
Enoncé

13 Décembre 2005

Dans un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^2$, de bord Γ polygonal, on considère le problème variationnel : $u \in V = H^1(\Omega)$ tq.

$$a(u,v) \;=\; l(v) \qquad \forall v \in H^1(\Omega),$$

avec

$$a(u,v) \;=\; \alpha \int_\Omega u\,v\,dx \;+\; \int_\Omega \nabla u \,\cdot\, \nabla v\,dx,$$

$$l(v) \;=\; \int_\Omega f\,v\,dx,$$

où $\alpha > 0$.

Exercice 1. Calcul des matrices élémentaires

On se place sur un triangle T_ℓ de sommets $(S_1^\ell, S_2^\ell, S_3^\ell)$ et on suppose que $(\overrightarrow{S_1^\ell\, S_2^\ell}, \overrightarrow{S_1^\ell\, S_3^\ell})$ forme un trièdre direct. On note λ_i^ℓ les coordonnées barycentriques, définies par $\lambda_i^\ell \in P_1$ et

$$\lambda_i^\ell(S_j^\ell) \;=\; \delta_{i,j}.$$

Si on note (x_i, y_i) les coordonnées du sommet S_i^ℓ, on a alors :

$$\lambda_1^\ell(x,y) \;=\; \frac{(y_2 \,-\, y_3)(x - x_2) \,+\, (x_3 \,-\, x_2)(y \,-\, y_2)}{2\,\text{Aire}(T_\ell)},$$

$$\lambda_2^\ell(x,y) \;=\; \frac{(y_3 \,-\, y_1)(x - x_3) \,+\, (x_1 \,-\, x_3)(y \,-\, y_3)}{2\,\text{Aire}(T_\ell)},$$

$$\lambda_3^\ell(x,y) \;=\; \frac{(y_1 \,-\, y_2)(x - x_1) \,+\, (x_2 \,-\, x_1)(y \,-\, y_1)}{2\,\text{Aire}(T_\ell)}.$$

1.1 - Calculer la matrice de masse élémentaire :

$$(M_h^\ell)_{i,j} \;=\; \int_{T_\ell} \lambda_i^\ell\, \lambda_j^\ell\, dx.$$

(Indication : on pourra utiliser la formule de quadrature :

$$\int_{T_l} f(x)dx \;=\; \frac{\text{Aire}(T_\ell)}{3} \left[f(\tfrac{S_1^\ell+S_2^\ell}{2}) \;+\; f(\tfrac{S_2^\ell+S_3^\ell}{2}) \;+\; f(\tfrac{S_1^\ell+S_3^\ell}{2}) \right]$$

valide pour $f \in P_2$)

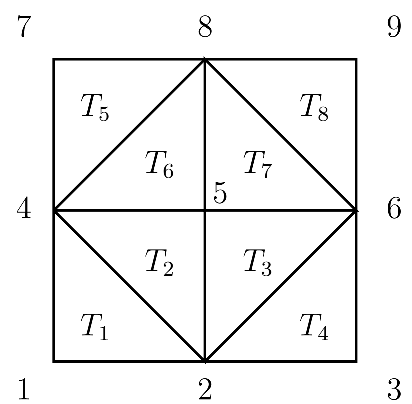
1.2 - Calculer la matrice de rigidité élémentaire :

$$(R_h^\ell)_{i,j} \;=\; \int_{T_\ell} \nabla\lambda_i^\ell \cdot \nabla\lambda_j^\ell.$$

On pourra exprimer le résultat en utilisant les normales sur chaque arête du triangle.

Exercice 2. Application sur maillage régulier

On traite le cas où $\Omega = [0,2] \times [0,2]$ partitionné en triangles T_ℓ comme suit :



Les sommets des triangles sont notés M_i ; $i = 1, \cdots, 9$.
On note :

$$V_h \;=\; \{v \in C^0(\overline{\Omega}) \text{ tel que } v|_{T_\ell} \in P_1\}.$$

2.1 - Quelle est la dimension de V_h ? Quelles sont les degrés de libertés de $v \in V_h$?

2.2 - On note u_h la solution du problème variationnel de départ en remplaçant $H^1(\Omega)$ par V_h. On pose U_h le vecteur contenant les degrés de libertés de u_h. Montrer que U_h est solution du problème matriciel :

$$(\alpha M_h + R_h)\, U_h = F_h,$$

où l'on précisera l'expression des matrices M_h et R_h et du vecteur F_h.

2.3 - Préciser le nombre de termes nuls sur chaque ligne de M_h et R_h.

2.4 - En mimant la procédure d'assemblage, calculer (en utilisant les résultats du premier exercice) la cinquième ligne de chaque matrice.

2.5 - On note γ_0 la face inférieure de Ω. Reprendre les questions précédentes lorsque

$$V = \{u \in H^1(\Omega) \ / \ u_{|\gamma_0} = 0\}$$

auquel on associe l'espace de discrétisation

$$V_h \ = \ \{v \in C^0(\overline{\Omega}) \text{ tel que } v|_{T_\ell} \in P_1 \text{ et } u_{|\gamma_0} = 0\}.$$