TP 1 – Applications de la décomposition en valeurs singulières

16 octobre 2003

Les scripts et les fonctions pour réaliser ces exercices sont disponibles sur :
`http://www-rocq.inria.fr/~haddar/Cours/CS305`

Ex. 1 : Conditionnement d'un système linéaire

Soit le système linéaire $Ax = b$, avec

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

1.1 - Résoudre le système (commande `x=A\b`).

1.2 - Calculer la décomposition en valeurs singulières de $A = U\Sigma V^t$, et le conditionnement de A. Les commandes Scilab correspondantes sont : `svd`, `cond`.

1.3 - On perturbe le système en ajoutant à b le vecteur $\delta b = 1/5\, v_4$ (un multiple du vecteur singulier associé à la plus petite valeur singulière de A, de façon que $||\delta b||/||b|| \approx 3/1000$). Il se calcule en Scilab par `db=V(:,4)/5`. Calculer la nouvelle solution $x + \delta x$.

1.4 - Calculer $\dfrac{||\delta x||/||x||}{||\delta b||/||b||}$, et expliquer ce résultat (comparer avec $\mathrm{cond}(A)$).

Ex. 2 : Prospection géomagnétique

Il s'agit de déterminer l'emplacement ou la forme d'anomalies géologiques à l'intérieur de la terre à partir de mesures de force de gravitation en surface. Nous considérons ici la version unidimensionnelle du problème. On se propose de déterminer la répartition $\rho(s)$, $0 \leq s \leq 1$, de la densité de masse d'une anomalie localisée à une profondeur h, à partir de mesures de la variation de force verticale $f(t)$, $a \leq t \leq b$ à la surface du sol. L'application de la loi de Newton pour les champs de gravitation ($f = \gamma \frac{m}{r^2}$) nous conduit à la relation

$$f(t) = \gamma h \int_0^1 \frac{\rho(s)}{(h^2 + (t-s)^2)^{3/2}}\, ds \quad a \leq t \leq b \tag{1}$$

où γ désigne la constante de gravitation.

2.1 - Montrer que le problème inverse qui consiste à déterminer $\rho \in L^2(0,1)$ à partir de la connaissance de $f \in L^2(a,b)$ est mal posé.

Le fichier `geomag.sci` contient la fonction `geomag`

```
[A, y, xex]=geomag(n, 1, a, b);
```

qui calcule la matrice, le second membre et la solution exacte du problème discrétisé par une méthode de quadrature-collocation. n désigne le nombre de points de discrétisation des intervalles $[0,1]$ et $[a,b]$ (tapez : `getf 'geomag.sci'` pour charger cette fonction).

2.2 - Essayer de résoudre ce problème par la méthode usuelle (`x=A\y`), pour $n = 10$, $n = 40$ et $n = 80$. Calculer le conditionnement de A. Conclusion ?

2.3 - Calculer la décomposition en valeurs singulières de A pour $n = 80$. Visualiser les valeurs singulières (passer en échelle logarithmique pour les ordonnées) et quelques vecteurs singuliers, parmi les premiers, puis parmi les derniers.

Ex. 3 : SVD et compression d'image

Une image (en niveau de gris) peut être considérée comme une matrice dont chaque élément est la valeur du pixel correspondant (ramené dans $]0,1[$). Notons A cette matrice, et soit $A = U\Sigma V^t$ sa décomposition en valeurs singulières. Pour $1 \leq k \leq n$, notons $\Sigma_k = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, 0, \ldots, 0)$, et remplaçons A par $A_k = U\Sigma_k V^t$.

Comment stocker économiquement A_k ? Quelle est l'économie réalisée ?

Le script `imcomp.sce` (tapez : `exec('imcomp.sce');`) lit et visualise une image, calcule la SVD de la matrice correspondante, et représente les valeurs singulières de la matrice (en échelle semi logarithmique).

A chaque valeur de k en entré, il visualise l'image obtenue en ne gardant que les k plus grandes valeurs singulières (visualisation de la matrice A_k). Vérifier le pourcentage de gain de stockage affiché. Proposer trois critères (intrinsèques) correspondant respectivement à des stockages de bonne, moyenne et faible qualités.

Ex. 4 : Équation normale

Soit $\varepsilon = 10^{-10}$ et soit le système sur-déterminé :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon \end{pmatrix}.$$

4.1 - Montrer que la solution du problème de moindres carrés est unique. Former l'équation normale et calculer la solution exacte du problème.

4.2 - Calculer la solution numérique, d'abord en résolvant numériquement l'équation normale, puis avec la commande `A\b`.

4.3 - Calculer la SVD de A, d'abord exactement, puis numériquement.