TP 3 – Identification de paramètres dans un système d'équations différentielles ordinaires

27 janvier 2005

Les scripts et les fonctions pour réaliser ces exercices sont disponibles sur :
`http://www-rocq.inria.fr/~haddar/Cours/CS305`

Le but de ce TP est de réaliser un ensemble de fonctions en matlab permettant d'attaquer des problèmes inverses pour les équations différentielles ordinaires

$$y'(t) = f(y,a),\ 0 < t < T, \quad y(0) = y_0$$

où $y : [0,T] \to \mathbf{R}^d$, $a \in \mathbf{R}^p$ et $f : \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^d$.

On suppose connue des mesures de l'état y à des instants $\tau_1, \dots, \tau_Q$, que l'on note $d = (d_1, \dots, d_Q)$ avec $d_q \in \mathbf{R}^d$, et l'on cherche à identifier le paramètre a pour lequel la différence entre d_q et $y(t_q)$ est la plus petite possible, au sens des moindres carrés.

On suppose que l'on intègre l'équation différentielle par la méthode d'Euler explicite. On note $t^0 = 0 \le t^1 \le \cdots \le t^n \le \cdots \le t^N \le T$ les points de discrétisation, avec $t^n = nh,\ Nh = T$. Le schéma d'Euler s'écrit alors :

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h} - f(y^n, a) = 0,\ n = 0, \dots, N-1, \quad y^0 = y_0.$$

Vous validerez votre code sur les deux exemples suivants :

$$f(y,a) = \begin{pmatrix} -(a_1 + a_3)y_1^2 & a_1 y_1^2 - a_2 y_2 \end{pmatrix}^t \tag{1}$$

avec les conditions initiales $y(0) = y_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^t$, et

$$f(y,a) = \begin{pmatrix} -(a_1 + a_2)y_1 & a_1 y_1 & a_2 y_1 - (a_3 + a_4)y_3 + a_5 y_5 & a_3 y_3 & a_4 y_3 - a_5 y_5 \end{pmatrix}^t. \tag{2}$$

avec les conditions initiales $y(0) = y_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t$.

1 - Écrire la formulation aux moindres carrés de ce problème. On notera J la fonction coût.

2 - Rappeler comment on peut calculer le gradient de la fonction coût, d'abord par différenciation directe, puis par la méthode de l'état adjoint, enfin par différences finies.

Pour simplifier on prendra dans toute la suite $(\tau_1, \ldots, \tau_Q) = (t^1, \ldots, t^N)$.

3 - Vérifier que la fonction `f.m` correspond bien aux exemples donnés ! Compléter les fonctions `jaf.m` et `jyf.m` qui calculent respectivement $\nabla_a f$ et $\nabla_y f$.

4 - La fonction `direct.m` résout le problème direct avec un schéma d'Euler explicite. Tester les résultats fournis par cette routine. Compléter la routine `adjoint.m`, permettant le calcul de l'état adjoint.

5 - Compléter la fonction `costf.m` qui calcule la fonction coût J et son gradient (utiliser l'état adjoint).

6 - Résoudre les problèmes correspondant aux données disponibles dans les fichiers `gasoil.dat` et `pinene.dat` en exécutant (après modifications si nécessaires) la routine `simul.m`. Tester la sensibilité des résultats au choix de la donnée initiale `a0`.