# TD 8 – Problèmes inverses non linéaires : Calcul du gradient

22 janvier 2004

## Ex. 1 : Identification d'une condition initiale

On considère l'équation différentielle (où $f$ est une fonction de classe $C^1$ à valeur dans $\mathbf{R}$),

$$y' = f(y), \quad t \in [0, T], \qquad y(0) = a, \tag{1}$$

dans laquelle on cherche à identifier la condition initiale $a$ à partir d'une mesure de la solution à l'instant $T$, $d_T$.

**1.1 -** Ecrire le schéma d'Euler explicite (à pas fixe) pour résoudre (1).

**1.2 -** Proposer une formulation aux moindres carrés du problème inverse (après discrétisation).

**1.3 -** En utilisant la méthode de l'état adjoint, montrer comment calculer la dérivée de la fonction coût par rapport à $a$.

## Ex. 2 : Identification de paramètres – problème elliptique

On considère le problème elliptique en dimension 1 suivant :

$$\begin{cases} -b\,u''(x) + c\,u'(x) = f(x) & \text{dans } ]0,1[ \\ u(0) = 0, \ u'(1) = 0 \end{cases}, \tag{2}$$

où $b$ et $c$ sont des paramètres réels, et $f \in L^2(0,1)$.

On cherche à identifier les coefficients $b$ et $c$ connaissant une mesure de $u(x)$ sur $]0,1[$.

**2.1 -** Proposer une formulation aux moindres carrés de ce problème inverse.

**2.2 -** On introduit une discrétisation de l'intervalle $]0,1[$ par un maillage de pas $h$. On pose $x_j = jh,\ j = 0, \ldots, N,\ u_j \approx u(x_j)$. On effectue une approximation du problème (2) par une méthode d'éléments finis $P_1$ ($u$ est approché par des fonctions affines sur chacun des intervalles$]x_{j-1}, x_{j+1}[$). Montrer que le problème approché s'écrit :

$$(bK + cD)U = F, \tag{3}$$

où $U = (u_1, \ldots, u_N)^t$, $b = (f_1, \ldots, f_N)^t$. Donner l'expression des matrices $K, D$ et du vecteur $F$.

Donner l'expression de la fonction coût discrète $J$.

**2.3 -** Montrer comment calculer le gradient de la fonction coût discrète par différentiation directe.

**2.4 -** Montrer comment calculer le gradient de la fonction coût discrète par l'équation adjointe.