Séance 1 : Outils et manipulations élémentaires

`Dans l'exercice 1, l'objectif est de manipuler certaines formules de Green.`
`Dans l'exercice 2, on utilise la dérivation au sens des distributions pour identifier les fonctions qui appartiennent à l'espace de Sobolev` H^1. `Signalons que le résultat de la Question 4 est important et nous servira plus tard.`
`Dans l'exercice 3, on démontre ce fameux théorème de prolongement par continuité des formes linéaires qui est utilisé dans tout le cours.`
`Dans l'exercice 4, on démontre le théorème de trace dans plusieurs configurations et on voit que la trace d'une fonction est dans` $L^2(\partial\Omega)$ `quand cette fonction est dans` $H^1(\Omega)$ `mais pas si elle est seulement dans` $L^2(\Omega)$.

Exercice 1 Formules de Green

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, dont la frontière $\partial\Omega$ est "régulière". On note $\mathbf{n}$ la normale unitaire extérieure à la frontière.

Question 0. Parmi ces formules, quelle est celle qui est correcte

(a) $$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i}\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} w\, d\Gamma \ (1 \le i \le 3), \quad \forall w \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})\,;$$

(b) $$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i}\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} w n_i\, d\Gamma \ (1 \le i \le 3), \quad \forall w \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})\,;$$

(c) $$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i}\, d\Omega = -\int_{\partial\Omega} w n_i\, d\Gamma \ (1 \le i \le 3), \quad \forall w \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}).$$

Question 1. Etablir par le calcul l'équivalence entre les formules (1) et (2)

$$\int_\Omega (u\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} v)\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} uvn_i\, d\Gamma \ (1 \le i \le 3), \quad \forall u, v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})\,; \tag{1}$$

$$\int_\Omega (u \,\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} + \nabla u \cdot \boldsymbol{v})\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} u(\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{n})\, d\Gamma, \quad \forall u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^3. \tag{2}$$

$\diamond$ **Question 2.** Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux éléments de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^3$. Etablir par le calcul la formule

$$\int_\Omega (\boldsymbol{u} \cdot \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} - \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{u} \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{v}\, d\Gamma.$$

Exercice 2 Exemples d'éléments de H^1

Question 0. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3, \ldots$), dont la frontière $\partial\Omega$ est "régulière". On rappelle la définition des espaces $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$

$$L^2(\Omega) = \{f \text{ mesurable sur } \Omega \text{ t.q. } \int_\Omega |f|^2 < +\infty\}$$

et

$$H^1(\Omega) = \Big\{f \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ \forall i \in \{1, \ldots, d\}\Big\}.$$

Quelle assertion est juste

$$\begin{array}{lcccc} \textbf{(a)} & \mathcal{C}^0(\Omega) \subset L^2(\Omega) & \text{et} & \mathcal{C}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega) \\ \textbf{(b)} & \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega) & \text{et} & \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega) \\ \textbf{(c)} & \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega) & \text{et} & \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega). \end{array}$$

Question 1. Les fonctions définies respectivement par :

$$v(x) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{sur }]0,1[\\ 2-x & \text{sur }]1,2[\end{array}\right. ,\quad w(x) = \left\{\begin{array}{ll} a & \text{sur }]0,1[\\ b & \text{sur }]1,2[\end{array}\right. ,\quad z(x) = x^p,\ p \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

appartiennent-elles à $H^1(]0,2[)$?

Question 2. Soit $\omega = B(0, 1/2)$ la boule ouverte de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la fonction définie par

$$u(x,y) = |\log(x^2+y^2)|^k \text{ pour } (x,y) \neq (0,0)$$

appartient à $H^1(\omega)$ si $k < 1/2$, alors qu'elle n'appartient pas à $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, dès que $k > 0$.

Question 3. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$: on le partitionne en $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$, où Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts disjoints. On considère $v \in L^2(\Omega)$ telle que $v_{|\Omega_i} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}_i)$, pour $i = 1, 2$. Calculer ∇v au sens faible et en déduire la condition nécessaire et suffisante pour que $v \in H^1(\Omega)$.

Question 4. Montrer que le résultat précédent s'étend aux fonctions $v \in L^2(\Omega)$ telle que $v_{|\Omega_i} \in H^1(\Omega_i)$, pour $i = 1, 2$. On utilisera le théorème de trace du cours : la trace d'une fonction de $H^1(\Omega)$ sur Γ, une partie de mesure non nulle du bord, est dans $L^2(\Gamma)$.

Exercice 3 $\diamond$ Prolongement par continuité

Soient H un espace vectoriel normé réel et V un sous-espace vectoriel de H, tels que V soit dense dans H. Soit ℓ une application linéaire de V dans $\mathbb{R}$, pour laquelle il existe une constante $C_\ell > 0$ telle que, pour tout $v \in V$, on ait $|\ell(v)| \leq C_\ell \|v\|_H$. Montrer que l'on peut prolonger par continuité de façon unique ℓ en une application $\tilde{\ell}$ linéaire et continue de H dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4 Théorème de trace

Question 1. Soit

$$\begin{array}{rrcl} \gamma_\star : & \mathcal{C}^\infty([0,1]) & \to & \mathbb{R} \\ & v & \mapsto & v(0). \end{array}$$

Montrer que

$$\forall v \in \mathcal{C}^\infty([0,1]),\ |v(0)| \leq C\,\|v\|_{H^1(]0,1[)}. \tag{3}$$

En utilisant l'exercice précédent, qu'en déduisez vous ?

Indication : on pourra écrire que pour tout v dans $\mathcal{C}^\infty([0,1])$, $v(0) = v(x) - \displaystyle\int_0^x v'(t)\,dt$.

Question 2. Montrer que l'inégalité (3) où on a remplacé la norme H^1 par la norme L^2 ne peut pas être vérifiée.

Question 3. Soit $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ et $\Gamma = \{0\}\times]0,1[$ une partie du bord $\partial\Omega$. En repartant du résultat de la Question 1, montrer que

$$\forall v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \quad \|v|_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\,\|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{4}$$

Qu'en déduisez vous sur l'application trace sur Γ ? Faire de même en remplaçant Γ par $\partial\Omega$.