Séance n°1
Introduction aux EDP et aux différences finies

15 Novembre 2005

Exercice 1. Principes du maximum discret et continu - Convergence L^∞.

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$. On considère l'unique solution u du problème :

$$(1)\qquad \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

On admettra le résultat suivant :

$$(2)\qquad f \in C^m(\bar{\Omega}) \Longrightarrow u \in C^{m+2}(\bar{\Omega}),\ \text{pour tout entier } m \geq 1,$$

avec l'estimation (ọnstante C dépendant de m) :

$$\|u\|_{C^{m+2}(\bar{\Omega})} \leq C\ \|f\|_{C^m(\bar{\Omega})}\ , \qquad (\ \|f\|_{C^m(\bar{\Omega})} = \max_{|\alpha|\leq m}\ \sup_{x\in\bar{\Omega}}\ |D^\alpha f(x)|\ )$$

1.1 - En supposant que $f \in C^1(\bar{\Omega})$, démontrer le principe du maximum :

$$\min\,(0, \min_{x\,\in\,\bar{\Omega}} f(x)) \leq u(x) \leq \max\,(0, \max_{x\,\in\,\bar{\Omega}} f(x)) \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

En déduire l'unicité de la solution.

1.2 - On suppose maintenant que Ω est le carré $]0,1[\times]0,1[$ auquel cas (2) reste vrai si on suppose f à support compact dans Ω. On considère un maillage uniforme de pas h de $\bar{\Omega}$, M_{ij} désignant le point de coordonnées (ih, jh) $\left(0 \leq i, j \leq N, h = \frac{1}{N}, N \in \mathbb{N}^*\right)$.

On approche la solution de (1) par le schéma aux différences finies :

$$
(3) \qquad \begin{cases} -\dfrac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij}}{h^2} + u_{ij} = f_{ij}, & \text{si } M_{ij} \in \Omega, \\ u_{ij} = 0, & \text{si } M_{ij} \in \Gamma. \end{cases}
$$

Montrer que la recherche de la solution approchée équivaut à la résolution d'un système linéaire dont on précisera la matrice.

1.3 - Démontrer que si $u_{i,j}$ est solution de (3), alors :

$$
\min\,(0, \min_{i,j} f_{ij}) \leq u_{ij} \leq \max\,(0, \max_{i,j} f_{ij})
$$

En déduire l'existence et l'unicité de la solution du schéma (3).

1.4 - Nous désignons par u_h la solution de (3) et posons :

$$
\| \; u - u_h \; \|_\infty = \max_{i,j} \mid u(M_{ij}) - u_{ij} \mid
$$

Dans le cas où $f \in C^2(\bar{\Omega})$, établir une estimation d'erreur pour $\| \; u - u_h \; \|_\infty$ en fonction de h et $\| \; f \; \|_{C^2(\bar{\Omega})}$.

1.5 - Généraliser les résultats des questions 1.2 à 1.3 à l'exemple suivant :

$$
(4) \qquad \begin{cases} -\mathrm{div}(a(x)\nabla u) + q(x)u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}
$$

où $a(x)$ et $q(x)$ désignent des fonctions régulières satisfaisant en outre :

$$
\begin{cases} 0 < a_* \leq a(x) \leq a^* < +\infty & \forall x \in \bar{\Omega} \\ 0 < q_* \leq q(x) \leq q^* < +\infty & \forall x \in \bar{\Omega} \end{cases}
$$

(On construira en particulier un schéma d'approximation par différences finies pour (4)).

Exercice 2. Sur l'équation de la chaleur 1D.

On s'intéresse à $u(x, t)$ solution de :

$$
(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & x \in]0, 1[, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \end{cases}
$$

2.1 - Calculer la solution explicite de (5) sous la forme d'un développement en séries de Fourier adapté au problème. En déduire les estimations de stabilité suivantes :

$$\begin{cases} \|u(.,t)\|_{L^2} \ \leq \ e^{-\pi^2 t} \, \|u_0\|_{L^2} \ , & \forall \, t \geq 0, \\ \\ ||u(.,t)||_{L^\infty} \ \leq \ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \, \dfrac{e^{-\pi^2 t}}{\sqrt{1-e^{-2\pi^2 t}}} \, ||u_0||_{L^2} \ , & \forall \, t > 0. \end{cases}$$

2.2 - Expliquer, en procédant comme à la question précédente, pourquoi le problème :

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad x \in \,]0,1[, \quad t > 0 \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \\ \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

est mal posé. Plus précisément, on montrera qu'on ne peut avoir aucune estimation du type :

$$\|u(.,t)\|_{L^2} \leq C(t) \, \sum_{m=0}^{M} \| \frac{d^m u_0}{dx^m} \|_{L^2} \ .$$

où $C(t)$ serait indépendante de u_0.

Exercice 3. Problèmes stationnaires bien et mal posés.

3.1 - Etant donnés $f(x) :]0,1[\to \mathbb{R}$ et $a(x) :]0,1[\to \mathbb{R}$, où $a(x)$ est bornée strictement positive, on s'intéresse au problème

$$(7) \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(a(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big) = f \quad x \in \,]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

3.1 - (a) Démontrer l'unicité de la solution.

3.1 - (b) Démontrer sans chercher à calculer la solution que l'on a le résultat de stabilité L^2 ($a_- > 0$ désigne la borne inférieure de $a(x)$) :

$$\int_0^1 |u(x)|^2 \, dx \leq \frac{1}{4a_-^2} \, \int_0^1 |f(x)|^2 \, dx$$

(Indication : multiplier l'équation par u et intégrer sur $]0,1[$.)

On démontrera au préalable que, comme $u(0)=0$,

$$\int_0^1 |u(x)|^2 \, dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |\frac{\partial u}{\partial x}(x)|^2 \, dx.$$

3.1 - (c) Calculer explicitement la solution du problème.

3.2 - On s'intéresse au problème

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}\big(a(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\big) = 0 & x \in]0,1[, \\ u(0)=0, \quad u(1)=1 \end{cases}$$

On suppose que la fonction $a(x)$ ne s'annule jamais mais qu'elle n'est plus de signe constant (penser à une fonction constante par morceaux). Montrer que le problème est bien posé si et seulement si :

$$\int_0^1 a(x)^{-1} \, dx \neq 0.$$

3.3 - Ω désignant un ouvert borné régulier et connexe de $\mathbb{R}^N$, on s'intéresse au problème :

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

où f et g sont donnés dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma)$.

3.3 - (a) Montrer qu'il n'y a pas unicité de la solution. On rajoute alors la condition :

$$\text{(10)} \qquad \int_\Omega u \, dx = 0$$

qui permet, on l'admettra, de garantir l'unicité de la solution.

3.3 - (b) Montrer que si (9,10) admet une solution dans $H^1(\Omega)$, nécessairement :

$$\text{(11)} \qquad \int_\Omega f \, dx + \int_\Gamma g \, d\sigma = 0$$