Séance 2

12 janvier 2003

Exercice 1 : Formule de Sherman-Morrison

1.1 - Soit $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ une matrice inversible et $(u,v) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ deux vecteurs. Montrer la formule :

$$(A+uv^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1+v^tA^{-1}u}A^{-1}uv^tA^{-1},$$

(préciser les conditions de validité).

1.2 - Supposons connue une factorisation $PA = LU$ de A, et soit $b \in R^n$. Donner un algorithme pour résoudre $(A+uv^t)x = b$. Donner le nombre d'opérations.

Exercice 2 : Méthode de Cholesky par blocs

Soit $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique et définie positive, avec $n = p \times m$. Écrivons

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix}$$

où chaque bloc $A_{ij} \in \mathbf{R}^{p\times p}$ (ainsi $A_{ij} = A^t_{ji}$). On cherche une factorisation $A = LL^t$ avec

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ L_{m1} & \cdots & L_{mm} \end{bmatrix}$$

où chaque bloc $L_{ij} \in \mathbf{R}^{p\times p}$ et où chaque L_{ii} est triangulaire inférieure. En identifiant les blocs dans le produit LL^t, écrire un algorithme de calcul des blocs L_{ij}. Quelles sont les opérations (matricielles) de base?

Exercice 3 : Propriétés de la SVD

Soit $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, et soit $A = U\begin{pmatrix}\Sigma \\ 0\end{pmatrix}V^t$ sa décomposition en valeurs singulières, avec $U \in R^{m\times m}, V \in R^{n\times n}, \sum = \text{ diag }(\sigma_1, \ldots, \sigma_r), \sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ et U et V orthogonales.

3.1 - On note $U = (u_1, \dots, u_m), V = (v_1, \dots, v_n)$ les colonnes de U et V. Vérifier que

1. $A = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \sigma_j u_j v_j^t$;
2. $\operatorname{Ker} A = \operatorname{vect}(v_{r+1}, \dots, v_n)$;
3. $\operatorname{Im} A = \operatorname{vect}(u_1, \dots, u_r)$, et donc Rang $(A) = r$;
4. $\sigma_1 = \displaystyle\sup_{\substack{x \in (\operatorname{Ker} A)^\perp \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|_2$ et $\sigma_r = \displaystyle\inf_{\substack{x \in (\operatorname{Ker} A)^\perp \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

3.2 - Pour $k \leq r$, on pose $A_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \sigma_j u_j v_j^t$. Montrer que

$$\inf_{\substack{B \in R^{m \times n} \\ \operatorname{rang}(B) \leq k}} \|A - B\|_2 = \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$$

(où $\sigma_{r+1} = 0$ par convention).

Exercice 4 : Moindres carrés avec contrainte linéaire

On veut résoudre le problème :

$$(1) \qquad \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2 \text{ sous la contrainte } Bx = d$$

où $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{p \times n}$, $(m \geq n \geq p)$, $b \in \mathbf{R}^m, d \in \mathbf{R}^p$, $x \in \mathbf{R}^n$. On supposera que B est de rang p (ce qui assure que la contrainte est consistante).

4.1 - Montrer que ce problème admet toujours une solution.

4.2 - Montrer que $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} B = \{0\}$ si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ est de rang n, et que dans ces conditions la solution de (**??**) est unique.

On fait l'hypothèse $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} B = \{0\}$ dans la suite de l'exercice.

4.3 - En utilisant une factorisation $B^t = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_B \\ 0 \end{pmatrix}$ $(Q_1 \in \mathbf{R}^{n \times p},\ Q_2 \in \mathbf{R}^{n \times (n-p)})$, montrer que la solution générale du système (sous déterminé) $Bx = d$ est donnée par

$$(2) \qquad x = Q_1 x_1 + Q_2 x_2,$$

avec $x_1 = R_B^{-t} d$, et $x_2 \in \mathbf{R}^{n-p}$.

4.4 - En calculant la matrice $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix}$, montrer que la matrice AQ_2 est de rang $n-p$. En reportant (**??**) dans le problème de minimisation (**??**), montrer comment déterminer x_2 puis résoudre complètement ce problème.