TD 3 – Décomposition en valeurs singulières des matrices

30 septembre 2004

Ex. 1 : Propriétés de la SVD

Soit $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, et soit $A = U \begin{pmatrix} \Sigma \\ 0 \end{pmatrix} V^t$ sa décomposition en valeurs singulières, avec $U \in R^{m\times m}$ et $V \in R^{n\times n}$ deux matrices orthonormales et $\sum = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ où $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$.

1.1 - On note $U = (u_1, \dots, u_m), V = (v_1, \dots, v_n)$ les colonnes de U et V. Vérifier que

1. $A = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \sigma_j u_j v_j^t$;
2. $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{vect}(v_{r+1}, \dots, v_n)$;
3. $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{vect}(u_1, \dots, u_r)$, et donc Rang $(A) = r$;
4. $\sigma_1 = \displaystyle\sup_{\substack{x\in(\mathrm{Ker}\, A)^\perp \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|_2$ et $\sigma_r = \displaystyle\inf_{\substack{x\in(\mathrm{Ker}\, A)^\perp \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

1.2 - Pour $k \leq r$, on pose $A_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \sigma_j u_j v_j^t$. Montrer que

$$\inf_{\substack{B\in R^{m\times n} \\ \mathrm{rang}(B)\leq k}} \|A - B\|_2 = \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$$

(où $\sigma_{r+1} = 0$ par convention).

Ex. 2 : Valeurs singulières de matrices

Déterminer la décomposition en valeurs singulières des matrices suivantes (à la main, donner un résultat exact).

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(d)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donner le détail des calculs, ou des raisonnement qui permettent de les éviter.

Ex. 3 : Valeurs singulières et valeurs propres

Soit $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ une matrice. Notons $A = U\Sigma V^t$ sa SVD, avec $\Sigma = \operatorname{diag}(\Sigma_1, 0)$, $\Sigma_1 \in \mathbf{R}^{r\times r}$, et

$$U = (U_1, U_2), U_1 \in \mathbf{R}^{m\times r}, \quad V = (V_1, V_2), V_1 \in \mathbf{R}^{n\times r}$$

3.1 - Montrer que

$$B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^t & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^t$$

avec

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} U_1 & U_1 & \sqrt{2}U_2 & 0 \\ V_1 & -V_1 & 0 & \sqrt{2}V_2 \end{pmatrix}$$

3.2 - On suppose que A est de rang n. On considère la matrice ¡¡ augmentée ¿¿

$$C = \begin{pmatrix} I & A \\ A^t & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les *valeurs propres* de C en fonction des *valeurs singulières* de A.