

Séance n°1

Introduction aux EDP et aux différences finies
Corrigé

15 Novembre 2005

**Exercice 1. Principes du maximum discret et continu -
Convergence L^∞ .**

1.1 - Comme $f \in C^1(\bar{\Omega})$, $u \in C^3(\bar{\Omega})$ est en particulier une fonction continue sur un domaine compact $\bar{\Omega}$, elle atteint donc ses bornes sur ce domaine. Notons $x_m \in \bar{\Omega}$ le point où u est maximale. On a l'alternative suivante :

- Premier cas : $x_m \in \partial\bar{\Omega} = \Gamma$, alors $u(x_m) = 0 \leq \max(0, \max_{x \in \bar{\Omega}} f(x))$.

- Deuxième cas : $x_m \in \Omega$. Comme u est maximale en ce point et $u \in C^2(\bar{\Omega})$, on a

$$\nabla u(x_m) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_m) \leq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_m) \leq 0 \quad \implies \quad \Delta u(x_m) \leq 0.$$

Par conséquent

$$u(x_m) = f(x_m) + \Delta u(x_m) \leq f(x_m) \leq \max(0, \max_{x \in \bar{\Omega}} f(x)).$$

Si on effectue le même raisonnement sur le maximum de $-u$, on obtient finalement :

$$\min_{x \in \bar{\Omega}} (0, \min_{x \in \bar{\Omega}} f(x)) \leq u(x) \leq \max(0, \max_{x \in \bar{\Omega}} f(x)), \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Supposons que le problème admette deux solutions u_1, u_2 . La différence $u_1 - u_2$ vérifie le système

$$\begin{cases} -\Delta(u_1 - u_2) + u_1 - u_2 = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_1 - u_2 = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

En appliquant le principe du maximum, on a :

$$0 \leq u_1 - u_2 \leq 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

On en déduit que $u_1 = u_2$; la solution est unique.

1.2 - Pour une réécriture matricielle du problème discret on adopte une numérotation des points du maillage de calcul : on associe au point de coordonnées (ih, jh) le numéro $i + 1 + (j + 1)(N + 1)$. On note $\mathbf{u}_{(j+1)(N+1)+i+1} = u_{ij}$, et on définit ainsi un vecteur de $\mathbb{R}^{(N+1)^2}$:

$$U = (\mathbf{u}_m)_{1 \leq m \leq (N+1)^2}$$

Le vecteur U est alors solution d'un système linéaire, dont la matrice a la structure tridiagonale par blocs (de tailles $(N + 1) \times (N + 1)$) suivante

$$A = \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{I}{h^2} & H & -\frac{I}{h^2} & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & -\frac{I}{h^2} & H & -\frac{I}{h^2} \\ 0 & \dots & 0 & I \end{pmatrix}$$

I est la matrice identité d'ordre $N + 1$ et H est la matrice tridiagonale d'ordre $N + 1$ qui s'écrit

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & 1 + \frac{4}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & 1 + \frac{4}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3 - Notons le point (i_m, j_m) tel que $u_{i_m, j_m} = \max_{i, j} u_{i, j}$.

Comme dans la question 1, on distingue deux cas :

- Premier cas : le point M_{i_m, j_m} appartient au bord Γ , on a alors

$$u_{i_m, j_m} = 0 \leq \max(0, \max_{i, j} f_{ij})$$

– Second cas : le point M_{i_m, j_m} est à l'intérieur du carré $]0, 1[\times]0, 1[$.

Le nombre u_{i_m, j_m} est donc supérieur à chacun des nombres

$$\{ u_{i_m+1, j_m}, u_{i_m-1, j_m}, u_{i_m, j_m-1}, u_{i_m, j_m+1} \}$$

et par conséquent

$$(\Delta_h u)_{i_m, j_m} \equiv \frac{u_{i_m+1, j_m} + u_{i_m-1, j_m} + u_{i_m, j_m+1} + u_{i_m, j_m-1} - 4u_{i_m, j_m}}{h^2} \leq 0.$$

En utilisant l'équation du schéma au point M_{i_m, j_m} , on obtient

$$u_{i_m, j_m} = f_{i_m, j_m} + (\Delta_h u)_{i_m, j_m} \leq f_{i_m, j_m} \leq \max(0, \max_{i, j} f_{ij})$$

On a donc

$$u_{i, j} \leq u_{i_m, j_m} \leq f_{i_m, j_m} \leq \max(0, \max_{i, j} f_{ij})$$

Par un raisonnement analogue sur $-u_{ij}$ on aboutit à l'inégalité

$$\min(0, \min_{i, j} f_{ij}) \leq u_{ij} \leq \max(0, \max_{i, j} f_{ij})$$

Soit U la solution du système $AU = 0$, par le principe du maximum discret que nous venon d'établir, $u_{i, j} = 0$. $U = 0$, ce qui prouve que la matrice A est de noyau nul. De plus, c'est une matrice carrée, elle est donc inversible. La solution du schéma est unique.

1.4 - Introduisons l'erreur commise sur la solution

$$e_{ij} = u(M_{i, j}) - u_{ij}$$

ainsi que l'erreur de troncature du schéma

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{u(M_{i+1, j}) + u(M_{i-1, j}) + u(M_{i, j+1}) + u(M_{i, j-1}) - 4u(M_{i, j})}{h^2} + u(M_{i, j}) - f_{i, j}.$$

Par linéarité. e_{ij} et ε_{ij} sont reliés par :

$$(1) \quad \begin{cases} -\frac{e_{i+1, j} + e_{i-1, j} + e_{i, j+1} + e_{i, j-1} - 4e_{ij}}{h^2} + e_{ij} = \varepsilon_{ij}, & \text{si } M_{ij} \in \Omega, \\ e_{ij} = 0, & \text{si } M_{ij} \in \Gamma. \end{cases}$$

Le principe du maximum discret nous dit que :

$$(2) \quad \max_{i, j} |e_{ij}| \leq \max_{i, j} |\varepsilon_{ij}|$$

Nous allons maintenant estimer (en fonction du pas de discrétisation h) l'erreur de troncature ε_{ij} . L'outil de base est le développement de Taylor-Lagrange de u , qu'on peut utiliser jusqu'à l'ordre 4 puisque $u \in C^4(\bar{\Omega})$. Dans ce qui suit nous utilisons la notation :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} = \frac{\partial u}{\partial x}(M_{ij}), \dots$$

et $(M_x^+, M_x^-, M_y^+, M_y^-)$ désignent 4 points dans Ω . Nous avons

$$u(M_{i+1,j}) = u(M_{i,j}) + h \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij} + \frac{h^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{ij} + \frac{h^4}{24} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{ij}(M_x^+)$$

$$u(M_{i-1,j}) = u(M_{i,j}) - h \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij} - \frac{h^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{ij} + \frac{h^4}{24} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{ij}(M_x^-)$$

$$u(M_{i,j+1}) = u(M_{i,j}) + h \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ij} + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ij} + \frac{h^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_{ij} + \frac{h^4}{24} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{ij}(M_y^+)$$

$$u(M_{i,j-1}) = u(M_{i,j}) - h \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ij} + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ij} - \frac{h^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_{ij} + \frac{h^4}{24} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{ij}(M_y^-)$$

En sommant, puis en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, on obtient, pour certains (M_x, M_y) dans Ω :

$$\begin{aligned} & \left| \begin{aligned} & u(M_{i+1,j}) + u(M_{i-1,j}) + u(M_{i,j+1}) + u(M_{i,j-1}) - 4u(M_{i,j}) = \\ & = h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{ij} + \frac{h^4}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(M_x) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(M_y) \right) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant le fait que u est solution du problème

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{i,j} + u(M_{i,j}) = f_{i,j},$$

On obtient aisément

$$\varepsilon_{ij} = \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(M_x) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(M_y) \right).$$

et par conséquent

$$\max_{i,j} |\varepsilon_{ij}| \leq \frac{h^2}{12} \left(\max_{x \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right| + \max_{x \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right| \right) \leq C h^2 \|f\|_{C^2(\bar{\Omega})}$$

En reportant dans (2), on obtient finalement

$$\|u - u_h\|_{\infty} \leq C h^2 \|f\|_{C^2(\bar{\Omega})}$$

On a ainsi prouvé que le schéma introduit est un schéma d'ordre 2.

Exercice 2. Sur l'équation de la chaleur 1D.

2.1 - On cherche la solution sous la forme

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) w_n(x), \quad w_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(n\pi x)$$

Cette forme est adaptée au problème car les fonctions w_n sont les solutions du problème de valeurs propres :

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \lambda w \\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases}$$

les valeurs propres associées étant $\lambda_n = n^2\pi^2$. On vérifie aisément que les fonctions w_n forment une base orthogonale

$$\int_0^1 w_n(x) w_m(x) dx = \delta_{n,m}$$

De plus, on peut (théorie des séries de Fourier) décomposer toute fonction $u_0 \in L^2$ sur cette base

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_0^n w_n, \quad u_0^n = \int_0^1 w_n(x) u_0(x) dx$$

On voit que chaque fonction $u_n(t)$ est solution d'un problème indépendant

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt} + n^2\pi^2 u_n(t) = 0, & t > 0, \\ u_n(0) = u_0^n. \end{cases}$$

La solution de ce problème est égale à $u_n(t) = u_0^n e^{-n^2\pi^2 t}$.

On en déduit la solution $u(x, t)$ recherchée

$$(3) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_0^n e^{-n^2\pi^2 t} w_n(x) \quad x \in [0, 1], t \geq 0.$$

On remarque que, la base w_n étant orthonormée

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |u_0^n|^2 e^{-2n^2\pi^2 t} \leq e^{-2\pi^2 t} \sum_{n=1}^{\infty} |u_0^n|^2 = e^{-2\pi^2 t} \|u_0\|_{L^2}^2.$$

De même en appliquant Cauchy-Schwarz (discret) à (3), il vient :

$$|u(x, t)|^2 \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_0^n|^2 \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n^2\pi^2 t} \right) = \frac{e^{-2\pi^2 t}}{1 - e^{-2\pi^2 t}} \|u_0\|_{L^2}^2,$$

d'où on tire l'estimation L^∞

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{e^{-\pi^2 t}}{\sqrt{1 - e^{-2\pi^2 t}}} \|u_0\|_{L^2}, \quad \forall t > 0.$$

2.2 - Admettons que le problème ait une solution dans L^2 pour tout temps. Alors la fonction

$$u_n(t) = \int_0^1 w_n(x) u(x, t) dx$$

est nécessairement donnée par

$$u_0^n e^{n^2 \pi^2 t}$$

Le problème est que $e^{n^2 \pi^2 t}$ croît exponentiellement vite avec n pour tout t . Ainsi, si nous choisissons la donnée initiale

$$u_{0,n} = w_n,$$

la solution u^n correspondante sera :

$$u_n(x, t) = e^{n^2 \pi^2 t} w_n(x).$$

On calcule aisément que, pour tout $t > 0$:

$$\frac{\|u^n(\cdot, t)\|^2}{\sum_{m=1}^M \left\| \frac{d^m u_0}{dx^m} \right\|_{L^2}^2} = \frac{e^{n^2 \pi^2 t}}{\sum_{m=1}^M n^{2m} \pi^{2m}} \rightarrow +\infty \quad \text{when } n \rightarrow +\infty,$$

ce qui démontre l'impossibilité d'avoir une estimation du type :

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2} \leq C(t) \sum_{m=0}^M \left\| \frac{d^m u_0}{dx^m} \right\|_{L^2}.$$

Exercice 3. Problèmes stationnaires bien et mal posés.

3.1 -

3.1-(a) Soit u_1, u_2 deux solutions du problème. $u = u_1 - u_2$ est solution de

$$(4) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, & x \in]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Si on intègre une première fois l'équation, on obtient

$$-a(x) \frac{\partial u}{\partial x} = C.$$

On intègre cette équation entre $[0, 1]$

$$u(1) - u(0) = 0 = C \int_0^1 \frac{1}{a(x)}$$

Comme $a(x)$ est strictement positive, on en déduit que $C = 0$. Donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \implies u(x) = \text{constante} = u(0) = 0.$$

3.1-(b) Comme $u(0) = 0$, on a la relation

$$u(x) = \int_0^x \frac{\partial u}{\partial t} dt.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$|u(x)|^2 = \left| \int_0^x \frac{\partial u}{\partial t} dt \right|^2 \leq \left(\int_0^x dt \right) \left(\int_0^x \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dt \right) \leq x \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dt.$$

Après intégration intègre sur $[0, 1]$ nous obtenons le résultat demandé :

$$\int_0^1 |u(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dt.$$

On multiplie maintenant l'équation par u et on effectue une intégration par parties :

$$+ \int_0^1 a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int_0^1 f(x)u(x) dx.$$

Les termes de bord de l'intégration par parties sont nuls car $u(0) = u(1) = 0$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur le second membre de la relation, on obtient

$$\left| \int_0^1 a(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right. \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ \left. \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right.$$

On en déduit aisément

$$\int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \leq \frac{1}{2a_-^2} \int_0^1 |f(x)|^2 dx,$$

et par suite

$$\int_0^1 |u(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \leq \frac{1}{4a_-^2} \int_0^1 f(x)^2 dx.$$

3.1-(c) On intègre une première fois l'équation entre 0 et t

$$a(t) \frac{\partial u}{\partial t} = c - \int_0^t f(y) dy = c - F(t) \quad (\text{où } F(t) = \int_0^t f(y) dy).$$

On divise par $a(t)$, qui ne s'annule pas, et on intègre sur $[0, x]$ pour obtenir

$$u(x) = d + \int_0^x \frac{c}{a(t)} dt - \int_0^x \frac{F(t)}{a(t)} dt.$$

Les constantes c et d sont déterminées par les deux conditions aux limites $u(0) = u(1) = 0$. La première condition aux limites fournit $u(0) = d = 0$. La seconde condition aux limites fournit la relation

$$c \int_0^1 \frac{dt}{a(t)} = \int_0^1 \frac{F(t)}{a(t)} dt,$$

c'est à dire

$$c = \frac{\int_0^1 a(t)^{-1} F(t) dt}{\int_0^1 a(t)^{-1} dt},$$

ce qui donne la solution explicite du problème

$$u(x) = \left(\frac{\int_0^1 a(t)^{-1} F(t) dt}{\int_0^1 a(t)^{-1} dt} \right) \int_0^x \frac{dt}{a(t)} - \int_0^x \frac{F(t)}{a(t)} dt.$$

3.2 - Si on suppose que $\int_0^1 a(x)^{-1} dx \neq 0$, En reprenant le calcul de la question précédente, on voit que nécessairement :

$$u(x) = c \int_0^x a(t)^{-1} dt.$$

La condition $u(x) = 1$ fournit :

$$c \int_0^x a(t)^{-1} dt = 1,$$

ce qui ne permet de déterminer la constante c que si $\int_0^1 a(x)^{-1} dx \neq 0$ auquel cas on montre que l'unique solution du problème est donnée par :

$$u(x) = \frac{\int_0^x a(t)^{-1} dt}{\int_0^1 a(t)^{-1} dt}.$$

3.3 -

3.3-(a) Si u est solution du problème, il est trivial que $u + c$ - où c est une constante quelconque - est alors également solution du problème. On ne peut donc avoir unicité de la solution. Nous remarquons que la condition $\int_{\Omega} u \, dx = 0$ élimine cette indétermination de la constante.

3.3-(b) Supposons que le problème admette une solution u . On intègre alors l'équation sur Ω et on utilise la formule de Green. On a

$$\int_{\Omega} f(x) \, dx = - \int_{\Omega} \Delta u \, dx = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma = \int_{\Gamma} g \, d\sigma$$

On en déduit que $\int_{\Omega} f \, dx + \int_{\Gamma} g \, d\sigma = 0$.