TD 4 – Développement en valeurs singulières des opérateurs compacts

22 octobre 2003

Ex. 1 : Opérateur de Poisson (suite)

Soit A l'opérateur intégral sur $L^2(-\pi, \pi)$ défini par

$$Au(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t-s) + r^2}\, u(s)\, ds$$

où $r < 1$ est un paramètre fixé. Nous rappelons (voir exercice 1 du TD. 2) que A est un opérateur compact de $L^2(-\pi, \pi)$ dans lui-même.

1.1 - Déterminer l'adjoint de A.

Nous rappelons que le noyau de cet opérateur admet le développement en série suivant :

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t-s) + r^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in(t-s)} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-in(t-s)}. \tag{1}$$

1.2 - Déduire que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t-s) + r^2} \cos(ns)\, ds &= \; r^n \cos(nt) \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t-s) + r^2} \sin(ns)\, ds &= \; r^n \sin(nt) \end{aligned}$$

1.3 - On rappelle que les fonctions $(\cos(nt), \sin(nt))$, $n \in \mathbf{N}$ forment une base hilbertienne de $L^2(-\pi, \pi)$. Déterminer alors les valeurs singulières et les vecteurs singuliers de A.

Ex. 2 : Équation de la chaleur rétrograde

On considère l'équation de la chaleur sur un intervalle borné (pris égal à $]0, \pi[$ en espace pour simplifier, et à $]0, T[$ en temps) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & 0 < x < \pi,\ 0 < t < T \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & 0 < t < T \\ u(x,0) = u_0(x), & 0 < x < \pi \end{cases} \tag{2}$$

Le problème inverse consiste à retrouver la *condition initiale* u_0 étant donné une mesure de la solution à l'instant final $u_T(x) = u(x,T)$.

On notera A l'opérateur (linéaire) de $L^2(0,\pi)$ dans $L^2(0,\pi)$ défini par : $u_T = Au_0$.

2.1 - Résoudre l'équation en cherchant u sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) u_n(x) \tag{3}$$

En notant c_n les coefficients de Fourier de la condition initiale u_0, donner l'équation différentielle ordinaire vérifiée par la fonction a_n. Préciser la condition initiale et résoudre cette équation.

2.2 - En déduire une représentation de u_T par un développement en série :

$$u_T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(T) u_n(x). \tag{4}$$

Obtenir également une représentation intégrale de la solution :

$$u_T(x) = \int_0^{\pi} K(x,y) u_0(y)\, dy.$$

Donner l'expression du noyau K (sous forme de développement en série).

2.3 - Déduire de la question précédente le développement en valeurs singulières de A. Donner l'expression des valeurs singulières et des fonctions singulières. Conclure que l'opérateur A est autoadjoint.

2.4 - On note f_n les coefficients de Fourier de la condition finale u_T. Écrire la condition de Picard explicitant ce que doivent vérifier ces coefficients pour que cette fonction soit dans l'image de A.

2.5 - On suppose que le n$^{\mathrm{e}}$ coefficient de u_T est connu avec une erreur relative δ. Quelle est l'erreur relative sur la norme de la solution u_0 (noter $\tilde{u}_0$ la solution ¡¡ perturbée ¿¿) ?

Application numérique : On prend $T = 1$, et l'on suppose que $u_T = u_5$. Combien doit valoir δ pour que l'erreur relative sur u_0 soit inférieure à 100% ?