Séance 6

19 janvier 2004

Les scripts et les fonctions pour réaliser ces exercices se trouvent à l'URL
`http://www-rocq.inria.fr/~haddar/Cours/ENSMP/`

Exercice 1 : Ordre des méthodes pour les équations différentielles

Exécuter le fichier `ShowRK.sce`. Il utilise plusieurs méthodes de Runge Kutta, d'ordre variant de 1 à 5 pour résoudre l'équation différentielle $y' = y, y(0) = 1$ pour $t \in [0, 1]$, avec des pas variant de 5/32 à 5/512.

Le script calcule une matrice `E` contenant les erreurs à $t = 1$ pour les différents pas et les différents ordres (chaque colonne représente un ordre donné).

Vérifier l'ordre « numérique » des méthodes en calculant les pentes des droites représentées.

Exercice 2 : Une méthode instable

Nous avons vu que la méthode à deux pas définie par

$$y_{n+2} + 4y_{n+1} - 5y_n = h(4f_{n+1} + 2fn)$$

est instable.

Exécuter le script `ShowUnstab.sce` (le tableau `yvals` contient les valeurs de y_n). Est-il utile de « faire tendre h vers 0 » ?

Exercice 3 : Un problème raide

Nous avons vu que l'équation différentielle

$$(1) \qquad \begin{cases} y' = -\lambda(y - \cos x) & \lambda > 0 \text{ (en fait, } \lambda \gg 1) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

nécessitait une méthode implicite pour s'affranchir de la contrainte de stabilité.

Exécuter le script `ShowStiff.sce`. Vous pouvez faire varier les paramètres suivants:

λ **:** plus λ est grand, plus le problème est raide ;

$\mathbf{y(0)}$: contrôle la durée du régime transitoire (plus cette valeur est proche de 1, moins le transitoire est visible) ;

$\mathbf{t_f}$: le temps final d'intégration ;

$\mathbf{h}$: le pas d'intégration ;

Méthode : Explicite (avec une contrainte de stabilité) ou implicite (sans contrainte de stabilité).

Vérifier numériquement la condition de stabilité $h < 2/\lambda$ (l'instabilité se manifeste dès que l'on franchit la limite).

Si l'on utilise une méthode implicite, jusqu'à quelle valeur de h peut-on raisonnablement aller ?

Exercice 4 : Problème des trois corps

Une version restreinte du problème des trois corps considère la terre de masse $\mu = 0.012277471$, la soleil de masse $\hat{\mu} = 1 - \mu$ et la lune de masse négligeable en mouvement dans un plan. Les équations du mouvement sont :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} u_1'' & = & u_1 + 2u_2' - \hat{\mu}\dfrac{u_1 + \mu}{D_1} - \mu\dfrac{u_1 - \hat{\mu}}{D_2}, \\ u_2'' & = & u_2 - 2u_1' - \hat{\mu}\dfrac{u_2}{D_1} - \mu\dfrac{u_2}{D_2}; \end{array} \right.$$

avec $D_1 = ((u_1 + \mu)^2 + u_2^2)^{3/2}$, $D_2 = ((u_1 - \hat{\mu})^2 + u_2^2)^{3/2}$.

Pour les conditions initiales

$$u_1(0) = 0.994,\ u_2(0) = 0,\ u_1'(0) = 0,\ u_2'(0) = -2.0015851063791,$$

la solution est périodique de période légèrement inférieure à 17.1 (l'orbite correspondante s'appelle une orbite d'Arenstorf).

4.1 - Mettre ce système sous la forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre.

4.2 - Compléter le script `aren.sci` qui correspond à l'évaluation de $(y_1', y_2', y_3', y_4')^t$ où $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (u_1, u_2, u_1', u_2')$.

4.3 - Le programme `aren.sce` intègre le système différentiel avec une méthode de *à pas fixe*, en faisant varier l'ordre et le pas de temps. Comparer avec la solution de référence fournie par l'intégrateur à pas variable de Scilab (voir figure).

Combien de faut-il de pas de temps pour que l'orbite paraisse *qualitativement* correcte ?

Cet exercice fournit une forte motivation pour l'utilisation des méthodes à pas adaptatif ! On pourra visualiser également la séquence de pas de temps choisie par le solveur de Scilab.