TD 5 – Régularisation de problèmes mal posés

13 novembre 2003

1 Régularisation par troncature spectrale

Soit $A : E \longrightarrow F$ un opérateur compact et injectif. On note $\{\sigma_n, e_n, f_n\}_{n\geq 1}$ un développement en valeurs singulières de l'opérateur A.

1 Montrer que la famille d'opérateurs $R_\alpha : F \longrightarrow E$, $\alpha > 0$ définis par

$$R_\alpha y = \sum_{\sigma_n^2 \geq \alpha} \frac{1}{\sigma_n}(y, f_n)\, e_n \tag{1}$$

pour tout $y \in F$, définit une stratégie de régularisation de A associée au filtre régularisant $q : \mathbf{R}_+^* \times (0, \sigma_1] \to \mathbf{R}$ défini par

$$q(\alpha, \sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma^2 \geq \alpha, \\ 0, & \sigma^2 < \alpha. \end{cases} \tag{2}$$

Soit x solution de $Ax = y$ pour un certain $y \in \mathrm{Im}A$ et soit $y^\delta \in F$ tels que $\|y^\delta - y\|_F \leq \delta$. On pose $x^{\alpha,\delta} = R^\alpha y^\delta$.

2 On choisit $\alpha = \alpha(\delta) = c\,\delta^\theta$ où c désigne une constante strictement positive et $\theta \in]0, 2[$. Montrer que

$$\|x^{\alpha(\delta),\delta} - x\|_E \to 0 \text{ lorsque } \delta \to 0.$$

3 Vérifier que $|q(\alpha, \sigma) - 1| \leq \sqrt{\alpha}/\sigma$. En supposant que $x = A^* z$ pour un certain $z \in F$, déduire la valeur de θ qui assure une convergence optimale de $x^{\alpha(\delta),\delta}$ vers x lorsque $\delta \to 0$ (vérifier que la convergence est en $O(\sqrt{\delta})$).

4 Vérifier que $|q(\alpha, \sigma) - 1| \leq \alpha/\sigma^2$. En supposant que $x = A^* A z$ pour un certain $z \in E$, déduire la valeur de θ qui assure une convergence optimale de $x^{\alpha(\delta),\delta}$ vers x lorsque $\delta \to 0$ (vérifier que la convergence est en $O(\delta^{2/3})$)).