Séance n^{o}4
Eléments finis en dimension 1 et 2
Corrigé

6 Décembre 2005

Exercice 1. Interpolation dans les espaces de Sobolev et estimations d'erreur en dimension 1

Dans ce qui suit, $p(x)$ et $q(x)$ désignent deux fonctions continues par morceaux définies sur $I\ =]a,b[$ et vérifiant :

$$0 < p_* \le p(x) \le p^* < +\infty \quad \text{p.p. } x \in I,$$

$$0 < q_* \le q(x) \le q^* < +\infty \quad \text{p.p. } x \in I,$$

$f(x)$ désigne une fonction donnée de $L^2(I)$, α et β sont deux réels positifs ou nuls. On s'intéresse à la résolution du problème aux limites (P) :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}) \ + \ q\,u & = & f \quad x \in I, \\[2ex] p(b)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(b) \ + \ \beta\,u(b) & = & 0, \\[2ex] -p(a)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(a) \ + \ \beta\,u(a) & = & 0. \end{array} \right.$$

1.1 - On multiplite la première équation du système (1) par une fonction test v, et on effectue une intégration par parties

$$\int_I p\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,dx + \int_I q\,u\,v\,dx - p(b)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(b)\,v(b) + p(a)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(a)\,v(a) = \int_I f v.$$

En utilisant les conditions aux limites en a et b, on obtient la formulation variationnelle associée au problème (1) :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(\bar{I}) \text{ tel que :} \\ \\ a(u,v) = l(v), \qquad \forall\, v \in H^1(\bar{I}), \end{array} \right.$$

avec

$$\left| \begin{array}{l} a(u,v) = \displaystyle\int_I p\, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\, dx + \int_I q\, u\, v\, dx + \beta\, u(b)\, v(b) + \beta\, u(a)\, v(a), \\ l(v) = \displaystyle\int_I f v\, dx. \end{array} \right.$$

L'existence et l'unicité se démontrent en utilisant le théorème de Lax-Milgram. On vérifie la continuité de $l(.)$ et $a(.,.)$:

$$\begin{array}{rcl} |l(v)| & = & |\displaystyle\int_I f v\, dx| \le \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2}, \\ & \le & \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}. \end{array}$$

$$|a(u,v)| \quad \le \quad p^* \int_I |\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}|\, |\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}|\, dx + q^* \int_I |u|\, |v|\, dx + \beta |u(b)|\, |v(b)| + \beta |u(a)|\, |v(a)|$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$p^* \int_I |\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}|\, |\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}| + q^* \int_I |u|\, |v|\, dx \le p^* \|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\|_{L^2} \|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\|_{L^2} + q^* \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2},$$

et la continuité de l'application trace de $H^1(\bar{I})$ dans $\mathbb{R}$:

$$\beta |u(b)|\, |v(b)| + \beta |u(a)|\, |v(a)| \le 2\beta\, C_I^2 \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1},$$

on obtient :

$$|a(u,v)| \le C \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}, \qquad C = \sqrt{2} \max(p^*, q^*) + 2\beta\, C_I^2.$$

La coercivité de a est immédiate :

$$a(u,u) \ge \int_I p\, |\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}|^2\, dx + \int_I q\, u^2\, dx \ge \min(p^*, q^*) \|u\|_{H^1}^2.$$

Le théorème de Lax-Milgram peut donc s'appliquer, on a existence et unicité de la solution.

1.2 - En choisissant $v \in D(I)$ dans la formulation (2), les termes de bord sont nuls, on obtient alors

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}) + qu = f \quad \text{au sens des distributions}$$

En choisissant une fonction test dans $H^1(\bar{I})$, qui vaut 1 en b et 0 en a, on obtient :

$$p(b) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(b) + \beta\, u(b) = 0.$$

De la même manière, on retrouve la condition au limite en a.

1.3 - On a l'expression suivante de w_j :

$$w_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x_{j-1}-x}{x_{j-1}-x_j} & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j], \\ \dfrac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j} & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démontrons dans un premier temps que ces fonctions forment une base libre, Soit une combinaison linéaire de coefficients λ_j telle que :

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \, w_j(x) = 0.$$

L'évaluation en $x = x_i$, donne $\lambda_i = 0$. les coefficients sont tous nuls, ce qui prouve que la base est libre.

Démontrons dans un second temps, que ces fonctions forment une base génératrice de l'espace V_h. soit $v \in V_h$, v est un polynômes de degré 1 sur l'intervalle $[x_j, x_{j+1}]$. Or un polynôme de degré 1 est déterminé de manière unique par les valeurs qu'il prend en deux points distincts. On en déduit :

$$v(x) = v(x_j)\, w_j(x) + v(x_{j+1})\, w_{j+1}(x) \qquad x \in [x_j, x_{j+1}].$$

On a ainsi décomposé v dans la base exhibée. C'est donc une base génératrice.

1.4 - L'opérateur d'intérpolation Π_h est défini sur $[x_i, x_{i+1}]$ par

$$\Pi_h v|_{[x_i, x_i+1]} = v(x_i) w_i(x) + v(x_{i+1}) w_{i+1}(x) = v(x_i) \frac{x_{i+1}-x}{h} + v(x_{i+1}) \frac{x-x_i}{h}$$

En utilisant l'identité

$$v(x) = v(x_i) + (x - x_i) v'(x_i) + \int_{x_i}^{x} (x-t) v''(t)\, dt \tag{3}$$

pour $x = x_{i+1}$, on obtient

$$\Pi_h v|_{[x_i, x_i+1]} = v(x_i) + (x - x_i) v'(x_i) + \frac{(x-x_i)}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - t) v''(t)\, dt$$

En utilsant à nouveau l'identite' (3), on pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$:

$$\begin{aligned} |v - \Pi_h v|^2 &= \left| \int_{x_i}^{x} (x-t) v''(t)\, dt + \frac{(x-x_i)}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-t) v''(t)\, dt \right|^2, \\ &\leq \int_{x_i}^{x} (x-t)^2\, dt \int_{x_i}^{x} |v''(t)|^2 + \frac{(x-x_i)^2}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-t)^2\, dt \int_{x_i}^{x_{i+1}} |v''(t)|^2\, dt, \\ &\leq \frac{2}{3} h^3 \|v''\|^2_{L^2[x_i, x_{i+1}]} \end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$\begin{array}{rcl}\|v-\Pi_h v\|^2_{L^2(I)} & = & \displaystyle\sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} |v-\Pi_h v|^2\,dx,\\ & \leq & \displaystyle\frac{2}{3}h^4\sum_i \|v''\|^2_{L^2[x_i,x_{i+1}]},\\ & \leq & \displaystyle\frac{2}{3}h^4\|v\|^2_{H^2(I)},\end{array}$$

d'où

$$\|v-\Pi_h v\|_{L^2(I)} \leq Ch^2\,\|v\|_{H^2(I)}$$

Pour la deuxième estimation, pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$, on a :

$$\frac{d\Pi_h v}{dx}|_{[x_i,x_{i+1}]} = \frac{v(x_{i+1})-v(x_i)}{h} = v'(x_i) + \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_i - t)v''(t)\,dt,$$
$$v'(x) = v'(x_i) + \int_{x_i}^{x} v''(t)\,dt.$$

On a alors pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$:

$$\begin{array}{rcl}|v-\Pi_h v|^2 & = & \displaystyle\left|\int_{x_i}^{x} v''(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1}-t)v''(t)\,dt\right|^2,\\ & \leq & \displaystyle(x-x_i)\int_{x_i}^{x}|v''(t)|^2 + \frac{1}{h^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1}-t)^2\,dt\int_{x_i}^{x_{i+1}}|v''(t)|^2\,dt,\\ & \leq & \displaystyle\frac{4}{3}h\|v''\|^2_{L^2[x_i,x_{i+1}]},\end{array}$$

d'où

$$\|v' - \frac{d\Pi_h v}{dx}\|_{L^2(I)} \leq Ch\,\|v\|_{H^2(I)}.$$

1.5 - La solution discrète est définie par :

$$a(u_h, v) = (f, v) \qquad \forall\, v \in V_h,$$

où a est la forme linéaire introduite à la question **1.1**.
La solution u est définie par

$$a(u, v) = (f, v) \qquad \forall\, v \in H^1(I).$$

Comme $V_h \subset H^1(I)$, on fait la différence pour $v \in V_h$:

$$a(u_h - u, v) = 0 \qquad \forall\, v \in V_h$$

ceci implique

$$a(\Pi_h u - u, v) = a(\Pi_h u - u_h, v) \qquad \forall\, v \in V_h.$$

On choisit la fonction test $v = \Pi_h u - u_h$. On a alors

$$a(\Pi_h u - u, \Pi_h u - u_h) = a(\Pi_h u - u_h, \Pi_h u - u_h).$$

On va utiliser la continuité et la coercivité de a démontré à la question **1.1**.

$$\alpha \|\Pi_h u - u_h\|_{H^1}^2 \leq |a(\Pi_h u - u, \Pi_h u - u_h)| \leq C \|\Pi_h u - u\|_{H^1} \|\Pi_h u - u_h\|_{H^1}$$

d'où

$$\|\Pi_h u - u_h\|_{H^1} \leq C \|\Pi_h u - u\|_{H^1}.$$

A l'aide de l'inégalité triangulaire

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq \|u - \Pi_h u\|_{H^1} + \|\Pi_h u - u_h\|_{H^1} \leq (C+1)\|\Pi_h u - u\|_{H^1}.$$

Or $\|\Pi_h - u\|_{H^1} \leq C_1 h \|u\|_{H^2} \leq C_2 h \|f\|_{L^2}$. On obtient l estimation d'erreur désirée :

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch.$$

La constante C fait intervenir la constante de coercivité α, la constante de la continuité de a, la constante d'erreur d'interpolation et $\|f\|_{L^2}$. Elle ne dépend pas de h.

Exercice 2. Eléments finis P_1 en dimension 2

2.1 - On suppose l'existence du triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, on va montrer l'unicité. Nous allons prouver d'abord que :

$$\lambda_1(S_1) = 1,\ \lambda_2(S_1) = 0,\ \lambda_3(S_1) = 0.$$

Supposons par l'absurde que $\lambda_1(S_1) \neq 1$, nous avons alors :

$$S_1 = \frac{\lambda_2(S_1)S_2 - \lambda_3(S_1)S_3}{1 - \lambda_1(S_1)} \quad (\lambda_2(S_1), \lambda_3(S_1) \neq (0,0))$$

S_1, S_2 et S_3 sont donc alignés, ce qui est exclu. Donc $\lambda_1(S_1) = 1$.
Supposons maintenant que $\lambda_2(S_1) \neq 0$, on a alors :

$$\lambda_2(S_1)(S_2 - S_3) = 0$$

Les point S_2 et S_3 sont confondus, ce qui est exclu. On a donc $\lambda_2(S_1) = \lambda_3(S_1) = 0$. On démontre de la même manière que :

$$\left| \begin{array}{l} \lambda_1(S_2) = 0,\ \lambda_2(S_2) = 1,\ \lambda_3(S_2) = 0, \\ \lambda_1(S_3) = 0,\ \lambda_2(S_3) = 0,\ \lambda_3(S_3) = 1. \end{array} \right.$$

On cherche λ_1 de la forme

$$\lambda_1(x,y) = \alpha(x - x_2) + \beta(y - y_2) + \gamma$$

$\lambda_1(S_2) = 0$ donne $\gamma = 0$ et $\lambda_1(S_3) = 0$ donne $\alpha(x_3 - x_2) + \beta(y_3 - y_2) = 0$. Donc λ_1 est de la forme :

$$\lambda_1(x, y) = C\,[(y_2 - y_3)(x - x_2) + (x_3 - x_2)(y - y_2)]$$

La constante C est déterminée de manière unique par l'équation $\lambda_1(S_1) = 1$:

$$\lambda_1(x, y) = \frac{(y_2 - y_3)(x - x_2) + (x_3 - x_2)(y - y_2)}{(y_2 - y_3)(x_1 - x_2) + (x_3 - x_2)(y_1 - y_2)}$$

Le dénominateur est proportionnel à l'aire du triangle, qui est non nulle car les points ne sont pas alignés. De la même manière, on trouve une expression unique pour λ_2 et λ_3. On vérifie que le triplet vérifie bien les propriétés demandées, ce qui prouve l'existence.

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in (P_1)^3$, c'est aussi une famille libre. Comme $dim\,P_1 = 3$, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est une base de P_1.

2.2 - soit $v_h \in V_h$ montrons que $v_h \in H^1(\Omega)$. Par définition de V_h on a $v_h|_{T_l} \in P_1\ \forall\, l = 1, L$, ceci implique que $v_h|_{T_l} \in H^1(T_l)$. v_h est supposé continue sur $\bar{\Omega}$. Par conséquent v_h est dans $H^1(\Omega)$ (cf TD2).

2.3 - Par définition, sur chaque triangle T_l la fonction W_I est une fonction P_1 prenenant trois valeurs données aux sommets du triangle T_l. Or une fonction P_1 est entiérement déterminée par les valeurs qu'elle prend en trois points alignés. Comme par hypothèse sur le maillage les triangles T_l sont d'intérieur non vide on en déduit que W_I est définie d'une manière unique. on notera également que W_I est continue sur $\bar{\Omega}$ car la restriction de W_I sur une arête définit une fonction affine le long de l'arête prenenat deux valeurs données et toute fonction affine d'une variable est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend en deux points distincts.

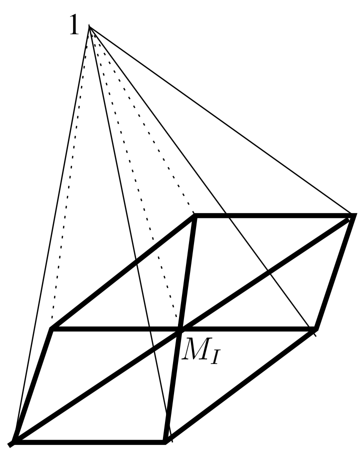

FIG. 1 – Fonction de base W_I

2.4 - La famille $(W_I)_{1\leq I\leq N}$ est libre car

$$\sum_I \lambda_I W_I = 0 \Rightarrow \sum_I \lambda_I W_I(M_J) = 0 \Rightarrow \lambda_J = 0 \; \forall J = 1, N.$$

$(W_I)_{1\leq I\leq N}$ est génératrice car :

$$\forall\, v_h \in V_h, \;\; v_h(M) = \sum_I v_h(M_I)\, W_I(M)$$

En effet, en posant $u_h = v_h - \sum_I v_h(M_I)\, W_I$, on a :

$$u_h(M_J) = 0 \;\forall\, 1 \leq J \leq N.$$

d'où $u_h = 0$.

Exercice 3. Eléments finis P_2 en dimension 1

3.1 - On note $x_i^1 = 1/2(x_{i+1} + x_i)$. On pose w_j

$$w_j(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - x_{j-1}^1)(x_{j-1} - x)}{(x_j - x_{j-1}^1)(x_{j-1} - x_j)} & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j], \\ \dfrac{(x - x_j^1)(x_{j+1} - x)}{(x_j - x_j^1)(x_{j+1} - x_j)} & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et w_j^1

$$w_j^1(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - x_j)(x_{j+1} - x)}{(x_j^1 - x_j)(x_{j+1} - x_j^1)} & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie que w_j, $w_j^1 \imath P_2$ et satisfont $w_j(x_i) = \delta_{ij}$, $w_j(x_i^1) = 0$, $w_j^1(x_i^1) = \delta_{ij}$ et $w_j^1(x_i) = 0$.

3.2 - $w_j^1 \in C^1(]a, b[)$, $supp(w_j^1) = [x_j, x_j + 1]$ et $w_j \in C^0(]a, b[)$, $supp(w_j^1) = [x_{j-1}, x_j + 1]$.

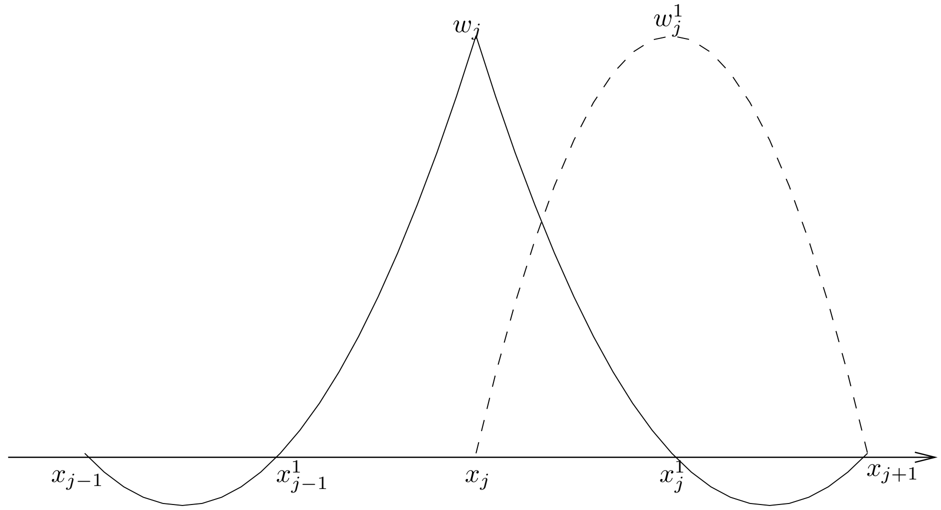

FIG. 2 – Les fonction de base w_j et w_j^1