TD 1 – Exemples de problèmes inverses

23 septembre 2004

Ex. 1 : Un exemple pour démarrer...

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et le vecteur $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ avec $b_1 \geq b_2 \geq b_3$.

1.1 - Pourquoi le problème $Ax = b$, $x \in \mathbf{R}$ est-il mal posé ?

Soit $p \in [1, +\infty]$. Nous remplaçons le problème $Ax = b$ par la recherche de

$$\min_{x \in \mathbf{R}} \|Ax - b\|_p^p \tag{1}$$

1.2 - Calculer la solution x pour $p = 1, 2, \infty$.

1.3 - Que se passe-t-il si $b_1 \to +\infty$? Quelle est alors la norme la plus robuste vis à vis des points aberrants ?

Ex. 2 : Problèmes inverses pour une équation elliptique

Nous considérons l'équation elliptique 1D suivante :

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du(x)}{dx}\right) = 0 \text{ dans }]0,1[, \tag{2}$$

avec les conditions aux limites

$$u(0) = 0,\ u(1) = 1,$$

et l'on suppose que l'on mesure l'état u *partout* dans $]0,1[$. On suppose également que $a \in C(0,1)$, $a(x) \geq 1$ pour tout x et $a(0) = 1$.

2.1 - Vérifier la continuité de l'application qui au paramètre a associe u.

2.2 - Soit $u_k(x) = x + \dfrac{1}{(2k+1)\pi}\sin(2k\pi x)$. Déterminer la valeur du paramètre a_k correspondant. Vérifier que l'on a bien $a_k(x) \geq 1$ et que la suite (a_k) ne converge *pas* dans $C(0,1)$.

2.3 - Que peut-on déduire sur le problème qui consiste à déterminer a à partir de u ?

Ex. 3 : La différentiation comme problème inverse

Calculer la dérivée d'une fonction revient à inverser l'opérateur intégral sur $L^2(0,1)$

$$(Au)(x) = \int_0^x u(t)\,dt \tag{3}$$

3.1 - Montrer que A est bien un opérateur intégral sur $L^2(0,1)$ et déterminer son noyau.

3.2 - Determiner $\operatorname{Ker} A$, montrer que $\operatorname{Im} A = V = \{u \in H^1(0,1),\ u(0) = 0\}$.

3.3 - Vérifier que $\operatorname{Im} A$ n'est pas un sous-espace fermé de $L^2(0,1)$. Qu'en résulte-t-il pour la continuité de $A^{-1} : V \to L^2(0,1)$?

Ex. 4 : Discrétisation d'une équation intégrale

On reprend l'opérateur intégral A de l'Exercice 3 :

$$Au(t) = \int_0^t u(s)\,ds,$$

et l'on considère l'équation intégrale (de Volterra de première espèce) :

$$Au = f, \quad \text{sur } [0,1].$$

On discrétise l'équation par la méthode de quadrature–collocation, en utilisant la formule des rectangles (on pose $s_{j-1/2} = h(j-1/2),\ j = 1,\dots,n$) :

$$\int_0^1 \phi(s)\,ds = h\sum_{j=1}^n \phi(s_{j-1/2}),$$

4.1 - Former la matrice du système d'équations correspondant.

4.2 - Résoudre explicitement ce système. Comment s'interprète la formule obtenue ?