Séance 4 : Résolution de problèmes variationnels

`Nous vous proposons dans ce TD deux problèmes complets dans lesquels nous appliquons tous les outils et toutes les notions vues dans les 3 premiers cours: les espaces de Sobolev, les formules de Green, l'équivalence entre problemes aux limites et formulation variationnelle, theoreme de Lax Milgram, inégalités de Poincaré,...`

Exercice 1 Quelques inégalités de Poincaré

Question 1. Soit A tel que $0 < A < 1$. Montrer qu'il existe une constante $C_A > 0$ telle que pour tout $v \in H^1(]0,1[)$

$$\|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq C_A \left[\|v'\|_{L^2(]0,1[)} + \|v\|_{L^2(]0,A[)}\right]$$

Quelle est la dépendance de C_A par rapport à A ? Commenter.

Question 2. On considère le domaine $\Omega =]0,1[\times]0,1[$. Déduire de la question précédente qu'il existe une constante qu'on appellera encore C_A telle que pour tout $v \in H^1(\Omega)$

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_A\big(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(]0,A[\times]0,1[)}\big)$$

Exercice 2 Un problème elliptique à coefficients variables

Soient $\Omega =]0,1[\times]0,1[$*,* A *telle que* $0 < A < 1$ *et la fonction* b *définie par*

$$b(x,y) = \begin{cases} b_0 & si\, x < A \\ 0 & si\, x > A \end{cases}$$

où $b_0 > 0$*. Soient* f *une fonction donnée de* $L^2(\Omega)$ *et* g *de* $L^2(\partial\Omega)$*. On s'intéresse au problème suivant :*

Trouver u *dans* $H^1(\Omega)$*, solution de*

$$\left|\begin{aligned} -\Delta u + b(x)u = f, &\quad dans \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, &\quad sur \quad \partial\Omega. \end{aligned}\right. \tag{1}$$

Question 1. Ecrire la formulation variationnelle du problème (1). On appellera a la forme bilinéaire et ℓ la forme linéaire associées.

Question 2. Montrer l'équivalence entre la formulation variationnelle et la formulation forte (1).

Question 3. Démontrer qu'il existe une solution et une seule au problème (1). On appellera dans la suite α la constante de coercivité de la forme bilinéaire a et M la constante de continuité de la forme linéaire ℓ.
Que se passe t-il quand A tend vers 0 ?

Question 4. Redémontrer que la solution dépend continûment des données.

Exercice 3 Équation de plaques

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière suffisamment régulière, $\alpha, \beta > 0$ deux constantes et $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème :

Trouver $u \in H^2(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} \triangle(\triangle u) - \alpha \triangle u + \beta u = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

où on rappelle que

$$H^2(\Omega) := \left\{ u \in H^1(\Omega), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \ \in \ L^2(\Omega) \right\},$$

et que cet espace est muni de la norme :

$$\forall u \in H^2(\Omega), \quad \|u\|_{H^2}^2 := \|u\|_{H^1}^2 + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2 + 2 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right\|_{L^2}^2. \tag{3}$$

On définit le sous-espace $H_0^2(\Omega)$ comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^2(\Omega)$.

Question 1. Montrer que $H_0^2(\Omega)$ muni de la norme H^2 est un espace de Hilbert et qu'il vérifie

$$H_0^2(\Omega) \subset \left\{ u \in H^2(\Omega), \ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{et} \quad \nabla u \cdot \mathbf{n}\big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}. \tag{4}$$

Même si ce n est pas important dans la suite, sachez que l'inclusion (4) *est en fait une égalité.*

Question 2. Montrer que

$$\forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}), \ v \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_\Omega \triangle(\triangle u) v \, d\Omega = \int_\Omega \triangle u \triangle v \, d\Omega.$$

et qu'on peut étendre cette formule de Green pour

$$u \in H^2(\Omega, \triangle^2) := \{ u \in H^2(\Omega) \text{ telle que } \triangle\triangle u \in L^2(\Omega) \} \quad \text{et} \quad v \in H_0^2(\Omega).$$

On admettra que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *est dense dans* $H^2(\Omega, \triangle^2)$.

Question 3. Montrer que si u est solution de (2) alors u vérifie la formulation variationnelle

Trouver $u \in H_0^2(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H_0^2(\Omega), \qquad \int_\Omega (\triangle u \triangle v + \alpha \nabla u \cdot \nabla v + \beta u v) \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega.$$

Question 4. Montrer que cette formulation variationnelle est équivalente à (2).

Question 5. Montrer en raisonnant par densité que

$$\forall u, v \in H_0^2(\Omega), \qquad \int_\Omega \triangle u \triangle v \, d\Omega = \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) d\Omega.$$

Question 6. Montrer que la formulation variationnelle admet une unique solution dans $H_0^2(\Omega)$. Que se passe-t-il pour $\beta = 0$?

Question 7. Expliquer pourquoi on ne peut pas utiliser les éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}^1$ introduits en cours pour résoudre numériquement le problème.
En vous restreignant à la dimension 1, proposer un autre espace de dimension finie.