

## Résolution numérique d'un problème de Poisson avec des éléments finis $P^1$

Les sources matlab doivent être récupérées sur le moodle ou sur le site web du cours  
<https://perso.ensta-paris.fr/~fliss/teaching-an201.html>.

**Nous vous demandons de traiter ce sujet sans aide extérieure pour assimiler les techniques et algorithmes de base.**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné à frontière polygonale de  $\mathbb{R}^2$  et  $f \in L^2(\Omega)$ . On s'intéresse à la résolution numérique du problème de Poisson avec condition aux limites de Neumann :  
*Trouver  $u \in H^1(\Omega)$  telle que*

$$(1) \quad \begin{cases} u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}.$$

Nous avons déjà montré pendant le cours que ce problème est bien posé.

### Discrétisation

Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation du domaine  $\Omega$ , et  $V_h$  l'approximation de  $H^1(\Omega)$  par des éléments finis  $P^1$  associés à la triangulation  $\mathcal{T}_h$ . On note  $(T_\ell)_{\ell=1,L}$  les triangles de  $\mathcal{T}_h$ ,  $(S_I)_{I=1,N}$  les sommets des triangles et  $(\phi_I)_{I=1,N}$  la base de  $V_h$  définie par  $\phi_I(S_J) = \delta_{IJ}$ ,  $1 \leq I, J \leq N$ .

**1.1** - Ecrire la formulation variationnelle discrète vérifiée par la solution approchée  $u_h$  ?

**1.2** - Par construction, la solution approchée s'écrit sous la forme

$$u_h(x, y) = \sum_{I=1}^N u_h(S_I) \phi_I(x, y), \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega}.$$

Exprimer la formulation variationnelle discrète sous la forme d'un système linéaire équivalent :

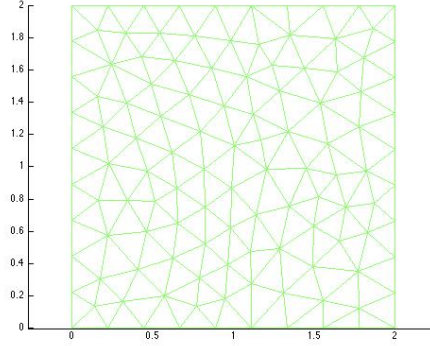
$$(2) \quad (\mathbb{M} + \mathbb{K}) \vec{U} = \vec{L},$$

de solution le vecteur  $\vec{U} \in \mathbb{R}^N$  dont la  $I^{\text{ème}}$  composante vaut  $u_h(S_I)$ . Ci-dessus,  $\mathbb{M}$  est la matrice de masse et  $\mathbb{K}$  est la matrice de rigidité. Quelles sont les propriétés fondamentales des matrices  $\mathbb{M}$  et  $\mathbb{K}$  ?

### Maillages

On veut résoudre le problème dans un ouvert  $\Omega$  qui est un carré.

Pour mailler  $\Omega$ , on choisit le mailleur **Gmsh**. Merci d'utiliser la procédure envoyée précédemment pour créer un maillage.

FIGURE 1 – Domaine  $\Omega$ .

**1.3** - Afficher le maillage précédemment créé à l'aide de la routine `affichemaillage.m`.

**1.4** - Quelle est la signification des structures de données

`Nbpt`, `Nbtri`, `Coorneu`, `Refneu`, `Numtri`, `Reftri`, `Nbaretes`, `Numaretes`, `Refaretes` ?

Les données `Refneu`, `Nbaretes`, `Numaretes`, `Refaretes` ne seront pas utilisées dans ce TP.

### Calcul des Matrices élémentaires

Pour calculer les matrices élémentaires sur un triangle, on peut utiliser les formules ci-dessous. Soit  $T_\ell$  un triangle de sommets  $S_1(x_1, y_1)$ ,  $S_2(x_2, y_2)$ , et  $S_3(x_3, y_3)$ . Les fonctions de base locales sont égales aux coordonnées barycentriques  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ . En un point  $(x, y)$  du triangle, celles-ci sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\lambda_1(x, y) &= \frac{1}{D}(y_{23}(x - x_3) - x_{23}(y - y_3)) \\ \lambda_2(x, y) &= \frac{1}{D}(y_{31}(x - x_1) - x_{31}(y - y_1)) \\ \lambda_3(x, y) &= \frac{1}{D}(y_{12}(x - x_2) - x_{12}(y - y_2))\end{aligned}$$

où  $x_{ij} = x_i - x_j$ ,  $y_{ij} = y_i - y_j$  pour  $i$  et  $j$  différents dans  $\{1, 2, 3\}$ , et  $D = x_{23}y_{31} - x_{31}y_{23}$ . Notons que  $D$  est égal, au signe près, à deux fois la surface du triangle.

Pour  $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{N}^3$ , on a les résultats suivants :

$$\int_{T_\ell} \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \lambda_3^{k_3} d\Omega = 2 \frac{k_1! k_2! k_3!}{(k_1 + k_2 + k_3 + 2)!} \text{aire}(T_\ell).$$

**1.5** - Soit  $T_\ell$  un triangle de sommets  $S_1(x_1, y_1)$ ,  $S_2(x_2, y_2)$  et  $S_3(x_3, y_3)$ . Compléter les routines `matK_elem.m` et `matM_elem.m` qui à partir des coordonnées des 3 sommets d'un

triangle donnent respectivement les matrices élémentaires de rigidité et de masse.

*Il est conseillé de vérifier le calcul des matrices élémentaires en le comparant à un calcul fait à la main pour le triangle de référence (composé des sommets  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  et  $(0,1)$ ).*

### Assemblage des matrices

On rappelle l'algorithme d'assemblage

```

M = 0, K = 0
Pour  $\ell = 1, L$ 
    Détermination des coordonnées des sommets du triangle  $\ell$ 
    Calcul des contributions élémentaires  $M^\ell, K^\ell$ 
    Pour  $i = 1, 3$ 
         $I = \text{local} \rightarrow \text{global}(\ell, i)$ 
        Pour  $j = 1, 3$ 
             $J = \text{local} \rightarrow \text{global}(\ell, j)$ 
             $M_{IJ} = M_{IJ} + M_{ij}^\ell$  et  $K_{IJ} = K_{IJ} + K_{ij}^\ell$ 
        Fin pour  $j$ 
    Fin pour  $i$ 
Fin pour  $\ell$ 

```

**1.6** - Compléter la partie assemblage des matrices  $M$  et  $K$ .

### Calcul du second membre

**1.7** - On suppose dans un premier temps que  $f = 1$ . En remarquant que  $1 \in V_h$ , calculer le vecteur second membre  $\vec{L}$  à partir de la matrice de masse  $M$  et d'un vecteur calculé dans la routine **f.m**.

**1.8** - Rappeler l'expression du second membre  $\vec{L}$  pour une donnée générale  $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ . En approchant la donnée  $f$  par son interpolation  $\pi_h f$  dans la base  $(\phi_I)_{I=1,N}$ , donner une approximation du second membre  $\vec{L}$  faisant intervenir la matrice de masse.

On admettra que quand on remplace  $f$  par son interpolée  $\pi_h f$  de  $V_h$ , l'approximation par des éléments finis  $P^1$  du problème n'est pas altérée.

### Validation

On veut vérifier que le code calcule une solution approchée  $u_h$  correcte. Pour cela, on résout le problème (1) avec une solution  $u$  connue égale à  $u(x, y) = \cos(\pi x) \cos(2\pi y)$ , pour  $(x, y) \in \overline{\Omega}$ .

**1.9** - Calculer la donnée  $f$  correspondante et modifier la routine **f.m**.

**1.10** - En assimilant  $u$  à son interpolée  $\pi_h u$ , donner une estimation de la norme  $L^2$  de l'erreur,  $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ , faisant intervenir la matrice de masse  $\mathbb{M}$ . Comment évolue cette erreur en fonction de  $h$  dans le cas de la première géométrie? On pourra tracer  $\log(1/h) \mapsto \log(\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}/\|u\|_{L^2(\Omega)})$  pour différentes valeurs de  $h$ .

**1.11** - En assimilant  $u$  à son interpolée  $\pi_h u$ , donner une estimation de la semi-norme  $H^1$  de l'erreur,  $|u - u_h|_1 = \|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2(\Omega)^2}$ , faisant intervenir la matrice de rigidité  $\mathbb{K}$ . Comment évolue cette erreur en fonction de  $h$  dans le cas de la première géométrie? On pourra tracer  $\log(1/h) \mapsto \log(|u - u_h|_1/|u|_1)$  pour différentes valeurs de  $h$ .

#### Comment effectuer une étude complète de l'erreur

Tracer un graphe **en échelle log-log** de l'erreur normalisé en norme  $L^2$ , puis en semi-norme  $H^1$ , en fonction du réciproque du pas du maillage  $h$ . Plus précisément :

- En abscisse on a  $\log(1/h)$  et en ordonnée on a  $\log(\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)})/\|u\|_{L^2(\Omega)}$ , puis  $\log(|u - u_h|_{H^1(\Omega)})/|u|_{H^1(\Omega)}$ .
- Choisir au moins 3 ou 4 valeurs différentes de  $h$  :  $h_1 > h_2 > h_3 > h_4$  (souvent on choisit  $h_{i+1} = h_i/2$  pour que les points du graphe soient bien espacés).
- Effectuer une régression linéaire (par exemple par la commande `polyfit` en Matlab/Octave) pour calculer les coefficients de la droite de régression.
- Tracer les courbes d'erreur (mettre bien en évidence les 4 points, comme sur la Figure 2), ainsi que les droites de régression (avec un autre style, par exemple en pointillé comme sur la Figure 2).

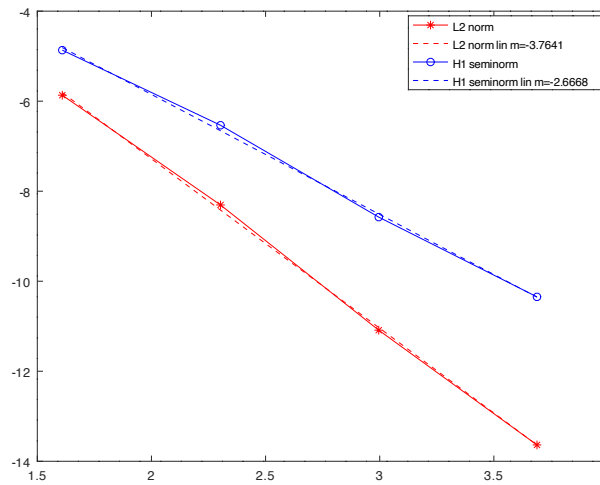


FIGURE 2 – Exemple de graphe de convergence. Attention les ordres de convergence ne sont pas ceux que vous devez obtenir.

**Résolution d'un problème similaire**

Utiliser votre code pour résoudre le problème suivant

Trouver  $u \in H^1(\Omega)$  telle que

$$(3) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} .$$

Que se passe-t-il ? Expliquer.

**Barème**

- **1 point** pour le calcul et l'implémentation des matrices élémentaires
- **1 point** pour l'assemblage, le calcul du second membre et la résolution
- **1 point** pour le calcul des erreurs  $L^2$  et  $H^1$