TD 7 – Problèmes inverses non linéaires : généralités

8 janvier 2004

Ex. 1 : Équation différentielle

Soit l'équation différentielle

$$y'(t) - a(t)y(t) = f(t), \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, 1]. \tag{1}$$

On suppose que f est continue, et que $f(t) \geq 0,\ 0 < t < 1$.

1.1 - On suppose d'abord a constant. Résoudre l'équation différentielle. On veut résoudre le problème inverse « Déterminer a à partir de la mesure $d = y(1)$ ».

Montrer que ce problème n'a pas de solution si $d < 0$ alors que si $d \geq 0$, il a une solution unique.

1.2 - On revient maintenant au cas général. Soit $y_n(t) = \dfrac{1}{n} \sin nt + 2$, $n = 1, 2, \ldots$. Montrer qu'il existe une unique fonction continue a_n pour laquelle y_n est la solution de l'équation différentielle.

Vérifier que y_n converge vers 2, uniformément sur $[0, 1]$, mais que $a_n(t)$ ne converge que pour $t = 0$.

Ex. 2 : Identifiabilité dans un problème elliptique

On considère le problème aux limites :

$$\begin{cases} -(au')' = f(x) & 0 < x < 1 \\ a(0)u'(0) = 0, \ a(1)u'(1) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

On cherche à identifier le paramètre a à partir d'une mesure de u (pour simplifier, on suppose que l'on mesure u sur tout l'intervalle $[0, 1]$.

2.1 - On prend

$$f(x) = \begin{cases} -4x+1, & 0<x<1/2 \\ 0, & 1/2<x<1 \end{cases}, \text{ et } u(x) = \begin{cases} x^2 - x + 5/4, & 0<x<1/2 \\ 1, & 1/2<x<1. \end{cases} \tag{3}$$

Montrer que pour tout fonction φ différentiable sur $[1/2,1]$, avec $\varphi'(1/2)=1$ et $\varphi(1)=0$, la fonction

$$a(x) = \begin{cases} x, & 0<x<1/2 \\ \varphi(x), & 1/2<x<1 \end{cases}$$

vérifie (2).

2.2 - On prend maintenant $f(x) = -1$ et $u(x) = x$ pour $x \in [0,1]$. Montrer que $a(x) = x$.

Si on perturbe u en $u_\varepsilon(x) = x + \varepsilon \sin(x/\varepsilon^2)$, le coefficient a_ε correspondant est $a_\varepsilon(x) = \varepsilon x/(\varepsilon + \cos(x/\varepsilon^2))$.

Montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0} u_\epsilon = u$ uniformément sur $[0,1]$, mais que $a_\varepsilon \to 0$ ($\neq a$).

Ex. 3 : Calcul de jacobien

Un modèle cinétique de la réaction d'isomérisation est donné par les équations suivantes, où $y_i(t)$, $i = 1, \cdots, 5$, désigne la concentration de la i^{eme} composante :

$$\begin{cases} y_1'(t) = -(a_1+a_2)y_1(t) \\ y_2'(t) = a_1 y_1(t) \\ y_3'(t) = a_2 y_1(t) - (a_3+a_4)y_3(t) + a_5 y_5(t) & \quad \text{pour } t \in [0,1] \\ y_4'(t) = a_3 y_3(t) \\ y_5'(t) = a_4 y_3(t) - a_5 y_5(t). \end{cases} \tag{4}$$

avec les conditions initiales

$$y(0) = y_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t. \tag{5}$$

On notera $y' = f(y,a)$ le système d'équations différentielles précédent. On dispose des mesures de y à différents instants $(\tau_1, \ldots, \tau_Q)$ et voudrait déterminer $a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}^t$.

3.1 - Donner la formulation moindres carrées de ce problème inverse. On note J la fonction coût.

3.2 - Calculer les matrices jacobiennes $\nabla_a f$ et $\nabla_y f$.

3.3 - En différentiant l'équation différentielle $y' = f(y,a)$ par rapport à a montrer qu'il est possible de calculer grad J en résolvant un système différentiel en temps.

3.4 - (Bonus) Écrire un programme (en Scilab ou Matlab) de résolution du problème direct, en utilisant les schémas d'Euler explicite puis implicite.

Pour valider votre solution, une valeur approchée de la solution à $t = 1$ correspondant aux paramètres $a = (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)^t$ est $\begin{pmatrix}0.36788 & 0.31606 & 0.19278 & 0.06738 & 0.05590\end{pmatrix}^t$. Il sera aussi utile de comparer avec les solutions obtenues par le solveur d'équations différentielles standard du logiciel utilisé (`ode` en Scilab, `ode45` en Matlab).