TD 2 – Equations Intégrales et problèmes de moindres carrés

24 septembre 2004

Ex. 1 : Opérateur de Poisson

Soit D le disque unité de $\mathbf{R}^2$; $D = \{x \in \mathbf{R}^2 \ : \ |x| < 1\}$ et considérons u la solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } D \\ u(\cos(t), \sin(t)) = \varphi(t); & -\pi \leq t \leq \pi \end{cases}$$

où $\varphi \in L^2(-\pi, \pi)$. Cette solution est donnée par la formule de Poisson

$$u(r\cos(t), r\sin(t)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t - s) + r^2}\, \varphi(s)\, ds \tag{1}$$

où $0 \leq r < 1$ et $-\pi \leq t \leq \pi$.

On s'intéresse au problème inverse consistant à déterminer φ à partir de la connaissance de $f(t) = u(r_0 \cos(t), r_0 \sin(t))$ pour un r_0 fixé.

On note A l'opérateur qui à φ associe f.

1. Montrer que
$$\left| \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t - s) + r^2} \right| \leq \frac{1 + r}{1 - r}$$
2. Déduire que A est un opérateur compact de $L^2(-\pi, \pi)$ dans lui-même. Que peut-on conclure sur le problème inverse ci-dessus mentionné ?
3. Vérifier (rapidement) le développement en série :
$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-int} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t) + r^2}. \tag{2}$$
4. Déduire la valeur de Ac_n où $c_n(t) := cos(nt)$ et redémontrer directement le caractère mal posé du problème inverse.

Ex. 2 : Régression Linéaire

Nous cherchons à faire passer une droite $y(t) = \alpha + \beta\, t$ par un ensemble de points expérimentaux (t_i, y_i), $i = 1, \cdots, m$.

1. Formuler le problème à l'aide d'un système matriciel.
2. En quoi ce problème est mal posé ?
3. Formuler le problème de moindres carrés qui lui est associé.
4. Calculer la solution du problème et vérifier que la droite obtenue passe bien par la moyenne arithmétique des points de mesures.