TD 6 – Régularisation de Tikhonov

11 décembre 2003

Ex. 1 : Régularisation de Tikhonov en dimension finie

1.1 - Déterminer la décomposition en valeurs singulières de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où ε désigne un réel strictement compris entre 0 et $\sqrt{2}$.

1.2 - Soit $\alpha > 0$. Déduire l'expression des $X \in \mathbf{R}^3$ minimisant $\|A^*X - E\|^2 + \alpha\|X\|^2$ sur $\mathbf{R}^3$ avec $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.3 - Que peut-on dire sur la stabilité de ce calcul lorsque $\varepsilon \to 0$?

1.4 - On pose $E^\delta = \begin{pmatrix} 1+\delta \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $X^\delta \in \mathbf{R}^3$ minimisant $\|A^*X - E^\delta\|^2 + \alpha(\delta)\|X\|^2$ sur $\mathbf{R}^3$ où $\alpha(\delta)$ est déterminé par le critère de sélection de Morozov.

1.5 - Vérifier que $X^\delta \to X$ lorsque $\delta \to 0$, où X est solution de $A^*X = E$.

Ex. 2 : Régularisation de Tikhonov et équation intégrale

On considère l'opérateur intégral A de $L^2(0,1)$ dans lui même défini par

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(s)\, ds \tag{1}$$

2.1 - Donner l'expression de $(A^*y)(t)$.

Soit $y \in L^2(0,1)$ et x_α solution de

$$\min \left(\|Ax - y\|^2_{L^2} + \alpha \|x\|^2_{L^2} \right)$$

où $\alpha > 0$ est un réel donné.

2.2 - Montrer que si $y \in H^1(0,1)$ vérifiant $y(0) = 0$ alors x_α est solution de

$$(2) \qquad \begin{cases} -\alpha x''_\alpha(t) + x_\alpha(t) = y'(t) \; ; \; 0 < t < 1 \\ x(1) = 0 \text{ et } x'(0) = 0. \end{cases}$$

2.3 - Montrer (en utilisant les résultats du cours) que $\|x_\alpha - y'\|_{L^2} \to 0$ lorsque $\alpha \to 0$.