# TP 2 – Régularisation de problèmes mal posés

5 Janvier 2005

Les scripts et les fonctions pour réaliser ces exercices sont disponibles sur :
`http://www-rocq.inria.fr/~haddar/Cours/CS305`

## Ex. 1 : Prospection géomagnétique

Nous reprenons ici la suite de l'exercice 2 du TP 1. Il s'agit de déterminer l'emplacement ou la forme d'anomalies géologiques à l'intérieur de la terre à partir de mesures de force de gravitation en surface. Nous considérons ici la version unidimensionnelle simplifiée où le propblème revient à déterminer la répartition de la densité de masse $\rho(s)$, $0 \le s \le 1$, d'une couche située à une profondeur $h$, à partir de mesures de la variation de force verticale $f(t)$, $a \le t \le b$ à la surface du sol. Nous rappelons que ces deux quantités sont reliées par

$$f(t) = h \int_0^1 \frac{\rho(s)}{(h^2 + (t-s)^2)^{3/2}}\, ds \quad a \le t \le b \tag{1}$$

**1.1 -** Donner l'expression de la matrice et du second membre associés à la discrétisation de cette équation par une méthode de quadrature-collocation où la méthode des rectangles est utilisée pour claculer l'intégrale.

Le fichier `geomag.m` contient la fonction `geomag`

```
[A, f, rho_ex]=geomag(n, example, a, b, h );
```

qui calcule la matrice `A` et le second membre `f` correspondant à une répartition `rho_ex` donnée (qui joue donc le rôle d'une solution exacte du problème), où `n` désigne le nombre de points de discrétisation, et la valeur 1, 2 ou 3 de `example` détermine le choix de `rho_ex`. Dans toute la suite on prendra

```
n = 60 ; a = 0 ; b = 1 ;
```

**1.2 -** Essayer de retrouver $\rho$ en résolvant le système linéaire par les méthodes usuelles (on prendra par exemple $h = 0.25$). Commenter la solution obtenue.

**1.3 -** Calculer la décomposition en valeurs singulières de $A$, puis visualiser la décroissance des valeurs singulières (commande `[U,S,V] = svd(A)`). Comment varient les valeurs singulières en fonction de $h$ ? Donner la signification physique de ceci !

**1.4 -** Calculer la solution régularisée par la méthode de Tikhonov (rappler le principe de cette méthode). Faire varier le paramètre de régularisation entre $10^{-1}$ et $10^{-16}$. Tracer les solutions correspondantes et comparer avec la solution exacte. Interpréter les résultats.

**1.5 -** On perturbe maintenant le second membre par un bruit aléatoire d'amplitude $\varepsilon = 10^{-3}$. La commande correspondante est :

```
e = epsilon*(1-2*rand(size(f)) ; fe = f + e ;
```

Reprendre la question précédente en remplaçant le second membre exact par le second membre bruité. Que constatez-vous ?

**1.6 -** Ecrire une fonction matlab qui permet de calculer la fonctionnelle de Morozov. Calculer alors le paramètre de régularisation correspondant au critère de Morozov (utiliser la commande `fzero` qui vous permet de trouver le zéro d'une fonction). Calculer la solution régularisée correspondante. Comparer la qualité des résultats obtenus pour `exemple = 1 ou 2`. Décrire l'effet d'augmenter la valeur de $h$ sur la stabilité et la précision du calcul !

# Ex. 2 : Travail à rendre

**2.1 -** Reprendre Reprendre les questions $1.4 - 1.6$ de l'exercice précédent en remplaçant la méthode de Tikhonov par la méthode de troncature spectrale !

**2.2 -** Reprendre les questions $1.4 - 1.6$ de l'exercice précédent dans le cas où $f$ et $\rho$ sont lié par

$$f(t) = \int_0^\pi \exp(t * \cos(s))\ \rho(s)\ ds \quad t \in [0, \pi].$$

où on prendra comme donée $f(t) = 2 * \sinh(t)/t$ et on comparera les solutions numériques avec la solution exacte donnée par $\rho(s) = \sin(s)$.