Séance 4

19 janvier 2004

Exercice 1 : Une formule de Newton-Cotes

1.1 - Trouver la formule de quadrature de Newton-Cotes à trois points qui permet d'approcher

$$\frac{1}{\sqrt{2h}}\int_0^{2h}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx.$$

1.2 - Montrer que si f est trois fois dérivable alors l'erreur commise est en $O(h^3)$.

Exercice 2 : Méthodes de Gauss

Soit $x_0, \cdots, x_n$, $n+1$ points distincts de l'intervalle $[-1,\,1]$ et soit w une fonction poids définie sur $[-1,\,1]$.

2.1 - Montrer qu'il existe un unique $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n)^t \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que la formule

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,w(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n}\lambda_i\,f(x_i) \tag{1}$$

soit exacte pour toute fonction polynômiale de degré $\leq n$.

Nous rappelons que le principe des méthodes de Gauss est de bien choisir les points x_i pour que cette formule reste exacte pour des fonctions polynômiales de degré $\leq m > n$. Ainsi, si les x_i coïncident avec les zéros du polynôme orthogonal (pour le poids w) de degré $n+1$, alors la formule de quadrature (1) est exacte pour toute fonction f polynômiale de degré $\leq 2n+1$ (Gauss-Legendre correspond à $w(x)=1$).

2.2 - On fixe $x_0=-1$ et $x_n=1$. En utilisant les polynômes orthogonaux pour le poids $w(x)(x+1)(x-1)$, montrer qu'il est possible de choisir $x_1, \cdots, x_{n-1}$ pour que (1) soit exacte pour les polynômes de degré $\leq 2n-1$ (Gauss-Lobatto correspond à $w(x)=1$). Montrer que les λ_i correspondant sont > 0.

2.3 - A précision égale, la méthode de Gauss-Lobatto est donc plus coûteuse que la méthode de Gauss-Legendre. Montrer que ces deux méthodes ont un coût comparable lorsqu'elles sont utilisées dans une formule de quadrature composite.

Exercice 3 : Méthode de Gauss-Chebyshev

Nous reprenons ici les notations de l'exercice précédent. Nous rappelons que la méthode de Gauss-Chebyshev correspond à $w(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

3.1 - Montrer que $x_i = \cos(\theta_i)$ avec $\theta_i = \frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}$, $i = 0, \cdots, n$. (Nous rappelons que le polynôme de Chebyshev de degré n est defini par $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.)

3.2 - Montrer que

$$\lambda_i = \int_{-1}^{1} \frac{T_{n+1}(x)}{T'_{n+1}(x_i)(x - x_i)}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx, \quad i = 0, \cdots, n.$$

3.3 - Posons, pour i fixé, $\alpha_k = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos k\theta - \cos k\theta_i}{\cos\theta - \cos\theta_i} d\theta$, $k = 0, 1 \cdots$; montrer que

$$\alpha_{k+1} - 2\cos(\theta_i)\, \alpha_k + \alpha_{k-1} = 0$$

pour $k \geq 1$. Calculer α_{n+1}.

3.4 - Déduire que $\lambda_i = \pi/(n + 1)$, pour tout i.