Séance n°4
Elements finis en dimension 1 et 2
Enoncé

6 Décembre 2005

Exercice 1. Interpolation dans les espaces de Sobolev et estimations d'erreur en dimension 1

Dans ce qui suit, $p(x)$ et $q(x)$ désignent deux fonctions continues par morceaux définies sur $I =]a, b[$ et vérifiant :

$$0 < p_* \leq p(x) \leq p^* < +\infty \quad \text{p.p. } x \in I,$$

$$0 < q_* \leq q(x) \leq q^* < +\infty \quad \text{p.p. } x \in I,$$

$f(x)$ désigne une fonction donnée de $L^2(I)$, et β un réel positif ou nul. On s'intéresse à la résolution du problème aux limites (P) :

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}) + q\,u & = f \quad x \in I, \\ p(b)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(b) + \beta\,u(b) & = 0, \\ -p(a)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(a) + \beta\,u(a) & = 0. \end{cases}$$

1.1 - Ecrire la formulation variationnelle de ce problème et démontrer l'existence et l'unicité de la solution $u \in H^1(I)$.

1.2 - On suppose que
$$(p, q, f) \in C^1(\bar{I}) \times C^0(\bar{I}) \times L^2(I).$$
Montrer alors que la solution du problème variationnel appartient à $H^2(I)$ et vérifie les équations du problème (P).

1.3 - On s'intéresse à l'approximation de u par éléments finis. Pour cela, on introduit le maillage de pas $h = \dfrac{b-a}{N}$ défini par les points :
$$x_j \;=\; a \,+\, j\,h \qquad j = 0, 1, ..., N.$$
On considère l'espace des éléments finis P_1 de Lagrange défini par :
$$V_h \;=\; \{v_h \in C^0([a,b]) \text{ tel que } v_h|_{[x_j,x_{j+1}]} \in P_1,\; j = 0, 1, ..., N-1\}.$$
Donner l'expression des fonctions $w_j \in V_h$, $0 \leq j \leq N$, définies par
$$w_j(x_i) \;=\; \delta_{i,j}$$
et vérifier qu'ils forment une base de V_h.

Nous définissons l'opérateur d'interpolation Π_h de $V = H^1(I)$ dans V_h par
$$\Pi_h v(x) \;= \sum_{j=0}^{j=N} v(x_j)\, w_j(x) \qquad \forall v \,\in V.$$
La suite de l'exercice a pour but d'obtenir une estimation de l'erreur d'interpolation $v - \Pi_h v$ dans $H^1(I)$ et d'en déduire des estimations d'erreur correspondant à l'approximation de u par éléments finis à l'aide de l'espace d'approximation V_h.

1.4 - En utilisant l'identité
$$v(x) = v(x_i) + (x - x_i)v'(x_i) + \int_{x_i}^{x} (x-t)v''(t)\; dt$$
pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que :
$$\|v \;-\; \Pi_h v\|_{L^2(I)} \;\leq\; C\, h^2 \|v\|_{H^2(I)} \qquad \forall\, v \in H^2(I),$$
$$\left\| \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \;-\; \frac{\mathrm{d}\Pi_h v}{\mathrm{d}x} \right\|_{L^2(I)} \;\leq\; C\, h \|v\|_{H^2(I)} \qquad \forall\, v \in H^2(I).$$

1.5 - On désigne par $u_h \in V_h$ la solution du problème variationnel de la question **1.1** obtenu en remplaçant $H^1(I)$ par V_h. Montrer que sous les conditions de régularités de la question 2, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que :
$$\|u - u_h\|_{H^1(I)} \;\leq\; C\, h.$$

Exercice 2. Eléments finis P_1 en dimension 2

Soit K un triangle de $\mathbb{R}^2$ de sommets $(S_1, S_2, S_3) \in (\mathbb{R}^2)^3$, non-alignés.

2.1 - Montrer qu'il existe un et un seul triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in P_1^3$ tel que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^2, \qquad & \lambda_1(x)\, S_1 + \lambda_2(x)\, S_2 + \lambda_3(x)\, S_3 &= x, \\ \forall x \in \mathbb{R}^2, \qquad & \lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \lambda_3(x) &= 1, \end{aligned}$$

qui sont par définition les coordonnées barycentriques associées à . Caractériser le triangle K à l'aide des fonctions $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et démontrer que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ forme une base de P_1.

2.2 - Soit un domaine Ω et $(T_l)_{l=1..L}$ une partition du domaine Ω, où

1. T_l est un triangle d'intérieur $(\mathrm{Int}(T_l))$ non vide,

2. $\mathrm{Int}(T_l) \cap \mathrm{Int}(T_k) \;=\; \emptyset$ et $\cup_{l=1,L}\, T_l \;=\; \bar{\Omega}$,

3. Toute arête d'un triangle est soit sur le bord Γ, soit une arête d'un autre triangle.

On note $(M_I)_{I=1,N}$ l'ensemble de tous les sommets des triangles T_l et on introduit l'espace suivant :

$$V_h \;=\; \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ telle que } v_h|_{T_l} \in P_1\}.$$

Expliquer pourquoi $V_h \subset H^1(\Omega)$.

2.3 - Montrer qu'il existe une unique fonction $W_I \in V_h$ telle que :

$$W_I(M_J) \;=\; \delta_{IJ} \quad \forall J = 1, .., N.$$

On représentera graphiquement cette fonction, et on la reliera aux coordonnées barycentriques.

2.4 - Montrer que les W_I, $1 \leq I \leq N$ forment une base de V_h.

Exercice 3. Eléments finis P_2 en dimension 1

On s'intéresse à l'approximation de par éléments finis P_2. Pour cela, on introduit le maillage de pas $h \;=\; \dfrac{b-a}{N}$ défini par les points :

$$x_j \;=\; a \,+\, j\, h \qquad j = 0, 1, ..., N.$$

On désigne par P_2 l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On introduit l'espace de dimension finie défini par :

$$V_h \;=\; \{v_h \in C^0([a,b]) \text{ tel que } v_h|_{[x_j,x_{j+1}]} \in P_2,\; j = 0,1,...,N-1\}.$$

3.1 - Exhiber une base adéquate $\{w_j(x), 0 \leq j \leq N\} \cup \{w_j^1(x), 0 \leq j \leq N-1\}$ de l'espace V_h telle que :

$$\begin{aligned} w_j(x_i) \;&=\; \delta_{i,j} \qquad w_j\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \;=\; 0, \\ w_j^1(x_i) \;&=\; 0 \qquad w_j^1\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \;=\; \delta_{i,j}. \end{aligned}$$

3.2 - Représenter sur l'intervalle $[x_{j-1}, x_{j+1}]$ les deux fonctions de base w_j et w_j^1. Quelle est la différence entre ces deux types de fonctions de base ?