Corrigé de la Séance 4 : Résolution de problèmes variationnels

Exercice 1 Quelques inégalités de Poincaré

Question 1. Soit A tel que $0 < A < 1$. Montrer qu'il existe une constante $C_A > 0$ telle que pour tout $v \in H^1(]0,1[)$

$$\|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq C_A \left[\|v'\|_{L^2(]0,1[)} + \|v\|_{L^2(]0,A[)}\right]$$

Quelle est la dépendance de C_A par rapport à A ? Commenter.

Corrigé de la question 1. Soit $A \in]0,1[$. Soit $v \in C^\infty([0,1])$, nous avons

$$v(x) = v(Ax) + \int_{Ax}^{x} v'(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \forall x \in [0,1].$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 |v(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} &\leq \left(\int_0^1 |v(Ax)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} + \left(\int_0^1 \left(\int_{Ax}^{x} v'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}, \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\int_0^A |v(y)|^2\,\mathrm{d}y\right)^{1/2} + \left(\int_0^1 |v'(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Nous pouvons donc choisir $C_A = 1/\sqrt{A}$, qui tend vers l'infini quand A tend vers 0.

Il est egalement possible d'écrire pour $v \in C^\infty([0,1])$,

$$v(x) = v(y) + \int_{y}^{x} v'(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \forall x \in [0,1],\ y \in [0,1]$$

de prendre la norme $L^2(]0,A[,dy)$

$$\sqrt{A}v(x) \leq \|v\|_{L^2(]0,A[)} + \left(\int_0^A \left(\int_y^x v'(t)\,dt\right)^2 dy\right)^{1/2}$$

puis la norme $L^2(]0,1[,dx)$ et on retrouve la même inégalité que précédemment.

Pour terminer, il faut raisonner par densité. L'espace $C^\infty([0,1])$ est dense dans $H^1(]0,1[)$ et toutes les applications $\|\cdot\|_{L^2(0,1)}$, $\|\cdot\|_{L^2(0,A)}$ et $|\cdot|_{H^1(0,1)}$ sont continues.

En effet, soit v dans $H^1(]0,1[)$, il existe une suite v_n d'éléments de $C^\infty([0,1])$ (pour lesquels l'inegalité est vraie) qui est telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|v_n - v\|_{H^1} = 0.$$

On a dans ce cas

$$\left|\|v_n'\|_{L^2(]0,1[)} - \|v'\|_{L^2(]0,1[)}\right| \leq \|v_n - v\|_{H^1(]0,1[)},$$

et

$$\Big| \|v_n\|_{L^2(]0,a[)} - \|v\|_{L^2(]0,a[)} \Big| \leq \|v_n - v\|_{L^2(]0,a[)} \leq \|v_n - v\|_{H^1(]0,1[)}$$

pour $a \leq 1$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \Big| \|v_n'\|_{H^1(]0,1[)} - \|v'\|_{L^2(]0,1[)} \Big| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \Big| \|v_n\|_{L^2(]0,a[)} - \|v\|_{L^2(]0,a[)} \Big| = 0.$$

pour $a \leq 1$.

On peut donc passer à la limite dans l'inégalité vraie pour tout pour v_n et on trouve l'inégalité vraie pour $v \in H^1(]0,1[)$.

Question 2. On considère le domaine $\Omega =]0,1[\times]0,1[$. Déduire de la question précédente qu'il existe une constante qu'on appellera encore C_A telle que pour tout $v \in H^1(\Omega)$

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_A\big(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(]0,A[\times]0,1[)}\big)$$

Corrigé de la question 2. Soit $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Soit A tel que $0 < A < 1$. Nous avons pour tout $y \in]0,1[$, en considérant $x \mapsto v(x,y)$

$$\left(\int_0^1 |v(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\int_0^A |v(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} + \left(\int_0^1 |\partial_x v(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2},$$

$$\int_0^1 |v(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x \leq \frac{2}{A}\int_0^A |v(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x + 2\int_0^1 |\partial_x v(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^1\int_0^1 |v(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \frac{2}{A}\int_0^1\int_0^A |v(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 2\int_0^1\int_0^1 |\partial_x v(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$$\left(\int_0^1\int_0^1 |v(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{1/2} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A}}\left(\int_0^1\int_0^A |v(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{1/2} + \sqrt{2}\left(\int_0^1\int_0^1 |\nabla v(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{1/2}.$$

Cela conclut la preuve avec $C_A = \sqrt{2/A}$ en utilisant comme à la question précédente un argument de densité.

Exercice 2 Un problème elliptique à coefficients variables

Soient $\Omega =]0,1[\times]0,1[$, A telle que $0 < A < 1$ et la fonction b définie par

$$b(x,y) = \begin{cases} b_0 & si\ x < A \\ 0 & si\ x > A \end{cases}$$

où $b_0 > 0$. Soient f une fonction donnée de $L^2(\Omega)$ et g de $L^2(\partial\Omega)$. On s'intéresse au problème suivant :

Trouver u dans $H^1(\Omega)$, solution de

$$\left|\begin{aligned} -\Delta u + b(x)u = f, &\quad dans \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, &\quad sur \quad \partial\Omega. \end{aligned}\right. \tag{1}$$

Question 1. Ecrire la formulation variationnelle du problème (1). On appellera a la forme bilinéaire et ℓ la forme linéaire associées.

Corrigé de la question 1. Nous considérons u une solution du problème (1). Comme la fonction b est dans $L^2(\Omega)$, nous avons $\Delta u \in L^2(\Omega)$, et donc $u \in H^1(\Omega, \Delta)$. On peut donc supposer $u \in H^2(\Omega)$ ce qui permet d'appliquer la formule de Green, pour $v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega -\Delta u v \, d\Omega = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} v\big|_{\partial\Omega} \, d\Gamma.$$

Ainsi, la formulation variationnelle est

$$\begin{gathered}\text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ telle que} \\ \forall v \in H^1(\Omega), \quad \textstyle\int_\Omega \left(\nabla u \cdot \nabla v + b\, u\, v\right) \, d\Omega = \int_\Omega f\, v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g\, v\big|_{\partial\Omega} \, d\Gamma.\end{gathered}$$

Nous définissons donc la forme bilinéaire a et la forme linéaire ℓ sur $H^1(\Omega)$ par

$$a(u, v) = \int_\Omega \left(\nabla u \cdot \nabla v + b\, u\, v\right) \, d\Omega, \qquad \ell(v) = \int_\Omega f\, v + \int_{\partial\Omega} g\, v\big|_{\partial\Omega} \, d\Gamma.$$

Question 2. Montrer l'équivalence entre la formulation variationnelle et la formulation forte (1).

Corrigé de la question 2. Nous devons montrer la réciproque. Considérons dans un premier temps une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pour retrouver l'EDP. Nous avons

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, d\Omega = \int_\Omega (f - bu)\varphi \, d\Omega,$$

On a

$$\begin{aligned}\textstyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, d\Omega &= < \nabla u, \nabla \varphi > \quad \text{car } \nabla u \in L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega) \\ &= \sum_{i=1}^{d} < \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} > \\ &= -\sum_{i=1}^{d} < \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \varphi > \quad \text{par def. de la dérivation au sens des distributions} \\ &= - < \triangle u, \varphi >\end{aligned}$$

et comme $f - bu \in L^2(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega (f - bu)\varphi = < f - bu, \varphi > .$$

On en déduit que $-\Delta u = f - bu$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Comme le second membre est dans $L^2(\Omega)$, l'égalité est vraie dans $L^2(\Omega)$ presque partout. Nous en déduisons de plus que $u \in H^1(\Omega, \Delta)$.

Pour la condition aux limites, nous choisissons $v \in H^1(\Omega)$. Comme $u \in H^1(\Omega, \Delta)$, nous pouvons supposer $u \in H^2(\Omega)$. En appliquant la formule de Green, nous obtenons, puisque l'intégrale dans Ω disparait

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} - g \right) v\big|_{\partial\Omega} \, d\Gamma = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Quand v parcourt $H^1(\Omega)$, $v\big|_{\partial\Omega}$ parcourt $\mathrm{Im}\Gamma_0$. On a donc de manière évidente

$$\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} - g\right)\psi\, d\Gamma = 0, \quad \forall\psi \in \mathrm{Im}\gamma_0.$$

Comme $Im(\gamma_0)$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$, nous allons montrer que l'égalité est vraie pour $\psi \in L^2(\partial\Omega)$. Soit $\psi \in L^2(\partial\Omega)$, il existe une suite $(\psi_n)_n$ d'éléments de $Im(\gamma_0)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|\psi - \psi_n\|_{L^2(\partial\Omega)} = 0.$$

On a

$$\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} - g\right)\psi\, d\Gamma = \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} - g\right)\psi_n\, d\Gamma + \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} - g\right)(\psi - \psi_n)\, d\Gamma.$$

Le premier terme à droite de l'égalité est nul puisque $\psi_n \in \mathrm{Im}\Gamma_0$. Quant au deuxième

$$\left|\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} - g\right)(\psi - \psi_n)\, d\Gamma\right| \leq \|\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} - g\|_{L^2(\partial\Omega)}\, \|\psi - \psi_n\|_{L^2(\partial\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui implique que

$$\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} - g\right)\psi\, d\Gamma = 0 \quad \forall\psi \in L^2(\partial\Omega)$$

soit $\partial u/\partial n = g$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et donc presque partout sur $\partial\Omega$.

Question 3. Démontrer qu'il existe une solution et une seule au problème (1). On appellera dans la suite α la constante de coercivité de la forme bilinéaire a et M la constante de continuité de la forme linéaire ℓ.
Que se passe t-il quand A tend vers 0 ?

Corrigé de la question 3. Nous allons appliquer le théorème de Lax-Milgram dans l'espace de Hilbert $H^1(\Omega)$. La forme linéaire ℓ est linéaire continue car l'application γ_0 est linéaire continue :

$$|\ell(v)| \leq \Big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}C_0\Big)\|v\|_{H^1(\Omega)}, \qquad \forall v \in H^1(\Omega),$$

où C_0 est la constante de continuité de l'application trace γ_0. La forme bilinéaire a est continue

$$|a(u,v)| \leq \max(1, b_0)\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall(u,v) \in H^1(\Omega),$$

et coercive grâce à l'inégalité démontrée à l'exercice 1 (dont il faut prendre le carré) :

$$\begin{aligned} a(u,u) &\geq \min(\eta, b_0)\Big(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(]0,A[\times]0,1[)}\Big) + (1-\eta)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}, \\ &\geq \min\big(1-\eta, \tfrac{1}{2C_A^2}\min(\eta, b_0)\big)\|u\|^2_{H^1(\Omega)}, \qquad \forall u \in H^1(\Omega), \end{aligned}$$

pour $0 < \eta < 1$ quelconque . On peut donc appliquer le théorème de Lax Milgram.

Quand A tend vers 0, la constante de coercivité tend vers 0. Le problème tend vers le problème de Neumann, dont on a vu en cours qu'il était mal posé.

Question 4. Redémontrer que la solution dépend continûment des données.

Corrigé de la question 4. La solution $u \in H^1(\Omega)$ vérifie en prenant $v = u$ dans la formulation variationnelle

$$\alpha \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq a(u,u) = l(u) \leq M\|u\|_{H^1(\Omega)},$$

ce qui permet d'obtenir $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq M/\alpha$. Pour conclure, on a la continuité des constantes M et α par rapport aux paramètres f, g, A et b_0 du problème.

Exercice 3 Équation de plaques

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière suffisamment régulière, $\alpha, \beta > 0$ deux constantes et $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème :

Trouver $u \in H^2(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} \triangle(\triangle u) - \alpha \triangle u + \beta u = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

où on rappelle que

$$H^2(\Omega) := \left\{ u \in H^1(\Omega), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \in L^2(\Omega) \right\},$$

et que cet espace est muni de la norme :

$$\forall u \in H^2(\Omega), \quad \|u\|^2_{H^2} := \|u\|^2_{H^1} + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|^2_{L^2} + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\|^2_{L^2} + 2 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right\|^2_{L^2}. \tag{3}$$

On définit le sous-espace $H^2_0(\Omega)$ comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^2(\Omega)$.

Question 1. Montrer que $H^2_0(\Omega)$ muni de la norme H^2 est un espace de Hilbert et qu'il vérifie

$$H^2_0(\Omega) \subset \left\{ u \in H^2(\Omega),\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{et} \quad \nabla u \cdot \mathbf{n}\big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}. \tag{4}$$

Même si il n'est pas demandé de le démontrer, sachez que l'inclusion (4) *est en fait une égalité.*

Corrigé de la question 1. L'espace $H^2_0(\Omega)$ est par définition un sous-espace vectoriel fermé (comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$) de l'espace de Hilbert $H^2(\Omega)$, donc $H^2_0(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Soit $u \in H^2_0(\Omega)$, il existe une suite $u_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\|u - u_n\|_{H^2(\Omega)} \to 0$, quand $n \to +\infty$. En utilisant le premier et le deuxième théorèmes de trace (Amphi 1 et 2), on obtient les estimations suivantes

$$\begin{aligned} \|\gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)} &= \|\gamma_0 u - \gamma_0 u_n\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|u - u_n\|_{H^1(\Omega)} \leq C_0 \|u - u_n\|_{H^2(\Omega)}, \\ \|\gamma_1 u\|_{L^2(\partial\Omega)} &= \|\gamma_1 u - \gamma_1 u_n\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_1 \|u - u_n\|_{H^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

et en prenant la limite quand $n \to +\infty$, cela donne $\gamma_0 u = \gamma_1 u = 0$.

Question 2. Montrer que

$$\forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}),\ v \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \int_\Omega \triangle(\triangle u) v \, d\Omega = \int_\Omega \triangle u \triangle v \, d\Omega.$$

et qu'on peut étendre cette formule de Green pour

$$u \in H^2(\Omega, \triangle^2) := \{u \in H^2(\Omega) \text{ telle que } \triangle\triangle u \in L^2(\Omega)\} \quad \text{et} \quad v \in H_0^2(\Omega).$$

On admettra que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^2(\Omega, \triangle^2)$.

Corrigé de la question 2. Soit $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ et $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, en utilisant deux fois la formule de Green suivante vue en cours

$$\int_\Omega \triangle\varphi \, \psi \, d\Omega + \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} \, \psi \, d\Gamma, \qquad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}),$$

on calcule

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \triangle(\triangle u) v \, d\Omega &= -\int_\Omega \nabla(\triangle u) \cdot \nabla v \, d\Omega + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \nabla\triangle u \cdot \mathbf{n} \, v \, d\Gamma}_{v=0 \text{ sur } \partial\Omega}, \\
&= \int_\Omega \triangle u \triangle v \, d\Omega - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \triangle u \ \nabla v \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma}_{\nabla v \cdot \mathbf{n}=0 \text{ sur } \partial\Omega}, \\
&= \int_\Omega \triangle u \triangle v \, d\Omega,
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.

Pour montrer que la formule s'étend à $u \in H^2(\Omega, \triangle^2)$ et $v \in H_0^2(\Omega)$, on a

$$\forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}),\ v \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \left| \int_\Omega \triangle(\triangle u) v \, d\Omega \right| \underset{C.S.}{\leq} \|\triangle(\triangle u)\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^2(\Omega,\triangle^2)} \|v\|_{H^2}$$

$$\forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}),\ v \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \left| \int_\Omega \triangle u \triangle v \, d\Omega \right| \underset{C.S.}{\leq} \|\triangle u\|_{L^2} \|\triangle v\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^2(\Omega,\triangle^2)} \|v\|_{H^2}$$

D'après le théorème de prolongement par densité du cours, la formule de Green s'étend à $u \in H^2(\Omega, \triangle^2)$ et $v \in H_0^2(\Omega)$.

Question 3. Montrer que si u est solution de (2) alors u vérifie la formulation variationnelle

Trouver $u \in H_0^2(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H_0^2(\Omega), \qquad \int_\Omega (\triangle u \triangle v + \alpha \nabla u \cdot \nabla v + \beta u v) \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega.$$

Corrigé de la question 3. Soit u solution de (2) et soit $v \in H_0^2(\Omega)$, on multiplie l'EDP par v puis on intègre sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega \left(\triangle^2 u\, v - \alpha \triangle u v + \beta u v\right)\, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega.$$

En utilisant la formule de Green avec $u \in H_0^2(\Omega)$ et $v \in H_0^2(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, on a

$$-\int_\Omega \triangle u v \, d\Omega = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega.$$

En utilisant l'EDP, on a que $\triangle^2 u = \alpha \triangle u - \beta u + f \in L^2(\Omega)$, car $u \in H^2(\Omega)$, on peut donc utiliser la question 2, on obtient

$$\int_\Omega \triangle^2 u\, v \, d\Omega = \int_\Omega \triangle u \triangle v \, d\Omega.$$

En combinant les deux précédentes relations, on obtient la formulation variationnelle suivante : trouver $u \in H_0^2(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H_0^2(\Omega), \qquad \int_\Omega \left(\triangle u \triangle v + \alpha \nabla u \cdot \nabla v + \beta u v\right)\, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega.$$

Question 4. Montrer que cette formulation variationnelle est équivalente à (2).

Corrigé de la question 4. Soit $u \in H_0^2(\Omega)$ solution de la formulation variationnelle, d'après la question 1, on a que $u\big|_{\partial\Omega} = 0$ et $\nabla u \cdot \mathbf{n}\big|_{\partial\Omega} = 0$.
Prenons une fonction test $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega \left(\triangle u \triangle \varphi + \alpha \nabla u \cdot \nabla \varphi + (\beta u - f)\varphi\right)\, d\Omega, \\
&= \langle \triangle u, \triangle \varphi \rangle + \langle \alpha \nabla u, \nabla \varphi \rangle + \langle \beta u - f, \varphi \rangle, \quad \text{car } \triangle u,\ \partial_x u,\ \partial_y u \in L^2 \subset \mathcal{D}' \\
&= \left\langle \triangle^2 u, \varphi \right\rangle - \langle \alpha \triangle u, \varphi \rangle + \langle \beta u - f, \varphi \rangle, \quad \text{par def. de la dérivation au sens des distributions} \\
&= \left\langle \triangle^2 u - \alpha \triangle u + \beta u - f, \varphi \right\rangle,
\end{aligned}$$

ce qui donne $\triangle^2 u - \alpha \triangle u + \beta u = f$ au sens des distributions. Comme $u \in H_0^2(\Omega)$, on a également que $\triangle^2 u = \alpha \triangle u - \beta u + f \in L^2(\Omega)$ et donc presque partout dans Ω.

Question 5. Montrer en raisonnant par densité que

$$\forall u, v \in H_0^2(\Omega), \qquad \int_\Omega \triangle u \triangle v \, d\Omega = \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) d\Omega.$$

Corrigé de la question 5. Soit $u, v \in \mathcal{D}(\Omega)$, on calcule

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \triangle u \triangle v \, d\Omega &= \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) d\Omega, \\
&= \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \, d\Omega,
\end{aligned}$$

ensuite, en utilisant la Formule de Green, on obtient (u et v étant dans $\mathcal{D}(\Omega)$, il n'y a pas de termes de bord)

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\,d\Omega = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2}\,d\Omega = \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\,d\Omega,$$

de même

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,d\Omega = \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\,d\Omega,$$

ce qui donne

$$\int_\Omega \triangle u \triangle v\,d\Omega = \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right) d\Omega.$$

Finalement, par densité on obtient le résultat pour $u, v \in H_0^2(\Omega)$, car les deux formes bilinéaires de chaque côté de l'égalité sont continues dans $H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$.

Question 6. Montrer que la formulation variationnelle admet une unique solution dans $H_0^2(\Omega)$. Que se passe-t-il pour $\beta = 0$?

Corrigé de la question 6. On utilise le théorème de Lax-Milgram sur l'espace de Hilbert $H_0^2(\Omega)$ muni de la norme H^2 donnée dans (3).

— La forme linéaire est continue :

$$|\ell(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^2(\Omega)}.$$

— La forme bilinéaire est continue :

$$\begin{aligned}|a(u,v)| &\leq \|\triangle u\|_{L^2(\Omega)}\|\triangle v\|_{L^2(\Omega)} + \alpha\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \beta\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)},\\ &\leq (4+\alpha+\beta)\|u\|_{H^2(\Omega)}\|v\|_{H^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

— La forme bilinéaire est coercive :

$$\begin{aligned}a(u,u) &= \int_\Omega (\triangle u)^2 + \alpha|\nabla u|^2 + \beta u^2\,d\Omega,\\ &= \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2 + \alpha|\nabla u|^2 + \beta u^2\,d\Omega, \quad \text{d'après la question 5},\\ &\geq \min(1,\alpha,\beta)\|u\|^2_{H^2(\Omega)},\end{aligned}$$

et comme $\alpha, \beta > 0$, la constante $\min(1,\alpha,\beta) > 0$.

On peut appliquer le théorème de Lax-Milgram, on a ainsi l'existence d'une unique solution dans $H_0^2(\Omega)$ de la formulation variationnelle.

Si $\beta = 0$, cela ne modifie que la forme bilinéaire, pour la continuité le même calcul que précédemment donne $|a(u,v)| \leq (4+\alpha)\|u\|_{H^2(\Omega)}\|v\|_{H^2(\Omega)}$. En ce qui concerne la coercivité de a, comme $u \in H_0^2(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, en utilisant l'inégalité de Poincaré

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

avec la constante $C_p > 0$, on obtient que a est coercive :

$$a(u,u) \geq \min\left(1, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2C_p^2}\right)\|u\|^2_{H^2(\Omega)}.$$

À nouveau, on peut encore appliquer le théorème de Lax-Milgram et il existe une unique solution à la formulation variationnelle.

Question 7. Expliquer pourquoi on ne peut pas utiliser les éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}^1$ introduits en cours pour résoudre numériquement le problème.
En vous restreignant à la dimension 1, proposer un autre espace de dimension finie.

Corrigé de la question 7. On se donne un maillage $\mathcal{T}_h$ du domaine Ω composé de triangles. Il y a plusieurs façons de voir que les éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}^1$ ne fonctionne pas pour résoudre des EDP avec le Bilaplacien. On rappelle que l'espace de discrétisation est

$$V_h = \left\{u \in C^0(\overline{\Omega}) \mid \forall K \in \mathcal{T}_h,\ u\big|_K \in \mathbb{P}^1\right\}.$$

- On a vu que $V_h \subset H^1$ dans le cours mais V_h n est pas un sous espace de H^2, la continuité ne suffit pas.
- De manière plus pragmatique, si on utilise les éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}^1$, la matrice correspondant au terme $\int_{T_\ell} \triangle u \triangle v \, d\Omega$ est nul sur chaque triangle, car le Laplacien d'une fonction affine est nul. Donc, il nous manquerait un terme dans l'écriture matricielle de la formulation variationnelle.

En dimension 1, on a un intervalle $[a, b]$, que l'on discrétise en sous intervalles $a = a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$. Chercher des fonctions dans $H_0^2(a, b)$ revient à chercher des fonctions $\mathcal{C}^1$. En effet si $u \in H^2$, alors $u \in H^1((a, b)) \subset C^0([a, b])$ et $u' \in H^1((a, b)) \subset C^0([a, b])$. On va donc choisir

$$\tilde{V}_h = \left\{u \in C^1([a, b]) \mid \forall i,\ u\big|_{(a_i, a_{i+1})} \in \mathbb{P}^k\right\}.$$

On doit encore trouver le degré du polynome, en sachant qu'on doit raccorder valeurs et dérivées en chaque point. Il est donc naturel de prendre $k = 3$.

Pour les fonctions de base, on peut choisir

$$\forall i,\ w_i(a_j) = w_i'(a_j) = \tilde{w}_i(a_j) = \tilde{w}_i'(a_j) = 0 \text{ si } i \neq j, \quad w_i(a_i) = \tilde{w}_i'(a_i) = 1, \quad w_i'(a_i) = \tilde{w}_i(a_i) = 0.$$

Il y a donc deux fonctions de base par sommet. Pour $\tilde{V}_h^0 := \tilde{V}_h \cap H_0^2(a, b)$, il suffit de retirer les 4 fonctions de base associées à a et b.

Remarque : En dimension 2, il est possible d'étendre ce qu'on a fait en dimension 1. On cherche un espace de dimension finie composé de fonctions polynomiales par morceaux telle que au travers de chaque arête entre deux triangles les traces et traces normales des fonctions coïncident. Le plus petit degré pour lequel, c'est possible est 5 voir les éléments finis de Argyris (`https://defelement.com/elements/argyris.html`).