Schémas numériques pour les équations hyperboliques non linéaires 1D.

Patrick Joly

INRIA-Rocquencourt

Approximation numérique.

Le problème à résoudre s'écrit:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u(x,t) : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{+} \longrightarrow \mathbf{R} \text{ tel que:} & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, & x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Approximation numérique.

Le problème à résoudre s'écrit:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u(x,t) : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R} \text{ tel que:} & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, & x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

On se donne un pas de discrétisation en espace $\Delta x > 0$,
un pas de discrétisation en temps $\Delta t > 0$ et on va calculer:

$$u_j^n \sim u(x_j, t^n), \quad x_j = j\Delta x, \quad t^n = n\Delta t.$$

Schémas à un pas en temps.

Cadre général : Schémas à trois pas en espace

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$$

Schémas à un pas en temps.

Cadre général : Schémas à trois pas en espace

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$$

Cas particulier : schémas conservatifs

Schémas à un pas en temps.

Cadre général : Schémas à trois pas en espace

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$$

Cas particulier : schémas conservatifs

Principe de base : méthode des volumes finis

$$u_j(t) = \frac{1}{h}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x,t)\, dx$$

Schémas à un pas en temps.

On intégre l'équation entre $x_{j-\frac{1}{2}}$ et $x_{j-\frac{1}{2}}$:

$$\frac{d}{dt}u_j(t) + \frac{1}{h}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} f(u)\, dx = 0$$

Schémas à un pas en temps.

On intégre l'équation entre $x_{j-\frac{1}{2}}$ et $x_{j-\frac{1}{2}}$:

$$\frac{d}{dt}u_j(t) + \frac{1}{h}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} f(u)\, dx = 0$$

ce qui donne:

$$\frac{d}{dt}u_j(t) + \frac{1}{h}\left[f\left(u(x_{j+\frac{1}{2}}, t)\right) - f\left(u\left(x_{j-\frac{1}{2}}, t)\right)\right] = 0$$

Schémas à un pas en temps.

On intégre l'équation entre $x_{j-\frac{1}{2}}$ et $x_{j-\frac{1}{2}}$:

$$\frac{d}{dt}u_j(t) + \frac{1}{h}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x}f(u)\, dx = 0$$

ce qui donne:

$$\frac{d}{dt}u_j(t) + \frac{1}{h}\left[f\left(u(x_{j+\frac{1}{2}}, t)\right) - f\left(u\left(x_{j-\frac{1}{2}}, t\right)\right)\right] = 0$$

Problème : Approcher $f\left(u(x_{j+\frac{1}{2}}, t)\right)$ à partir des $u_\ell(t)$...

Schémas à un pas en temps.

On intégre l'équation entre $x_{j-\frac{1}{2}}$ et $x_{j-\frac{1}{2}}$:

$$\frac{d}{dt}u_j(t) + \frac{1}{h}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} f(u)\, dx = 0$$

ce qui donne:

$$\frac{d}{dt}u_j(t) + \frac{1}{h}\left[f\left(u(x_{j+\frac{1}{2}},t)\right) - f\left(u\left(x_{j-\frac{1}{2}},t\right)\right)\right] = 0$$

Problème : Approcher $f\left(u(x_{j+\frac{1}{2}},t)\right)$ à partir des $u_\ell(t)$...

Choix naturel: $f(u(x_{j+\frac{1}{2}},t)) \sim g(u_j(t), u_{j+1}(t))$

$(u,v) \to g(u,v)$: flux numérique du schéma.

Schémas à un pas en temps.

Discrétisation en temps: schéma explicite

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left[\, g(u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-1}^n, u_j^n) \, \right] = 0.$$

Schémas à un pas en temps.

Discrétisation en temps: schéma explicite

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left[\, g(u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-1}^n, u_j^n) \, \right] = 0.$$

Forme générale des schémas des schémas conservatifs.

Remarque: $\sum_j u_j^n \Delta x \quad \left(\sim \int_{\mathbf{R}} u(x,t)\, dx \right)$ est conservé.

Schémas à un pas en temps.

Discrétisation en temps: schéma explicite

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x}\left[\, g(u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-1}^n, u_j^n)\,\right] = 0.$$

Forme générale des schémas des schémas conservatifs.

Remarque: $\sum_j u_j^n \Delta x \quad \left(\sim \int_{\mathbf{R}} u(x,t)\,dx\right)$ est conservé.

Schéma de la forme $u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$ avec:

$$H(u, v, w) = v - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\, g(v, w) - g(u, v)\,\right].$$

Notion de consistance.

Soit $u(x,t)$ une solution régulière et $\bar{u}_j^n = u(x_j, t^n)$, on définit:

$$\varepsilon_j^n = \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x}\left[g(\bar{u}_j^n, \bar{u}_{j+1}^n) - g(\bar{u}_{j-1}^n, \bar{u}_j^n)\right]$$

Schéma consistant $\quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon_j^n \to 0 \quad$ quand $\quad \Delta t, \Delta x \to 0$.

Notion de consistance.

Soit $u(x,t)$ une solution régulière et $\bar{u}_j^n = u(x_j, t^n)$, on définit:

$$\varepsilon_j^n = \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x}\left[g(\bar{u}_j^n, \bar{u}_{j+1}^n) - g(\bar{u}_{j-1}^n, \bar{u}_j^n)\right]$$

Schéma consistant $\quad\Longleftrightarrow\quad \varepsilon_j^n \to 0$ quand $\Delta t, \Delta x \to 0$.

Théorème : Un schéma conservatif est consistant $\Longleftrightarrow$

$$g(u,u) = f(u), \qquad \forall u \in \mathbf{R}.$$

(Il est alors au moins d'ordre 1)

Notion de consistance.

Soit $u(x,t)$ une solution régulière et $\bar{u}_j^n = u(x_j, t^n)$, on définit:

$$\varepsilon_j^n = \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x}\left[g(\bar{u}_j^n, \bar{u}_{j+1}^n) - g(\bar{u}_{j-1}^n, \bar{u}_j^n)\right]$$

Schéma consistant $\iff$ $\varepsilon_j^n \to 0$ quand $\Delta t, \Delta x \to 0$.

Théorème : Un schéma conservatif est consistant $\iff$

$$g(u,u) = f(u), \qquad \forall u \in \mathbf{R}.$$

(Il est alors au moins d'ordre 1)

Il existe des schémas consistants et non conservatifs (cf. TD)

Vers la convergence (1).

A la suite (u_j^n) on associe la fonction constante par morceaux

$$u_h(x,t) = u_j^n, \qquad x_{j-\frac{1}{2}} < x < x_{j+\frac{1}{2}}, \quad t^{n-\frac{1}{2}} < t < t^{n+\frac{1}{2}}$$

et on adopte la notation $h \equiv (\Delta t, \Delta x)$.

Vers la convergence (1).

A la suite (u_j^n) on associe la fonction constante par morceaux

$$u_h(x,t) = u_j^n, \qquad x_{j-\frac{1}{2}} < x < x_{j+\frac{1}{2}}, \quad t^{n-\frac{1}{2}} < t < t^{n+\frac{1}{2}}$$

et on adopte la notation $h \equiv (\Delta t, \Delta x)$.

Théorème 1 : Si

a) $\|u_h\|_{L^\infty} \leq C$ (indépendante de h) : Stabilité L^∞

b) $u_h(x,t) \longrightarrow u^*(x,t)$ $p.p.\ (x,t)\ \ (h \to 0)$

Alors si le schéma est conservatif et consistant, u^* est une solution faible du problème.

Vers la convergence (1).

A la suite (u_j^n) on associe la fonction constante par morceaux

$$u_h(x,t) = u_j^n, \qquad x_{j-\frac{1}{2}} < x < x_{j+\frac{1}{2}}, \quad t^{n-\frac{1}{2}} < t < t^{n+\frac{1}{2}}$$

et on adopte la notation $h \equiv (\Delta t, \Delta x)$.

Théorème 1 : Si

a) $\|u_h\|_{L^\infty} \leq C$ (indépendante de h) : Stabilité L^∞

b) $u_h(x,t) \to u^*(x,t)$ $\quad p.p.\ (x,t)\ \ (h \to 0)$

Alors si le schéma est conservatif et consistant, u^* est une solution faible du problème.

Remarque : Dans le cas non conservatif, la limite u^* peut ne pas être solution faible du problème.

Notion de schéma entropique.

Il s'agit d'un schéma qui réalise un équivalent discret de

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(u) + \frac{\partial}{\partial x}\psi(u) \leq 0$$

pour toute entropie mathématique (η, ψ) (η convexe, $\psi' = \eta' f'$).

Notion de schéma entropique.

Il s'agit d'un schéma qui réalise un équivalent discret de

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(u) + \frac{\partial}{\partial x}\psi(u) \leq 0$$

pour toute entropie mathématique (η, ψ) (η convexe, $\psi' = \eta' f'$).

Définition : Un schéma conservatif est entropique si et seulement si pour toute entropie mathématique (η, ψ), il existe une fonction $\Phi(u, v)$ telle que

- $\Phi(u, u) = \psi(u)$
- $\dfrac{\eta(u_j^{n+1}) - \eta(u_j^n)}{\Delta t} + \dfrac{1}{\Delta x}\left[\Phi(u_j^n, u_{j+1}^n) - \Phi(u_{j-1}^n, u_j^n)\right] \leq 0$

Vers la convergence (2).

Théorème 2 : On fait les hypothèses a) et b) du théorème 1 et on suppose que le schéma est entropique. Alors la limite u^* est la solution faible entropique du problème.

- Vérifier la condition a) (stabilité L^∞) impose une condition CFL du type

$$\Big(\sup_{|v| \leq \|u_0\|_\infty} |f'(v)| \Big) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq C$$

- Vérifier la condition b) est en général difficile (techniques de compacité)
- Vérifier le caractère entropique du schéma est en pratique difficile (pour toute entropie ...).

Notion de schéma monotone.

Définition : Un schéma à 3 points

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$$

est monotone si et seulement si la fonction H est croissante par rapport à chacun de ses arguments

Remarque : En pratique H dépend de Δt et Δx (exemple des schémas conservatifs) et la monotonie n'est réalisée que sous condition de type CFL.

Notion de schéma monotone (2).

Propriété : Si la fonction $x \rightarrow u_0(x)$ est croissante alors pour tout $t \geq 0$, $x \rightarrow u(x,t)$ est croissante.

Preuve : Soit $a > 0$

$$\begin{cases} u_0(x) & \longrightarrow \quad u(x,t) \\ \\ u_0^a(x) = u_0(x+a) & \longrightarrow \quad u^a(x,t) = u(x+a,t) \end{cases}$$

Comme $u_0^a \geq u_0$, par le principe de comparaison, $u^a \geq u$.

Notion de schéma monotone (2).

Propriété : Si la fonction $x \to u_0(x)$ est croissante alors pour tout $t \geq 0$, $x \to u(x,t)$ est croissante.

Preuve : Soit $a > 0$

$$\begin{cases} u_0(x) & \to \quad u(x,t) \\ u_0^a(x) = u_0(x+a) & \to \quad u^a(x,t) = u(x+a,t) \end{cases}$$

Comme $u_0^a \geq u_0$, par le principe de comparaison, $u^a \geq u$.

Lemme : Si un schéma est monotone alors :

$$\begin{cases} v_j^0 > u_j^0 & \to \quad v_j^n > u_j^n \\ u_{j+1}^0 > u_j^0 & \to \quad u_{j+1}^n > u_j^n \end{cases}$$

Notion de schéma monotone (2).

Lemme : Si un schéma est monotone alors :

$$\begin{cases} v_j^0 > u_j^0 & \longrightarrow \quad v_j^n > u_j^n \\ u_{j+1}^0 > u_j^0 & \longrightarrow \quad u_{j+1}^n > u_j^n \end{cases}$$

Notion de schéma monotone (2).

Lemme : Si un schéma est monotone alors :

$$\begin{cases} v_j^0 > u_j^0 & \longrightarrow \quad v_j^n > u_j^n \\ u_{j+1}^0 > u_j^0 & \longrightarrow \quad u_{j+1}^n > u_j^n \end{cases}$$

Preuve : Par récurrence. Supposons $v_j^n > u_j^n$ pout tout j, alors

$$v_j^{n+1} = H(v_{j-1}^n, v_j^n, v_{j+1}^n) > H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) = u_j^{n+1}$$

Notion de schéma monotone (2).

Lemme : Si un schéma est monotone alors :

$$\begin{cases} v_j^0 > u_j^0 & \rightarrow \quad v_j^n > u_j^n \\ u_{j+1}^0 > u_j^0 & \rightarrow \quad u_{j+1}^n > u_j^n \end{cases}$$

Preuve : Par récurrence. Supposons $v_j^n > u_j^n$ pout tout j, alors

$$v_j^{n+1} = H(v_{j-1}^n, v_j^n, v_{j+1}^n) > H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) = u_j^{n+1}$$

De même, si on suppose que $u_{j+1}^n > u_j^n$ pout tout j, alors

$$u_{j+1}^{n+1} = H(u_j^n, u_{j+1}^n, u_{j+2}^n) > H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) = u_j^{n+1}.$$

Convergence des schémas monotones.

Théorème : Si un schéma est conservatif, consistant et monotone alors

- Il est L^∞ stable et on a $\|u_h\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty$
- Il est entropique.
- Il est convergent (vers la solution entropique).

Convergence des schémas monotones.

Théorème : Si un schéma est conservatif, consistant et monotone alors

- Il est L^∞ stable et on a $\|u_h\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty$
- Il est entropique.
- Il est convergent (vers la solution entropique).

Remarque : Un tel schéma est d'ordre 1 seulement (voir TD).

Convergence des schémas monotones.

Théorème : Si un schéma est conservatif, consistant et monotone alors

- Il est L^∞ stable et on a $\|u_h\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty \qquad (*)$
- Il est entropique.
- Il est convergent (vers la solution entropique).

Remarque : Un tel schéma est d'ordre 1 seulement (voir TD).

$(*)$ On remarque que si $v_j^0 = \pm\|u_0\|_\infty$ alors $v_j^n = \pm\|u_0\|_\infty$.

Il suffit alors d'utiliser le principe de comparaison:

$$-\|u_0\|_\infty \leq u_j^0 \leq \|u_0\|_\infty \quad \Longrightarrow \quad -\|u_0\|_\infty \leq u_j^n \leq \|u_0\|_\infty$$

Quelques exemples de schémas conservatifs.

Schéma de Lax-Friedrichs (ordre 1, monotone sous CFL 1).

$$g(u,v) = \frac{1}{2}\Big(\ f(u) + f(v) + \frac{\Delta x}{\Delta t}(u - v)\ \Big)$$

Quelques exemples de schémas conservatifs.

Schéma de Lax-Friedrichs (ordre 1, monotone sous CFL 1).

$$g(u,v) = \frac{1}{2}\Big(\ f(u) + f(v) + \frac{\Delta x}{\Delta t}(u - v)\ \Big)$$

Schéma de Engquist-Osher (ordre 1, monotone sous CFL 1).

$$g(u,v) = \frac{1}{2}\Big(\ f(u) + f(v) - \int_u^v |a(\xi)|\, d\xi\ \Big)$$

Quelques exemples de schémas conservatifs.

Schéma de Lax-Friedrichs (ordre 1, monotone sous CFL 1).

$$g(u,v) = \frac{1}{2}\Big(\, f(u) + f(v) + \frac{\Delta x}{\Delta t}(u - v)\, \Big)$$

Schéma de Engquist-Osher (ordre 1, monotone sous CFL 1).

$$g(u,v) = \frac{1}{2}\Big(\, f(u) + f(v) - \int_u^v |a(\xi)|\, d\xi\, \Big)$$

Schéma de Murman-Roe (ordre 1, non monotone).

$$g(u,v) = \frac{1}{2}\Big(\, f(u) + f(v) + |a(u,v)|\, (u - v)\, \Big)$$

avec $a(u,v) = \dfrac{f(u) - f(v)}{u - v}$ si $u \neq v, \quad = f'(u)$ si $u = v$.

Quelques exemples de schémas conservatifs.

Schéma de Lax-Friedrichs (ordre 1, monotone sous CFL 1).

$$g(u,v) = \frac{1}{2}\Big(f(u) + f(v) + \frac{\Delta x}{\Delta t}(u-v) \Big)$$

Schéma de Engquist-Osher (ordre 1, monotone sous CFL 1).

$$g(u,v) = \frac{1}{2}\Big(f(u) + f(v) - \int_u^v |a(\xi)|\, d\xi \Big)$$

Schéma de Lax-Wendroff (ordre 2, non monotone).

$$g(u,v) = \frac{1}{2}\Big(f(u) + f(v) - \frac{\Delta t}{\Delta x}\, a\big(\frac{u+v}{2}\big)\big(f(u) - f(v)\big) \Big)$$

Le schéma de Godounov (1).

Soit $S(t)$ l'opérateur de $L^\infty(\mathbf{R})$ dans lui même tel que:

$$S(t)u_0 = u(.,t)$$

où u est la solution entropique du problème de Cauchy associé à la donnée initiale u_0.

Le schéma de Godounov (1).

Soit $S(t)$ l'opérateur de $L^\infty(\mathbf{R})$ dans lui même tel que:

$$S(t)u_0 = u(.,t)$$

où u est la solution entropique du problème de Cauchy associé à la donnée initiale u_0.

Le schéma de Godunov s'appuie sur le fait que pour une donnée u_0 daps l'espace:

$$P^0_{\Delta x} = \{v \in L^\infty(\mathbf{R}) \ / \ \forall\ j \in \mathbb{Z}, v(x) = v_j \text{ if } x \in]x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[\ \}$$

alors, sous réserve que: $\left(\sup\limits_{|v| \leq \|u_0\|_\infty} |f'(v)| \right) \dfrac{\Delta t}{\Delta x} \leq \dfrac{1}{2}$ (CFL)

la solution $S(\Delta t)u_0$ se calcule "explicitement" par concaténation de solutions de problèmes de Riemann.

Le problème de Riemann (1).

C'est le problème associé à une donnée initiale du type:

$$u_0(x) = u_L, \quad \text{si } x < 0, \qquad u_0(x) = u_R, \quad \text{si } x > 0.$$

Une telle donnée vérifie:

$$u_0(\lambda x) = u_0(x), \qquad \forall\, x \in \mathbf{R}, \qquad \forall\, \lambda > 0.$$

Le problème de Riemann (1).

C'est le problème associé à une donnée initiale du type:

$$u_0(x) = u_L, \quad \text{si } x < 0, \qquad u_0(x) = u_R, \quad \text{si } x > 0.$$

Une telle donnée vérifie:

$$u_0(\lambda x) = u_0(x), \qquad \forall\, x \in \mathbf{R}, \qquad \forall\, \lambda > 0.$$

Par homogénéité, si $u(x,t)$ est solution faible entropique de:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$$

$u(\lambda x, \lambda t)$ est aussi solution faible entropique.

Le problème de Riemann (1).

C'est le problème associé à une donnée initiale du type:

$$u_0(x) = u_L, \ \ \textbf{si } x < 0, \qquad u_0(x) = u_R, \ \ \textbf{si } x > 0.$$

Une telle donnée vérifie:

$$u_0(\lambda x) = u_0(x), \quad \forall\, x \in \mathbf{R}, \quad \forall\, \lambda > 0.$$

Par homogénéité, si $u(x,t)$ est solution faible entropique de:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$$

$u(\lambda x, \lambda t)$ est aussi solution faible entropique.

Par unicité, on en déduit que la solution u associée à u_0 vérifie:

$$u(\lambda x, \lambda t) = u(x,t), \quad \forall\, x \in \mathbf{R}, \quad \forall\, \lambda > 0.$$

Le problème de Riemann (2).

Par conséquent in existe une fonction $w(\xi; u, v)$ telle que:

$$u(x,t) = w(\xi; u_L, u_R)$$

Le problème de Riemann (2).

Par conséquent in existe une fonction $w(\xi; u, v)$ telle que:

$$u(x,t) = w(\xi; u_L, u_R)$$

Lemme: la fonction $\xi \to w(\xi)$ vérifie en tout ξ:

$$w'(\xi) = 0 \quad \text{ou} \quad a(w(\xi)) = \xi.$$

Le problème de Riemann (2).

Par conséquent in existe une fonction $w(\xi; u, v)$ telle que:

$$u(x,t) = w(\xi; u_L, u_R)$$

Lemme: la fonction $\xi \to w(\xi)$ vérifie en tout ξ:

$$w'(\xi) = 0 \quad \text{ou} \quad a(w(\xi)) = \xi.$$

Preuve: Si $u(x,t) = w(x/t)$ alors:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -x/t^2 \cdot w'(x/t) = 1/t \cdot -x/t \; w'(x/t) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x} f(u) = 1/t \cdot a\big(w(x/t)\big) \; w'(x/t), \end{cases}$$

Par conséquent $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$ si et seulement si:

$$w'(\xi) \;\left[a\big(w(\xi)\big) - \xi\right] = 0.$$

Le problème de Riemann (2).

Par conséquent in existe une fonction $w(\xi; u, v)$ telle que:

$$u(x,t) = w(\xi; u_L, u_R)$$

Lemme: la fonction $\xi \to w(\xi)$ vérifie en tout ξ:

$$w'(\xi) = 0 \quad \text{ou} \quad a(w(\xi)) = \xi.$$

Corollaire: Si $a^- = min(a(u_L), a(u_R)) < a^+ = max(a(u_L), a(u_R))$,

$$w(\xi; u_L, u_R) = u_L \text{ si } \xi < a^-, \quad = u_R \text{ si } \xi > a^+.$$

L'intervalle $[a^-, a^+]$ se décompose en un nombre fini de sous-intervalles tels que, pour chacun d'entre eux:

- soit $w(\cdot; u_L, u_R)$ est constante, (entre deux chocs),
- soit $w(\xi; u_L, u_R) = a^{-1}(\xi)$, (onde de détente).

Le schéma de Godounov (2).

Par propagation à vitesse finie, il est facile de voir que si:

$$u_0 \; (\equiv u_j) \in P^0_{\Delta x}$$

alors, sous la condition CFL,

$$S(\Delta t) u_0 \mid_{[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]} = w_R\left(\frac{x - x_j}{\Delta t}, u_{j-\frac{1}{2}}, u_{j+\frac{1}{2}}\right)$$

Le schéma de Godounov (2).

Par propagation à vitesse finie, il est facile de voir que si:

$$u_0 \; (\equiv u_j) \in P^0_{\Delta x}$$

alors, sous la condition CFL,

$$S(\Delta t) u_0 \,\big|_{[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]} = w_R\Big(\frac{x - x_j}{\Delta t}, u_{j-\frac{1}{2}}, u_{j+\frac{1}{2}}\Big)$$

Le schéma de Godounov consiste à construire la suite $u^n_{\Delta x} \in P^0_{\Delta x}$ définie par:

$$u^{n+1}_{\Delta x} = \Pi_{\Delta x} \; [S(\Delta t) u^n_{\Delta x}]$$

où $\Pi_{\Delta x}$ désigne l'opérateur de projection L^2 sur $P^0_{\Delta x}$.

Le schéma de Godounov (3).

On peut montrer que le schéma de Godounov est un schéma conservatif associé au flux numérique:

$$g(u, v) = f\left(w(0; u, v)\right)$$

Le schéma de Godounov (3).

On peut montrer que le schéma de Godounov est un schéma conservatif associé au flux numérique:

$$g(u, v) = f\big(w(0; u, v)\big)$$

On peut également montrer que le schéma de Godounov est, sous la condition CFL, monotone.

Le schéma de Godounov (3).

On peut montrer que le schéma de Godounov est un schéma conservatif associé au flux numérique:

$$g(u, v) = f\big(w(0; u, v)\big)$$

On peut également montrer que le schéma de Godounov est, sous la condition CFL, monotone.

De nombreux schémas numériques soint dérivés du schéma de Godunov. Ils en diffèrent par le fait que le problème de Riemann est résolu de facon approchée ou en changeant l'étape de projection (P_1 au lieu de P_0, ...).

Modalités des Soutenances.

Elles se déroulent sur 2 demi journées :

Lundi 6 mars après midi	Mardi 7 mars matin
14:00 $\longrightarrow$ 14:30	08:30 $\longrightarrow$ 09:00
14:35 $\longrightarrow$ 15:05	09:05 $\longrightarrow$ 09:35
15:10 $\longrightarrow$ 15:40	09:40 $\longrightarrow$ 10:10
15:45 $\longrightarrow$ 16:15	10:15 $\longrightarrow$ 10:45
16:20 $\longrightarrow$ 16:50	10:50 $\longrightarrow$ 11:20
16:55 $\longrightarrow$ 17:25	11:25 $\longrightarrow$ 11:55

Modalités des Soutenances.

Trois jurys en parallèle. Chaque jury comporte 2 enseignants qui écoutent les groupes ayant choisi leurs sujets:

- Patrick Joly / Abdelaaziz Ezziani
- Houssem Haddar / Grégoire Derveaux
- Véronique Duwig / Pascal Omnès

Exposé de 30 mn (10 mn par élève) + 5 mn de questions

Si possible préparer l'exposé sur ordinateur ou sur transparents

Remise du rapport final le jour de la soutenance.

Répartition des groupes : consulter l'inspecteur des études.