# Séance 5

**19 janvier 2004**

## Exercice 1 : Une méthode multipas «optimale»

**1.1 -** Chercher la méthode multipas explicite à 2 pas ayant l'ordre maximum.

**1.2 -** On veut utiliser cette méthode pour résoudre l'équation $y' = y, y(0) = 1$. Écrire l'équation aux différences. Étudier sa stabilité. Conclusion?

## Exercice 2 : Un problème raide

**2.1 -** Résoudre l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y' = -\lambda(y - \cos x) & \lambda > 0 \text{ (en fait, } \lambda \gg 1) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Donner une approximation de la solution pour $\lambda \to \infty$.

**2.2 -** On approche (1) par la méthode d'Euler explicite. Quelle doit être la taille du pas $h$? Est-ce raisonnable?

**2.3 -** Reprendre la question précédente pour la méthode d'Euler implicite, puis pour la méthode du trapèze : $\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = \dfrac{1}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$.

## Exercice 3 : Méthode de Gear d'ordre 2

Soit $q(x)$ le polynôme de degré 2 défini par

$$q(x_j) = y_j \quad \text{pour} \quad j = n+1, n, n-1$$

**3.1 -** Donner l'expression de $q$.

**3.2 -** Le schéma de Gear correspond à la condition : $q'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, q(x_{n+1}))$. Étudier l'ordre et la stabilité de la méthode (de différentiation rétrograde).

# Exercice 4 : Méthodes de Runge-Kutta et contrôle du pas

**4.1 -** Déterminer les méthodes de Runge-Kutta à deux pas d'ordre 2 :

$$\begin{cases} k_1 & = & f(y_n) \\ k_2 & = & f(y_n + hak_1) \\ y_{n+1} & = & y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2) \end{cases}$$

**4.2 -** On utilise la méthode d'Euler $\hat{y}_{n+1} = y_n + hf(y_n)$ en conjonction avec la méthode précédente, et on prend $\hat{y}_{n+1} - y_{n+1}$ comme estimation de l'erreur.

En déduire un schéma de contrôle du pas, de sorte que l'erreur reste voisine d'une tolérance $\delta$ fixée.