Séance 2 : Formulations variationnelles

```
Dans les exercices 1 et 2, nous partons d'EDPs complétées par des conditions
aux limites et construisons les formulations variationnelles (FV) associées.
Cette construction utilise une formule de Green. Nous établissons ensuite
l'équivalence (si u est solution de la FV alors elle est solution de l'EDP).
Cette étape est plus délicate car nous ne pouvons plus utiliser de formule
de Green (nous avons moins d'information sur la régularité de la solution),
un choix approprié des fonctions test permet d'utiliser la dérivation au sens
des distributions. Et il faut enfin retrouver la condition aux limites. Notez
que les conditions de Fourier ou Neumann et de Dirichlet interviennent
différemment dans les FV : une condition de Fourier ou Neumann est dite naturelle
car elle intervient naturellement dans la FV alors qu'une condition de Dirichlet
est dite essentielle, elle est imposée dans l'espace dans lequel est cherché
la solution, qui est le meme que celui des fonctions tests.

Dans l'exercice 3, on part d'une FV et on découvre l'EDP associée.
Notez enfin que l'unicité de la solution des FV est toujours très simple à
démontrer.
```

Dans la suite, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, dont la frontière $\partial\Omega$ est "régulière". On note $\mathbf{n}$ la normale unitaire extérieure à la frontière.

Exercice 1 Problème avec condition aux limites de Fourier
On considère le problème aux limites
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} + \lambda\, u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} . \tag{1}$$

avec $\lambda \geq 0$, $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$.

Question 0. On rappelle que γ_0 est la première application trace. Quelle assertion est juste

(a) $\operatorname{Im}\gamma_0 \subset L^2(\partial\Omega)$ et $\operatorname{Im}\gamma_0$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$

(b) $L^2(\partial\Omega) \subset \operatorname{Im}\gamma_0$ et $L^2(\partial\Omega)$ est dense dans $\operatorname{Im}\gamma_0$

(c) $L^2(\partial\Omega) = \operatorname{Im}\gamma_0$.

Question 1. Construire la formulation variationnelle (FV1) associée à (1).

Question 2. Prouver l'unicité de la solution de (FV1). Que se passe-t-il si $\lambda < 0$?

Question 3. Etablir l'équivalence entre les problèmes (1) et (FV1).

Exercice 2 Diffusion de la chaleur
On considère le problème aux limites
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(k\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} . \tag{2}$$

avec $f \in L^2(\Omega)$, $k \in L^\infty(\Omega)$ et $k(\boldsymbol{x}) \geq k_{min} > 0$ presque pour tout $\boldsymbol{x}$ dans Ω.

Question 0. Donner les espaces auxquels doivent appartenir $\vec{W}$ et v pour pouvoir écrire la formule de Green suivante

$$\int_\Omega \left(\operatorname{div} \vec{W}\, v + \vec{W} \cdot \nabla v\right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \vec{W} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}\, v|_{\partial\Omega}\, d\Gamma$$

(a) $\vec{W} \in (L^2(\Omega))^3$ et $v \in H^1(\Omega)$

(b) $\vec{W} \in (L^2(\Omega))^3$, $\operatorname{div} \vec{W} \in L^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$

(c) $\vec{W} \in (H^1(\Omega))^3$ et $v \in H^1(\Omega)$

En déduire les espaces auxquels doivent appartenir u et v pour pouvoir écrire la formule de Green suivante

$$\int_\Omega (\operatorname{div}(k\nabla u)v + k\nabla u \cdot \nabla v)\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} k\nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}\, v|_{\partial\Omega}\, d\Gamma$$

Question 1. Construire la formulation variationnelle (FV2) associée à (2) (on supposera pour simplifier que u est dans $H^1(\Omega)$ et est telle que $k\nabla u \in (H^1(\Omega))^3$).

Question 2. Prouver l'unicité de la solution de (FV2).

Question 3. Etablir l'équivalence entre les problèmes (2) et (FV2).

Exercice 3 Coefficients discontinus
Soit d un entier naturel non nul, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ à frontière suffisamment régulière. On le partitionne en $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$, où Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts disjoints à frontières suffisamment régulières. On note $\Sigma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, et on suppose, pour des raisons techniques dépassant le cadre de ce cours, que $\Sigma \cap \partial\Omega = \emptyset$. On note $\overrightarrow{n}$ le vecteur unitaire sortant à Ω_2.

Soient $\kappa_1,\ \kappa_2$ deux constantes strictement positives et définissons $\kappa : \Omega \to \mathbb{R}$ par

$$\kappa(x) = \begin{cases} \kappa_1 & \text{si} \quad x \in \Omega_1, \\ \kappa_2 & \text{si} \quad x \in \Omega_2. \end{cases}$$

Soit enfin $g \in L^2(\Sigma)$. On résout le problème variationnel $(\mathcal{P})$
Trouver $u \in H^1_0(\Omega)$ *telle que*

$$\int_\Omega \kappa \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_\Sigma g \, v|_\Sigma \, d\Sigma, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega).$$

Interpréter le problème $(\mathcal{P})$ en termes d'équations aux dérivées partielles dans Ω_1 et Ω_2, de conditions aux limites et de condition sur l'interface Σ (pour cette dernière, on raisonnera "formellement").

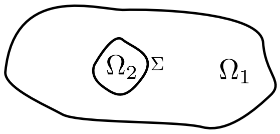

FIGURE 1 – Un exemple de domaine Ω.