Examen du cours AMS-X01 ”Homogénéisation périodique”
Jeudi 23 novembre 2023 (3 h)

Important : La notation des copies prendra en compte la clarté et la qualité de la rédaction. Les notes de cours sont autorisées.

Préliminaires et notations

Dans ce sujet, on étudie l'homogénéisation des équations de Maxwell en régime harmonique. Dans la suite, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, dont la frontière $\partial\Omega$ est "régulière". On note $\boldsymbol{n}$ la normale unitaire extérieure à la frontière, δ un petit paramètre qui correspond à la périodicité des coefficients et $Y = (0,1)^3$ est la cellule unité. Comme d'habitude, l'indice # désigne un espace de fonctions périodiques. Dans tout le problème, C désigne une constante qui ne dépend pas de δ.

On considère le système des équations de Maxwell en régime harmonique :

$$-\imath\omega\,\epsilon\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\delta}\right)\boldsymbol{E}_\delta - \mathbf{rot}\,\boldsymbol{H}_\delta = -\boldsymbol{J}$$

Trouver $\boldsymbol{E}_\delta, \boldsymbol{H}_\delta$ tels que

$$-\imath\omega\,\epsilon\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\delta}\right)\boldsymbol{E}_\delta - \mathbf{rot}\,\boldsymbol{H}_\delta = -\boldsymbol{J} \qquad \text{dans } \Omega \tag{1}$$

$$-\imath\omega\,\mu\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\delta}\right)\boldsymbol{H}_\delta + \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}_\delta = 0 \qquad \text{dans } \Omega \tag{2}$$

$$\boldsymbol{E}_\delta \times \boldsymbol{n} = 0, \quad \boldsymbol{H}_\delta \cdot \boldsymbol{n} = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega\,. \tag{3}$$

où $\imath^2 = -1$, $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} := \nabla \times \boldsymbol{v}$ et où on suppose que $\omega \in \mathbb{R}^+$. Ci-dessus, $(\boldsymbol{E}_\delta, \boldsymbol{H}_\delta)$ est le champ électromagnétique, $\boldsymbol{J} \in L^2(\Omega)^3$ la densité de courant est une donnée. La permittivité électrique $\epsilon(\boldsymbol{y})$ et la perméabilité magnétique $\mu(\boldsymbol{y})$ sont des fonctions scalaires de $L^\infty_\#(Y)$, bornés inférieurement par une constante strictement positive. Les champs $\boldsymbol{E}_\delta$ et $\boldsymbol{H}_\delta$ sont à valeurs complexes.

Dans le système de Maxwell, on peut par exemple éliminer $\boldsymbol{H}_\delta$ et obtenir une équation pour le champ électrique $\boldsymbol{E}_\delta$ seulement

Trouver $\boldsymbol{E}_\delta$ tel que

$$\mathbf{rot}\left(\mu^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\delta}\right)\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}_\delta\right) - \omega^2\,\epsilon\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\delta}\right)\boldsymbol{E}_\delta = \imath\omega\boldsymbol{J} \qquad \text{dans } \Omega\,, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{E}_\delta \times \boldsymbol{n} = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega\,. \tag{5}$$

Les fonctions $\boldsymbol{E}_\delta$ et $\boldsymbol{H}_\delta$ sont à valeurs complexes. On introduit les espaces fonctionnels suivants *à valeurs complexes* :

$$
\begin{aligned}
&L^2(\Omega) = \{v \text{ mesurable tel que } \int_\Omega |v|^2 \, d\Omega < +\infty\} \\
&\mathbf{H}(\mathbf{rot}\,, \Omega) = \{\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^3 \text{ tel que } \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^3\}, \\
&\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}\,, \Omega) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}\,, \Omega) \text{ tel que } \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}\big|_{\partial\Omega} = 0\}. \\
&\mathbf{H}_\#(\mathbf{rot}\,, Y) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}\,, Y) \text{ tel que } \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{e}_i\big|_{y_i=1} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{e}_i\big|_{y_i=0}, \forall i \in \{1,2,3\}\}
\end{aligned}
$$

On rappelle que $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire (sesquilinéaire)

$$(u, v)_{L^2} := \int_\Omega u \, \overline{v} \, d\Omega$$

est un espace de Hilbert. On admet dans la suite que $\mathbf{H}(\mathbf{rot}\,, \Omega)$, $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}\,, \Omega)$, $\mathbf{H}_\#(\mathbf{rot}\,, Y)$ munis de la norme $[\| \cdot \|_{L^2}^2 + \|\mathbf{rot}\, \cdot \|_{L^2}^2]^{1/2}$ sont des espaces de Hilbert.
On rappelle enfin que $\mathrm{div}(\mathbf{rot}\,(\boldsymbol{E})) = 0$ et $\mathbf{rot}\,(\nabla\phi) = 0$ pour tout champ vectoriel $\boldsymbol{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}\,, \Omega)$ et scalaire $\phi \in H^1(\Omega)$, ainsi que les formules de Stokes (simplifiées parce qu'il n'y a pas de terme de bord),

$$\forall (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}\,, \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}\,, \Omega), \quad \int_\Omega (\boldsymbol{u} \cdot \mathbf{rot}\, \overline{\boldsymbol{v}} - \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u} \cdot \overline{\boldsymbol{v}}) \, d\Omega = 0. \tag{6}$$

$$\forall (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathbf{H}_\#(\mathbf{rot}\,, Y) \times \mathbf{H}_\#(\mathbf{rot}\,, Y), \quad \int_Y (\boldsymbol{u} \cdot \mathbf{rot}\, \overline{\boldsymbol{v}} - \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u} \cdot \overline{\boldsymbol{v}}) \, dY = 0. \tag{7}$$

Partie 1 : Résultats préliminaires

Question 1. Ecrire la formulation variationnelle associée au problème (4-5).

On admet dans la suite que le problème (4-5) est bien posé et qu'il existe une constante C indépendante de δ telle que

$$\|\boldsymbol{E}_\delta\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}\,, \Omega)} \leq C \|\boldsymbol{J}\|_{L^2(\Omega)^3}.$$

Question 2. Soit $\boldsymbol{u}$ un champ de vecteurs de $H^1_\#(Y)^3$. Montrer que

$$\int_Y \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) \, d\boldsymbol{y} = 0\,.$$

Question 3. Soit $\boldsymbol{u} \in L^2(Y)^3$ un champ de vecteurs suffisamment régulier à rotationnel nul. On admet qu'il existe un potentiel scalaire $\varphi \in H^1(Y)$ tel que $\boldsymbol{u} = \nabla\varphi$. Montrer que

$$\boldsymbol{u} \text{ est } Y\text{-périodique et } \int_Y \boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) \, d\boldsymbol{y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \text{ est } Y\text{-périodique.}$$

On pourra utiliser les fonctions $\psi_i : \boldsymbol{y} \mapsto \varphi(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{e}_i) - \varphi(\boldsymbol{y})$.

Partie 2 : Développement asymptotique formel

Question 4. On applique la méthode formelle des développements à deux échelles pour trouver le problème homogénéisé pour (4-5). On suppose donc que l'on peut écrire $\boldsymbol{E}_\delta$ comme une série

$$\boldsymbol{E}_\delta(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta^k \boldsymbol{E}_k(\boldsymbol{x}, \frac{\boldsymbol{x}}{\delta}) \tag{8}$$

où les fonctions $\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{E}_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ sont Y-périodiques. Ecrire les équations satisfaites par $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{E}_1$, et $\boldsymbol{E}_2$ dans la cellule Y.

Question 5. Montrer que

$$\mathbf{rot}_{\,y}\, \boldsymbol{E}_0 = 0\,.$$

Expliquer la différence avec le cas scalaire vu en cours.

On note dans la suite

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \boldsymbol{E}_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \widehat{\boldsymbol{E}}_k(\boldsymbol{x}) + \widetilde{\boldsymbol{E}}_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \text{ avec } \widehat{\boldsymbol{E}}_k(\boldsymbol{x}) = \int_Y \boldsymbol{E}_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$$

On a donc en particulier que $\boldsymbol{y} \mapsto \widetilde{\boldsymbol{E}}_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ est périodique et $\displaystyle\int_Y \widetilde{\boldsymbol{E}}_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} = 0$.

Question 6. En utilisant la question 3., montrer qu'il existe un potentiel scalaire $\varphi_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ $Y-$périodique et à moyenne nulle tel que

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \nabla_y \varphi_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Question 7. En prenant la divergence par rapport à $\boldsymbol{y}$ de l'équation vérifiée par $\boldsymbol{E}_2$ et en utilisant l'équation vérifiée par $\boldsymbol{E}_1$, montrer que

$$\mathrm{div}_y(\epsilon(\boldsymbol{y})\, \boldsymbol{E}_0) = 0\,.$$

Indication : on pourra utiliser après l'avoir vérifié que pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathcal{D}'(\Omega \times Y)$, $\mathrm{div}_y \mathbf{rot}_{\,x} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\mathrm{div}_x \mathbf{rot}_{\,y} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Question 8. **8.a.** En déduire que le potentiel φ_0 s'écrit

$$\varphi_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{y}) \cdot \widehat{\boldsymbol{E}}_0(\boldsymbol{x})$$

où $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{y}) = (w_1(\boldsymbol{y}), w_2(\boldsymbol{y}), w_3(\boldsymbol{y}))$ et les fonctions $w_i(\boldsymbol{y})$ sont solutions de problèmes de cellule que l'on explicitera.
8.b. Rappeler le cadre fonctionnel et les raisons pour lesquelles ces problèmes de cellule sont bien posés.

Question 9. On note

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}) = \int_Y \mu^{-1}(\mathbf{rot}_{\,y} \boldsymbol{E}_1 + \mathbf{rot}_{\,x} \boldsymbol{E}_0)\, d\boldsymbol{y}\,.$$

En utilisant la question 3. et l'équation vérifiée par $\boldsymbol{E}_1$ obtenue à la question 4, montrer qu'il existe un potentiel $\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ $Y-$périodique et à moyenne nulle tel que

$$\nabla_y \psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mu^{-1}(\mathbf{rot}_{\,y} \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \mathbf{rot}_{\,x} \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) - \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}).$$

Question 10. Montrer que

$$\mathrm{div}_y(\mathbf{rot}_y\boldsymbol{E}_1 + \mathbf{rot}_x\boldsymbol{E}_0) = 0\,.$$

Question 11. En déduire que le potentiel ψ s'écrit

$$\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x})$$

où $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{y}) = (z_1(\boldsymbol{y}), z_2(\boldsymbol{y}), z_3(\boldsymbol{y}))$ et les fonctions z_i sont solutions de problèmes de cellule que l'on explicitera.

Question 12. En utilisant la question 2. et les 3 questions précédentes, montrer que

$$\mathbf{rot}_x\widehat{\boldsymbol{E}}_0 = \int_Y \mathbf{rot}_x\boldsymbol{E}_0\,d\boldsymbol{y} = \mu_{\text{eff}}\,\boldsymbol{M}$$

où μ_{eff} est une matrice effective que l'on explicitera.

Question 13. En prenant la moyenne sur Y de l'équation vérifiée par $\boldsymbol{E}_2$ et en utilisant la question 2., donner l'équation vérifiée par $\widehat{\boldsymbol{E}}_0$. On admettra que le problème homogénéisé est bien posé.

Partie 3 : convergence double-échelle

On pourra utiliser dans cette partie la décomposition orthogonale de Helmholtz suivante

$$L^2(Y) = \{\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}_\#(\mathbf{rot}\,,\Omega),\ \mathbf{rot}_y\boldsymbol{v} = 0\} \overset{\perp}{\oplus} \{\boldsymbol{v}\in L^2(Y)^3,\ \exists\boldsymbol{W}\in H^1_\#(Y)^3, \boldsymbol{v} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{W}\}$$

et l'identification (liée au résultat de la question 3)

$$\{\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}_\#(\mathbf{rot}\,,\Omega),\ \mathbf{rot}_y\boldsymbol{v} = 0,\ \int_Y \boldsymbol{v} = 0\} = \{\nabla_y\varphi,\ \varphi\in H^1_\#(\Omega)\}$$

Question 14. Soit $(\boldsymbol{e}_\delta)_\delta$ une famille uniformément bornée de $\mathbf{H}(\mathbf{rot}\,,\Omega)$.

14.a. Montrer qu'il existe $\boldsymbol{e}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in L^2(\Omega\times Y)$ et $\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in L^2(\Omega, H^1_\#(Y)^3)$ tels que (à extraction près d'une sous-suite toujours notée $(\boldsymbol{e}_\delta)_\delta$) on ait

$$\boldsymbol{e}_\delta \twoheadrightarrow \boldsymbol{e}_0 \text{ deux échelles, et } \mathbf{rot}\,\boldsymbol{e}_\delta \twoheadrightarrow \mathbf{rot}_x\boldsymbol{e}_0 + \mathbf{rot}_y\boldsymbol{e}_1 \text{ deux échelles.}$$

14.b. Montrer qu'il existe $\boldsymbol{e}_{\text{eff}} \in L^2(\Omega)$ et il existe $\varphi \in L^2(\Omega, H^1_\#(Y))$ tels que $\boldsymbol{e}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{e}_{\text{eff}}(\boldsymbol{x}) + \nabla_y\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ pour tout $\boldsymbol{x}\in\Omega$ et tout $\boldsymbol{y}\in Y$.

Question 15. On va démontrer que $(\boldsymbol{E}_\delta)_\delta$ converge deux-échelles vers $\boldsymbol{E}_0 = \widehat{\boldsymbol{E}}_0 + \nabla_y \varphi_0$ où φ_0 est donnée à la question 8 et $\widehat{\boldsymbol{E}}_0$ est solution du problème homogénéisé précédemment établi lorsque δ tend vers 0.

15.a. Montrer qu'il existe $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in L^2(\Omega \times Y)$ et $\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in L^2(\Omega, H^1_\#(Y)^3)$ tels que (à extraction près d'une sous-suite toujours notée $(\boldsymbol{E}_\delta)_\delta$) on ait

$$\boldsymbol{E}_\delta \twoheadrightarrow \boldsymbol{E}_0 \text{ deux échelles, et } \mathbf{rot}\, \boldsymbol{E}_\delta \twoheadrightarrow \mathbf{rot}_x \boldsymbol{E}_0 + \mathbf{rot}_y \boldsymbol{E}_1 \text{ deux échelles};$$

et qu' il existe $\widehat{\boldsymbol{E}}_0 \in L^2(\Omega)$ et il existe $\varphi_0 \in L^2(\Omega, H^1_\#(Y))$ tels que $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \widehat{\boldsymbol{E}}_0(\boldsymbol{x}) + \nabla_y \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \Omega$ et tout $\boldsymbol{y} \in Y$.

15.b. En prenant dans la formulation variationnelle obtenue à la question 1, une fonction test qui vaut $\delta \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \frac{\boldsymbol{x}}{\delta})$, montrer que

$$\int_{\Omega \times Y} \mu^{-1} (\mathbf{rot}_x \boldsymbol{E}_0 + \mathbf{rot}_y \boldsymbol{E}_1) \cdot [\mathbf{rot}_y \overline{\boldsymbol{v}}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{y} = 0.$$

15.c. Qu'en déduisez vous quand $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \rho(\boldsymbol{x})\Phi(\boldsymbol{y})$ avec $\rho \in C_0^\infty(\Omega)^3$ et $\Phi \in H^1_\#(Y)^3$? Retrouver les résultats des questions 9 et 11.

15.d. Montrer que quand $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{y})$ avec $\boldsymbol{W} \in C_0^\infty(\Omega)^3$ et $\phi \in H^1_\#(Y)$, on obtient

$$\int_Y \mu^{-1} (\mathbf{rot}_x \boldsymbol{E}_0 + \mathbf{rot}_y \boldsymbol{E}_1) \times \nabla_y \overline{\phi}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} = 0 \quad (*)$$

15.e. En prenant maintenant dans la formulation variationnelle $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \frac{\boldsymbol{x}}{\delta}) = \rho(\boldsymbol{x}) \nabla_y \phi\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\delta}\right)$ avec $\rho \in C_0^\infty(\Omega)$ et $\phi \in H^1_\#(Y)$, retrouver le résultat de la question 8.

15.f. Retrouver enfin l'équation homogénéisée en choisissant bien la fonction test.

Question 16. Quels résultats peut on obtenir pour le champ magnétique $\boldsymbol{H}_\delta$?

Question 17. Commenter le résultat en mettant en évidence les différences avec le cas scalaire vu en cours.