MASTER M2 AMS
UNIVERSITE PARIS-SACLAY
Cours AMS-X01 de F. Alouges et Sonia Fliss, "Homogńéisation périodique"
Jeudi 17 novembre 2022 9h-12h

Important: La notation des copies prendra en compte la clarté et la qualité de la rédaction. Les notes de cours sont autorisées.

Comme d'habitude l'indice # indique un espace de fonctions périodiques. Dans tout le problème, C désigne une constante qui ne dépend pas de ϵ.

Le but de ce problème est d'étudier l'influence d'un terme d'ordre 0 dans le processus d'homogénéisation d'une équation de diffusion. Un tel terme d'ordre 0 modélise une réaction ou un processus d'absorption. Deux différents scalings sont considérés.

Soit Ω un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^N$ qui représente un milieu périodique. Soit $\epsilon > 0$ un petit paramètre qui définit la périodicité des coefficients. Soit $Y = (0,1)^N$ la cellule unité. Le tenseur de diffusion est $A\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ où p.p. $y \in Y$, $A(y) \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{R}$ est une matrice symétrique, qui dépend périodiquement de la variable $y \in Y$, et telle que $\forall i,j \in \{1,\cdots,N\}$, $A_{ij}(y) \in L^\infty_\#(\mathbb{R}^N)$. On suppose de plus que A est uniformément coercive, c'est-à-dire qu'elle vérifie: $\exists 0 < \alpha \leq \beta$,

$$\alpha|\xi|^2 \leq A(y)\xi\cdot\xi \leq \beta|\xi|^2, \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N, y \in Y.$$

On considère une espèce chimique qui peut réagir avec le milieu par absorption/désorption. Le coefficient de réaction est $c\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ où $c(y) \in L^\infty_\#(\mathbb{R}^N)$ est un coefficient borné et périodique (sans signe spécifique). La concentration de l'espèce est dénotée par $u_\epsilon(t,x)$. La concentration initiale est $u_{in}(x) \in H^1_0(\Omega)$. Le modèle que l'on considère est l'équation d'évolution pour cette concentration:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\epsilon}{\partial t} + \dfrac{1}{\epsilon^\gamma} c\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right) u_\epsilon - \operatorname{div}\left(A\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right)\nabla u_\epsilon\right) = 0 & \text{pour } (x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}^+, \\ u_\epsilon = 0 & \text{pour } (x,t) \in \partial\Omega\times\mathbb{R}^+, \\ u_\epsilon(x,0) = u_{in}(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où $\gamma = 0$ ou 1 est un entier dont les différentes valeurs seront traitées dans les deux différentes parties de ce problème.

Partie I

Dans cette partie (qui est une généralisation directe du cours), on étudie le cas le plus simple, $\gamma = 0$, du modèle (1). On applique la méthode formelle des développements à deux échelles pour trouver le problème homogénéisé pour (1). On suppose donc que l'on peut écrire u_ϵ comme une série

$$u_\epsilon(t,x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i u_i(t,x,\frac{x}{\epsilon}) \tag{2}$$

où les fonctions $y \to u_i(t,x,y)$ sont Y-périodiques.

1. Ecrire les équations satisfaites par u_0, u_1, et u_2 dans la cellule Y.
2. Rappeler sans preuve la condition de compatibilité que doit vérifier le terme source $g(y) \in L^2_\#(Y)$ pour assurer l'existence d'une solution $w \in H^1_\#(Y)$ (définie à une constante additive près) de

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_y\,(A(y)\nabla_y w) = g & \text{dans } Y \\ y \to w(y)\ Y\text{-périodique.} \end{cases} \tag{3}$$

   On rappelle que la deuxième condition signifie que

$$\forall i \in \{1,\cdots,N\},\ w|_{y_i=0} = w|_{y_i=1} \text{ et } (A\nabla w)\cdot e_i|_{y_i=0} = (A\nabla w)\cdot e_i|_{y_i=1}$$

3. Déduire que $u_0(t,x,y)$ de dépend pas de y, et que $u_1(t,x,y)$ peut s'écrire en fonction du gradient de u_0 multiplié par des solutions de problèmes de cellule que l'on explicitera.
4. Ecrire la condition de compatibilité qui assure l'existence de $u_2(t,x,y)$. En déduire l'équation homogénéisée. Que deviennent la condition sur le bord $\partial\Omega$ et la condition initiale ?

Partie II

Dans cette partie, on traite le cas $\gamma = 1$ dans le modèle (1). On fait l'hypothèse supplémentaire

$$\int_Y c(y)\,dy = 0. \tag{4}$$

On utilise de nouveau la méthode formelle du dévelopement à deux échelles, i.e., on suppose que u_ϵ peut s'écrire sous la forme (2).

1. Ecrire les équations satisfaites par u_0, u_1, et u_2.
2. Montrer, sous la condition (4), que $u_0(t,x,y)$ ne dépend pas de y, et que $u_1(t,x,y)$ peut s'écrire comme

$$u_1(t,x,y) = w_0(y)u_0(t,x) + \sum_{k=1}^{N} w_k(y)\frac{\partial u_0}{\partial x_k}(t,x)$$

   où $(w_k)_{1\le k\le N}$ sont les solutions des problèmes de cellule apparaissant dans la partie 1, et w_0 est la solution d'un nouveau problème de cellule que l'on explicitera soigneusement.

3. Discuter l'approximation numérique de w_0 par la méthode des éléments finis P^1 sur la cellule Y. En particulier, si l'on appelle h le pas du maillage sous-jacent de Y, donner les formulations variationnelles exacte et approchée et l'estimation d'erreur entre la solution exacte w_0 et l'approchée $w_{0,h}$ en fonction de h. Pour cette question, on pourra supposer que $A \in \mathcal{C}^\infty(Y)$, de sorte que $w_0 \in H^2_\sharp(Y)$..

4. Donner la condition de compatibilité qui assure l'existence de $u_2(t,x,y)$. Montrer que l'équation homogénéisée est de la forme

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + c^* u_0 + b^* \cdot \nabla_x u_0 - \mathrm{div}_x \left(A^* \nabla_x u_0 \right) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0,T),$$

où l'on précisera c^*, b^* et A^*.

5. En utilisant les problèmes de cellule, montrer que $b^* = 0$ et $c^* \leq 0$ (ce qui montre en particulier qu'il n'y a pas de terme convectif dans l'équation homogénéisée)

6. On s'attache maintenant à la justification rigoureuse du processus d'homogénéisation. Pour simplifier l'analyse, on applique d'abord la transformée de Laplace à (1). Pour un paramètre $p > 0$, on définit

$$\hat{u}_\epsilon(x) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} u_\epsilon(t,x)\, dt,$$

et on suppose que pour p suffisamment grand, la limite lorsque t tend vers $+\infty$ de $e^{-pt}u_\epsilon(t,x)$ est nulle dans $H^1_0(\Omega)$. Montrer formellement que (1) donne

$$\left\{ \begin{array}{ll} p\,\hat{u}_\epsilon + \dfrac{1}{\epsilon} c\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right) \hat{u}_\epsilon - \mathrm{div}\left(A\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right) \nabla \hat{u}_\epsilon \right) = u_{in} & \text{dans } \Omega, \\ \hat{u}_\epsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{5}$$

On va justifier l'homogénéisation de (5) à p fixé, au lieu de celle de (1).

7. Montrer qu'il existe un champ de vecteurs $b(y) \in L^\infty_\#(Y)^N$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mathrm{div}_y b(y) = c(y) & \text{dans } Y \\ y \to b(y) \; Y\text{-périodique.} & \end{array} \right. \tag{6}$$

(Indication: on pourra chercher b sous la forme $b = \nabla_y \phi$.)

8. Montrer que, pour $p > 0$ suffisamment grand, il existe une unique solution de (5) dans $H^1_0(\Omega)$ et que la famille $\hat{u}_\epsilon(x)$ est uniformément bornée par rapport à ϵ dans $H^1_0(\Omega)$.

9. Appliquer la méthode de la convergence à double échelle à (5) et montrer que la famille $\hat{u}_\epsilon$ converge (dans un sens à préciser) vers une limite $\hat{u}_0$ qui est solution du problème homogénéisé

$$\left\{ \begin{array}{ll} p\,\hat{u}_0 + c^* \hat{u}_0 - \mathrm{div}_x \left(A^* \nabla_x \hat{u}_0 \right) = u_{in} & \text{dans } \Omega, \\ \hat{u}_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

avec les mêmes coefficients c^* et A^* qu'à la question II.3.

10. On considère maintenant pour $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\mathcal{E}_\epsilon(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(pu^2(x) + \frac{1}{\epsilon} c\left(\frac{x}{\epsilon}\right) u^2(x) \right) dx + \frac{1}{2}\int_\Omega A\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \nabla u(x) \cdot \nabla u(x)\, dx - \int_\Omega u_{in}(x) u(x)\, dx$$

et

$$\mathcal{E}_0(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (p + c^*)\, u^2(x)\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega A^* \nabla u(x) \cdot \nabla u(x)\, dx - \int_\Omega u_{in}(x) u(x)\, dx.$$

On considère aussi les problèmes de minimisation

$$(P_\epsilon) \quad \min_{u \in H_0^1(\Omega)} \mathcal{E}_\epsilon(u)\,,$$

et

$$(P_0) \quad \min_{u \in H_0^1(\Omega)} \mathcal{E}_0(u)\,.$$

Le but des questions suivantes est de montrer que, pour p suffisamment grand, la famille de problèmes de minimisation $(P_\epsilon)_\epsilon$ $\Gamma-$converge vers P_0 dans $H^1(\Omega)$ pour la convergence faible H^1.

(a) Montrer que si une famille $(u_\epsilon)_\epsilon$ de fonctions de $H_0^1(\Omega)$ est telle que $\mathcal{E}_\epsilon(u_\epsilon) < C$, alors elle est bornée indépendamment de ϵ dans $H^1(\Omega)$, pour p suffisamment grand. (Indication: utiliser $c = -\text{div}\, b$ et intégrer le terme correspondant par parties.)

(b) Soit $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ et $(u_\epsilon)_\epsilon$ une famille d'applications de $H_0^1(\Omega)$ telle que

$$u_\epsilon \rightharpoonup u_0 \text{ faiblement dans } H^1(\Omega)\,.$$

Montrer que

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \mathcal{E}_\epsilon(u_\epsilon) \geq \mathcal{E}_0(u_0).$$

(c) Réciproquement, construire une famille $(v_\epsilon)_\epsilon$ d'applications $H_0^1(\Omega)$ telle que

$$v_\epsilon \rightharpoonup u_0 \text{ faiblement dans } H^1(\Omega)$$

et qui vérifie

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{E}_\epsilon(u_\epsilon) = \mathcal{E}_0(u_0).$$

(d) Conclure.