Séance 1

9 décembre 2003

Exercice 1 : Stabilités directe et rétrograde

Pour tout $x, y \in \mathbf{R}^n$, on pose

$$s_n(x,y) = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

et on note $\tilde{s}_n(x,y)$ le résultat de l'évaluation numérique de $s_n(x,y)$ via l'algorithme usuel

$\tilde{s}_n = 0$
`For` $i = 1 : n$
  $\tilde{s}_n = \tilde{s}_n + x_i$`*`$y_i$
`End`

On note u la précision machine et on pose

$$\Lambda_n = \{\lambda \in \mathbf{R}\ ;\ \lambda = \prod_{i=1}^{n}(1+\delta_i),\ \text{avec}\ |\delta_i| \le u,\ i = 1, \cdots, n\}.$$

1.1 - Montrer qu'il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Lambda_n$ tels que : $\tilde{s}_n(x,y) = \sum_{i=1}^{n}(x_i\, y_i)\lambda_i$.

1.2 - Montrer que $|\lambda - 1| \le \dfrac{nu}{1-nu}$ pour tout $\lambda \in \Lambda_n$.

1.3 - En déduire la stabilité rétrograde de $\tilde{s}_n$.

1.4 - En raisonnant sur le rang de la matrice, montrer que l'évaluation numérique $\tilde{S}_n(x,y)$ du produit extérieur $S_n(x,y) = xy^T$ ne peut jouir de la stabilité rétrograde.

1.5 - Discuter la stabilité directe de $\tilde{s}_n$ et $\tilde{S}_n$.

Exercice 2 : Compensation des erreurs d'arrondi

2.1 - Vérifier (numériquement) que la formule « naïve » pour calculer $f(x) = (e^x - 1)/x$ n'est pas satisfaisante pour $|x| \ll 1$. Expliquer !

2.2 - On propose l'algorithme modifié suivant :

$y = e^x$
`if` $y = 1$
  $\tilde{f} = 1$
`else`
  $\tilde{f} = (y-1)/\ln(y)$
`end`

Montrer que, bien que $y-1$ et $\ln(y)$ soient tous deux calculés avec une erreur importante, $\tilde{f}$ constitue une très bonne approximation de $f(x)$ (étudier la fonction définie par $g(y) = (y-1)/\ln(y)$ au voisinage de 1, et utiliser des développements limités). On supposera que les fonctions exp et ln sont calculées à la précision machine.

Confirmer cette étude numériquement.

2.3 - En s'inspirant de l'exemple précédent, proposer un algorithme pour l'évaluation précise de $\ln(1+x)$ pour $|x| \ll 1$. Proposer alors une formule pour l'évaluation numérique précise de $(1+\frac{1}{n})^n$ pour n grand.

Exercice 3 : Extrapolation de Richardson

Soit $F(h)$ une quantité dépendant d'un « pas », censé tendre vers 0. On suppose connu un développement limité de l'erreur de troncature :

$$F(h) = a_0 + a_1 h^p + O(h^r), \quad h \to 0,\ r > p$$

où $a_0 = F(0)$ est la quantité cherchée, et a_1 est inconnu.

3.1 - Montrer que l'on peut estimer a_0 et a_1 en calculant F pour deux valeurs du pas h et qh. Éliminer a_1 pour obtenir une approximation de $F(0)$ en $O(h^r)$.

3.2 - On suppose que F admet un développement du type

$$F(h) = a_0 + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \cdots,$$

et l'on définit la suite F_k par

$$F_1(h) = F(h), \quad F_{k+1}(h) = F_k(h) + \frac{F_k(h) - F_k(2h)}{2^{2k}-1}.$$

Montrer (par récurrence) que F_n admet un développement

$$F_n(h) = a_0 + a_n^{(n)} h^{2n} + \cdots.$$

En déduire un algorithme de calcul de a_0.

3.3 - Application : Archimède a calculé une valeur approchée de π en inscrivant des polygones réguliers dans le cercle unité, et en remplaçant la circonférence du cercle par celle du polygone. Il est allé jusqu'à un polygone de 96 cotés, obtenant $\pi \approx 3.1410$.

Montrer que le périmètre d'un polygone à n cotés inscrit dans le cercle unité vaut $c_n = 2n \sin \frac{\pi}{n}$. En posant $h = 1/n$, donner le développement limité de c_n à l'ordre 4 en h.

Montrer que c_n peut se calculer par la formule de récurrence suivante :

$$c_{2n} = 2n\sqrt{2 - \sqrt{4 - (c_n/n)^2}} = 2c_n \Big/ \sqrt{2 + \sqrt{4 - (c_n/n)^2}} \tag{1}$$

(quel est l'intérêt de la seconde formule ?).

En utilisant la question précédente, calculer une approximation de π à partir des résultats suivants

n	6	12	24	48	96
$c_n/2$	3.000000	3.10582854	3.13262861	3.1393502	3.14103195