# Corrigé de la Séance 1 : Outils et manipulations élémentaires

**Exercice 1 Formules de Green**

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, dont la frontière $\partial\Omega$ est "régulière". On note $\mathbf{n}$ la normale unitaire extérieure à la frontière.

**Question 0.** Parmi ces formules, quelle est celle qui est correcte

$$\textbf{(a)} \qquad \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i}\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} w\, d\Gamma \ (1 \leq i \leq 3), \quad \forall w \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})\,;$$

$$\textbf{(b)} \qquad \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i}\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} w n_i\, d\Gamma \ (1 \leq i \leq 3), \quad \forall w \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})\,;$$

$$\textbf{(c)} \qquad \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i}\, d\Omega = -\int_{\partial\Omega} w n_i\, d\Gamma \ (1 \leq i \leq 3), \quad \forall w \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}).$$

**Question 1.** Etablir par le calcul l'équivalence entre les formules (1) et (2)

$$\int_\Omega (u\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} v)\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} uvn_i\, d\Gamma \ (1 \leq i \leq 3), \quad \forall u, v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})\,; \tag{1}$$

$$\int_\Omega (u \ \mathrm{div}\, \boldsymbol{v} + \nabla u \cdot \boldsymbol{v})\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} u(\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{n})\, d\Gamma, \quad \forall u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^3. \tag{2}$$

**Corrigé de la question 1 :** Rappels :

$$\forall \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^3,\ \mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i},\ \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{n} = \sum_{i=1}^{3} v_i n_i\,; \quad \forall u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}),\ \nabla u = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_3} \end{bmatrix}.$$

Supposons la relation (1) vérifiée alors en particulier pour les composantes $v_i$ de $\boldsymbol{v}$, elle donne

$$\int_\Omega (u\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} v_i)\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} uv_in_i\, d\Gamma \ (1 \leq i \leq 3),\ \forall u, v_i \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \quad \forall\, 1 \leq i \leq 3\,,$$

soit en sommant sur $i$

$$\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega (u\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} v_i)\, d\Omega = \sum_{i=1}^{3} \int_{\partial\Omega} uv_in_i\, d\Gamma, \quad \forall u, v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$$

d'où

$$\int_\Omega (u \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i} v_i)\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} u \sum_{i=1}^{3} v_in_i\, d\Gamma, \quad \forall u, v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}).$$

On en déduit par définition

$$\int_\Omega (u \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \nabla u \cdot \boldsymbol{v})\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} u(\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{n})\, d\Gamma, \quad \forall u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^3.$$

Réciproquement si on suppose la relation (2) vérifiée alors par définition

$$\int_\Omega (u\sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_i} v_i)\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} u \sum_{i=1}^3 v_i n_i\, d\Gamma,\ \forall u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}),\ \forall \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^3.$$

En particulier pour $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ on trouve

$$\int_\Omega (u\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_1} v)\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} uvn_1\, d\Gamma\,,$$

soit (1) pour $i = 1$. De la même façon, avec $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{bmatrix}$ on obtient (1) pour $i = 2$ et avec $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix}$ on obtient (1) pour $i = 3$.

◇ **Question 2.** Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux éléments de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^3$. Etablir par le calcul la formule

$$\int_\Omega (\boldsymbol{u}\cdot \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} - \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{u} \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{v}\, d\Gamma.$$

**Corrigé de la question 2 :** Soient $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^3$. montrons que

$$\int_\Omega (\boldsymbol{u}\cdot \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} - \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{u} \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{v}\, d\Gamma.$$

Rappels :

$$\forall \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^3, \quad \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - v_3u_1 \\ u_1v_2 - v_1u_2 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}\,d\Omega \quad &= \quad \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{3} u_i\,(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_i\Big)\,d\Omega \\
&= \quad \int_\Omega u_1\Big(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\Big)+u_2\Big(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\Big)+u_3\Big(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\Big). \\
&\underset{(I.P.P.)}{=} \quad \int_\Omega \Big(-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}v_3+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}v_2\Big)+\Big(-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}v_1+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}v_3\Big)+\Big(-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}v_2+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}v_1\Big). \\
&\qquad + \int_{\partial\Omega}\Big(u_1(v_3n_2-v_2n_3)+u_2(v_1n_3-v_3n_1)+u_3(v_2n_1-v_1n_2)\Big)\,d\Gamma \\
&= \quad \int_\Omega v_1\Big(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\Big)+v_2\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\Big)+v_3\Big(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\Big). \\
&\qquad + \int_{\partial\Omega}\Big(v_1(u_2n_3-u_3n_2)+v_2(u_3n_1-u_1n_3)+v_3(u_1n_2-u_2n_1)\Big)\,d\Gamma \\
&= \quad \int_\Omega (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\,d\Omega+\int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{u}\times\mathbf{n})\cdot\boldsymbol{v}\,d\Gamma
\end{aligned}
$$

**Exercice 2 Exemples d'éléments de $H^1$**

**Question 0.** Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3, \ldots$), dont la frontière $\partial\Omega$ est "régulière". On rappelle la définition des espaces $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$

$$L^2(\Omega) = \{f \text{ mesurable sur } \Omega \text{ t.q. } \int_\Omega |f|^2 < +\infty\}$$

et

$$H^1(\Omega) = \Big\{f \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ \forall i \in \{1,\ldots,d\}\Big\}.$$

Quelle assertion est juste

**(a)** $\mathcal{C}^0(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ et $\mathcal{C}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$

**(b)** $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$ et $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$

**(c)** $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$ et $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$.

**Question 1.** Les fonctions définies respectivement par :

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur } ]0,1[ \\ 2-x & \text{sur } ]1,2[ \end{cases}, \quad w(x) = \begin{cases} a & \text{sur } ]0,1[ \\ b & \text{sur } ]1,2[ \end{cases}, \quad z(x) = x^p,\ p \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

appartiennent-elles à $H^1(]0,2[)$ ?

**Corrigé de la question 1 :** Ici on doit dériver au sens des distributions, et vérifier que le résultat appartient à $L^2(]0,2[)$.

Pour la fonction $v$, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(]0,2[)$ :

$$\begin{aligned}
\Big\langle \frac{\partial v}{\partial x}, \varphi \Big\rangle_{\mathcal{D}'(]0,2[),\mathcal{D}(]0,2[)} &= -\Big\langle v, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big\rangle_{\mathcal{D}'(]0,2[),\mathcal{D}(]0,2[)} \\
&= -\int_{]0,2[} v\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx = -\int_{]0,1[} v\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx - \int_{]1,2[} v\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx \\
&= -\int_{]0,1[} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx - \int_{]1,2[} (2-x)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx \underset{(I.P.P.)}{=} -\varphi(1) + \Big[\varphi(1) - \int_{]1,2[} \varphi\,dx\Big] \\
&= -\int_{]0,2[} \chi_{]1,2[}\varphi\,dx
\end{aligned}$$

avec $\chi]1,2[$ la fonction indicatrice de $]1,2[$ qui appartient bien à $L^2(]0,2[)$.

Pour la fonction $w$, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(]0,2[)$ :

$$\begin{aligned}
\Big\langle \frac{\partial w}{\partial x}, \varphi \Big\rangle_{\mathcal{D}'(]0,2[),\mathcal{D}(]0,2[)} &= -\Big\langle w, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big\rangle_{\mathcal{D}'(]0,2[),\mathcal{D}(]0,2[)} \\
&= -\int_{]0,2[} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx = -\int_{]0,1[} w\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx - \int_{]1,2[} w\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx \\
&= -\int_{]0,1[} a\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx - \int_{]1,2[} b\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx \underset{(I.P.P.)}{=} -a\varphi(1) + b\varphi(1) \\
&= \Big\langle (b-a)\delta_{x=1}, \varphi \Big\rangle_{\mathcal{D}'(]0,2[),\mathcal{D}(]0,2[)}
\end{aligned}$$

Si $b = a$ alors de manière évidente $w \in H^1(]0,2[)$. Sinon, comme une masse de Dirac n'est pas mesurable, $w \notin H^1(]0,2[)$.

Pour la fonction $z$. Elle est de carré intégrable si et seulement si $x^{2p}$ est intégrable c'est-à-dire si et seulement si $p > -1/2$. De même, sa dérivée $\frac{\partial z}{\partial x} = px^{p-1}$ est de carré rintégrable si et seulement si $p > 1/2$. On en déduit

$$z \in H^1(]0,2[) \quad \Leftrightarrow \quad p > 1/2$$

**Question 2.** Soit $\omega = B(0,1/2)$ la boule ouverte de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la fonction définie par

$$u(x,y) = |\log(x^2+y^2)|^k \text{ pour } (x,y) \neq (0,0)$$

appartient à $H^1(\omega)$ si $k < 1/2$, alors qu'elle n'appartient pas à $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, dès que $k > 0$.

**Corrigé de la question 2 :** On montre que (en introduisant les coordonnées polaires c'est à dire en posant $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$)

$$\int_{B(0,1/2)} |\log(x^2+y^2)|^{2k}\,dx\,dy = 2^{2k}\int_0^{2\pi}\int_0^{1/2} (\log(r))^{2k}\,r dr\,d\theta.$$

Pour tout $k$, $r \mapsto (\log(r))^{2k}\,r$ tend vers 0 quand r tend vers 0 donc $u$ est dans $L^2(B(0,1/2))$ pour tout $k$. Pour savoir si $u$ est dans $H^1$, on calcule son gradient et on déduit que $u$ est dans $H^1$ si et seulement si

$$\int_{B(0,1/2)} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\,dx\,dy < +\infty$$

c'est à dire

$$2^{2k}k^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \frac{(\log(r))^{2k-2}}{r^2}\, rdr\, d\theta < +\infty.$$

La primitive de $r^{-1}\log(r)^{2k-2}$ est $(2k-1)^{-1}\log(r)^{2k-1}$ donc l'intégrale précédente est finie si et seulement si $2k-1 < 0$. Pour $k \in (0, 1/2)$, on a donc $u$ qui est $H^1$ sans être continue.

**Question 3.** Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ : on le partitionne en $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$, où $\Omega_1$ et $\Omega_2$ sont deux ouverts disjoints. On considère $v \in L^2(\Omega)$ telle que $v_{|\Omega_i} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}_i)$, pour $i = 1, 2$. Calculer $\nabla v$ au sens faible et en déduire la condition nécessaire et suffisante pour que $v \in H^1(\Omega)$.

**Corrigé de la question 3 :** Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ : on le partitionne en $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$, où $\Omega_1$ et $\Omega_2$ sont deux ouverts disjoints. On considère $v \in L^2(\Omega)$ telle que $v_{|\Omega_i} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}_i)$, pour $i = 1, 2$. On cherche une condition nécessaire et suffisante pour que $v \in H^1(\Omega)$.

On sait pour commencer que $v \in L^2(\Omega)$. On va calculer $\nabla v$ au sens faible. On pose $v_i = v_{|\Omega_i}$ puis on dérive au sens des distributions. Pour toute fonction $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)^N$

$$\begin{aligned}
\Big\langle \nabla v, \boldsymbol{\varphi} \Big\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^N, \mathcal{D}(\Omega)^N} &= \sum_{i=1}^N \Big\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, \varphi_i \Big\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = -\sum_{i=1}^N \Big\langle v, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \Big\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} \\
&= -\Big\langle v, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \Big\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} \\
&= -\int_\Omega v \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}\, d\Omega = -\int_{\Omega_1} v_1 \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}\, d\Omega_1 - \int_{\Omega_2} v_2 \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}\, d\Omega_2
\end{aligned}$$

En intégrant par parties et en isolant les intégrales sur le bord, pour toute fonction $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)^N$

$$\Big\langle \nabla v, \boldsymbol{\varphi} \Big\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^N, \mathcal{D}(\Omega)^N} = \int_{\Omega_1} \nabla v_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}\, d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \nabla v_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}\, d\Omega_2 - \int_{\partial\Omega_1} v_1 \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{n}_1 d\Gamma_1 - \int_{\partial\Omega_2} v_2 \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{n}_2 d\Gamma_2$$

où $\boldsymbol{n}_1$ (respectivement $\boldsymbol{n}_2$) est la normale extérieure à $\partial\Omega_1$ (respectivement $\partial\Omega_2$). Comme $\boldsymbol{\varphi}$ est à support compact elle s'annule sur la frontière et donc en notant $\Gamma_{1-2} = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, on a

$$-\int_{\partial\Omega_1} v_1 \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{n}_1 d\Gamma_1 - \int_{\partial\Omega_2} v_2 \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{n}_2 d\Gamma_2 = -\int_{\Gamma_{1-2}} (v_1 - v_2) \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{n}_1\, d\Gamma_{1-2}$$

car $\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2$ en tout point de $\Gamma_{1-2}$ et $\boldsymbol{\varphi}$ est continue à la traversée de $\Gamma_{1-2}$. On a donc

$$\Big\langle \nabla v, \boldsymbol{\varphi} \Big\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^N, \mathcal{D}(\Omega)^N} = \int_{\Omega_1} \nabla v_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}\, d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \nabla v_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}\, d\Omega_2 - \int_{\Gamma_{1-2}} (v_1 - v_2) \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{n}_1\, d\Gamma_{1-2}$$

soit

$$\nabla v = \chi_{\Omega_1} \nabla v_1 + \chi_{\Omega_2} \nabla v_2 - \delta_{\Gamma_{1-2}} (v_1\big|_{\Gamma_{1-2}} - v_2\big|_{\Gamma_{1-2}}) \boldsymbol{n}_1$$

où $\chi_{\Omega_i}$ est la fonction caractéristique de $\Omega_i$ et $\delta$ est la distribution Dirac. C'est la formule des sauts !

Comme $\delta_{\Gamma_{1-2}}$ n'est pas dans $L^2(\Omega)$ et que $\chi_{\Omega_i}\nabla v_i$ est dans $L^2(\Omega)$, on trouve que $v$ est dans $H^1(\Omega)$ si et seulement si $v$ est continue à la traversée de $\Gamma_{1-2}$, c'est à dire $v_1\big|_{\Gamma_{1-2}} = v_2\big|_{\Gamma_{1-2}}$. Dans ce cas, on a

$$\nabla v = \begin{cases} \nabla v_1 & \text{sur } \Omega_1 \\ \nabla v_2 & \text{sur } \Omega_2 \end{cases}$$

**Question 4.** Montrer que le résultat précédent s'étend aux fonctions $v \in L^2(\Omega)$ telle que $v_{|\Omega_i} \in H^1(\Omega_i)$, pour $i = 1, 2$. On utilisera le théorème de trace du cours : la trace d'une fonction de $H^1(\Omega)$ sur $\Gamma$, une partie de mesure non nulle du bord, est dans $L^2(\Gamma)$.

**Corrigé de la question 4 :** La démonstration de la question précédente s'étend naturellement aux fonctions $v \in L^2(\Omega)$ telle que $v_{|\Omega_i} \in H^1(\Omega_i)$, pour $i = 1, 2$. En effet, pour toute fonction $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)^N$, on trouve

$$\Big\langle \nabla v, \boldsymbol{\varphi} \Big\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^N, \mathcal{D}(\Omega)^N} = \int_{\Omega_1} \nabla v_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}\, d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \nabla v_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}\, d\Omega_2 - \int_{\Gamma_{1-2}} (v_1 - v_2)\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{n}_1\, d\Gamma_{1-2}$$

où $\boldsymbol{n}_1$ est la normale extérieure à $\partial\Omega_1$ et où $v_1\big|_{\Gamma_{1-2}}$ et $v_2\big|_{\Gamma_{1-2}}$ sont dans $L^2(\Gamma_{1-2})$. On a donc

$$\nabla v = \mathbb{1}_{\Omega_1}\nabla v_1 + \mathbb{1}_{\Omega_2}\nabla v_2 - \delta_{\Gamma_{1-2}}(v_1 - v_2)\boldsymbol{n}_1$$

On conclut que $v$ est dans $H^1(\Omega)$ si et seulement si $v_1\big|_{\Gamma_{1-2}} = v_2\big|_{\Gamma_{1-2}}$. Dans ce cas, on a

$$\nabla v = \begin{cases} \nabla v_1 & \text{sur } \Omega_1 \\ \nabla v_2 & \text{sur } \Omega_2 \end{cases}$$

**Exercice 3 $\diamond$ Prolongement par continuité**

Soient $H$ un espace vectoriel normé réel et $V$ un sous-espace vectoriel de $H$, tels que $V$ soit dense dans $H$. Soit $\ell$ une application linéaire de $V$ dans $\mathbb{R}$, pour laquelle il existe une constante $C_\ell > 0$ telle que, pour tout $v \in V$, on ait $|\ell(v)| \leq C_\ell \|v\|_H$. Montrer que l'on peut prolonger par continuité de façon unique $\ell$ en une application $\tilde{\ell}$ linéaire et continue de $H$ dans $\mathbb{R}$.

**Corrigé de la question :** On raisonne en plusieurs étapes (simples) :

— Rappel : définition du prolongement par continuité $\tilde{\ell}$.
Soit $h \in H$. Par densité, il existe une suite d'éléments de $V$, notée $(v_k)_k$, telle que $\lim_{k\to\infty} \|v_k - h\|_H = 0$. Soit $(z_k)_k$ la suite de réels définie par $z_k = \ell(v_k)$ pour tout $k$. Etudions $(z_k)_k$ :

$$|z_k - z_m| = |\ell(v_k) - \ell(v_m)| \overset{\ell \text{ lin.}}{=} |\ell(v_k - v_m)| \leq C_\ell \|v_k - v_m\|_H.$$

Comme $(v_k)_k$ converge (vers $h$) dans $H$, c'est en particulier une suite de Cauchy, c'est-à-dire que $\lim_{k,m\to\infty} \|v_k - v_m\|_H = 0$. Ainsi, $(z_k)_k$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Or, $\mathbb{R}$ est complet : $(z_k)_k$ est donc convergente. A partir de là, on définit le prolongement par continuité de $\ell$ en $h$ comme étant égal à la limite de $(z_k)_k$ :

$$\tilde{\ell}(h) = \lim_k \ell(v_k).$$

Bien sûr, on peut effectuer le même raisonnement pour tout élément $h$ de $H$, ce qui permet de construire $\tilde{\ell} \,:\, H \to \mathbb{R}$.

— Unicité du prolongement $\tilde{\ell}$.
Reprenons le processus précédent de construction... Pour $h \in H$, soient deux suites d'éléments de $V$, $(v_k)_k$ et $(v'_k)_k$, convergeant vers $h$. Vérifions maintenant que la définition de $\tilde{\ell}(h)$ est indépendante de la suite choisie, ce qui prouvera l'unicité :

$$|\lim_k \ell(v_k) - \lim_k \ell(v'_k)| = |\lim_k \{\ell(v_k) - \ell(v'_k)\}| \overset{\ell \text{ lin.}}{=} |\lim_k \ell(v_k - v'_k)|.$$

Or, $|\ell(v_k - v'_k)| \leq C_\ell \|v_k - v'_k\|_H$, et $\lim_k \|v_k - v'_k\|_H = 0$ par inégalité triangulaire ($\|v_k - v'_k\|_H \leq \|v_k - h\|_H + \|h - v'_k\|_H$). On en conclut que $\lim_k \ell(v_k) = \lim_k \ell(v'_k)$.

— Linéarité du prolongement $\tilde{\ell}$.
On obtient la linéarité en passant à la limite. Soient $h^1, h^2 \in H$, $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}$ : par densité, il existe $(v^1_k)_k$ et $(v^2_k)_k$ deux suites d'éléments de $V$, qui convergent respectivement vers $h^1$ et $h^2$ dans $H$, et

$$\begin{aligned} \tilde{\ell}(\alpha^1 h^1 + \alpha^2 h^2) &= \lim_k \ell(\alpha^1 v^1_k + \alpha^2 v^2_k) \\ &\overset{\ell \text{ lin.}}{=} \lim_k \{\alpha^1 \ell(v^1_k) + \alpha^2 \ell(v^2_k)\} = \alpha^1 \tilde{\ell}(h^1) + \alpha^2 \tilde{\ell}(h^2). \end{aligned}$$

— Continuité du prolongement $\tilde{\ell}$ de $H$ dans $\mathbb{R}$.
On veut prouver : $\exists C > 0,\ \forall h \in H,\ |\tilde{\ell}(h)| \leq C\|h\|_H$. Pour cela, $h \in H$ étant donné, soit $(v_k)_k$ une suite d'éléments de $V$ qui converge vers $h$ dans $H$. On écrit

$$|\tilde{\ell}(h)| = |\lim_k \ell(v_k)| = \lim_k |\ell(v_k)|\,;$$

or, pour tout $k$, $|\ell(v_k)| \leq C_\ell \|v_k\|_H$. Comme $\lim_k \|v_k\|_H = \|h\|_H$, on en conclut que

$$|\tilde{\ell}(h)| \leq C_\ell \|h\|_H.$$

NB. Le module de continuité est identique pour $\ell$ et pour son prolongement $\tilde{\ell}$.
NB(bis). On a le même résultat pour des espaces de Banach définis sur $\mathbb{C}$...

**Exercice 4 Théorème de trace**

**Question 1.** Soit

$$\begin{array}{rccc} \gamma_\star : & \mathcal{C}^\infty([0,1]) & \to & \mathbb{R} \\ & v & \mapsto & v(0). \end{array}$$

Montrer que

$$\forall v \in \mathcal{C}^\infty([0,1]),\ |v(0)| \leq C\, \|v\|_{H^1(]0,1[)}. \tag{3}$$

En utilisant l'exercice précédent, qu'en déduisez vous ?

*Indication : on pourra écrire que pour tout $v$ dans $\mathcal{C}^\infty([0,1])$, $v(0) = v(x) - \int_0^x v'(t)\, dt$.*

**Corrigé de la question 1 :** On utilise l'exercice précédent en choisissant respectivement :

$$\begin{aligned} &H = H^1(]0,1[),\ \text{muni de la norme } \|v\|_{H^1(]0,1[)} := \left\{ \int_0^1 v^2\, dx + \int_0^1 (v')^2\, dx \right\}^{1/2}, \\ &V = C^\infty([0,1])\,. \end{aligned}$$

En effet, $C^\infty([0,1])$ est dense dans $H^1(]0,1[)$ d'après les résultats du cours.
Soit maintenant $v \in C^\infty([0,1])$ : on écrit comme indiqué

$$v(0) = v(x) - \int_0^x v'(t)\, dt \implies |v(0)| \leq |v(x)| + \left| \int_0^x v'(t)\, dt \right|.$$

On commence par majorer le second terme, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x v'(t)\, dt \right| &\leq \int_0^x |v'(t)|\, dt \leq \left( \int_0^x 1\, dt \right)^{1/2} \left( \int_0^x |v'(t)|^2\, dt \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{x} \left( \int_0^x |v'(t)|^2\, dt \right)^{1/2} \leq 1 \times \left( \int_0^1 |v'(t)|^2\, dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Pour faire de même pour le premier terme ($|v(x)|$), on utilise une "astuce" qui permet de passer à une intégrale :

$$|v(0)| = \int_0^1 |v(0)|\, dx\ !$$

La majoration du premier terme "intégré" donne alors

$$\int_0^1 |v(x)|\, dx \leq 1 \times \left( \int_0^1 |v(x)|^2\, dx \right)^{1/2}.$$

On en conclut que, pour tout élément $v$ de $C^1([0,1])$, on a la majoration

$$|v(0)| \leq \left( \int_0^1 |v(x)|^2\, dx \right)^{1/2} + 1 \times \left( \int_0^1 |v'(t)|^2\, dt \right)^{1/2} \leq \sqrt{2} \|v\|_{H^1(]0,1[)}.$$

où pour la dernière inégalité, on a utilisé $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, valable pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

Conclusion : d'après l'exercice précédent, on peut prolonger l'application trace $\gamma_\star : v \mapsto v(0)$ de façon unique en une application linéaire et continue de $H^1(]0,1[)$ dans $\mathbb{R}$.

**Question 2.** Montrer que l'inégalité (3) où on a remplacé la norme $H^1$ par la norme $L^2$ ne peut pas être vérifiée.

**Corrigé de la question 2 :** Soit $(v_m)_{m\geq 1}$ la suite d'éléments de $L^2(]0,1[)$ définie par $v_m(x) = e^{-mx}$. Par un calcul direct :

$$\int_0^1 v_m^2\,dx = \int_0^1 e^{-2mx}\,dx = \left[\frac{1}{-2m}e^{-2mx}\right]_0^1 = \frac{1}{2m}(1-e^{-2m}).$$

Ainsi $\lim_{m\to\infty}\|v_m\|_{L^2(]0,1[)} = 0$, alors que $v_m(0) = 1$ pour tout $m \geq 1$. On ne peut donc pas trouver de constante $C > 0$ telle que, pour tout $m \geq 1$, on ait $|v_m(0)| \leq C\,\|v_m\|_{L^2(]0,1[)}$.

**Question 3.** Soit $\Omega = ]0,1[\times]0,1[$ et $\Gamma = \{0\}\times]0,1[$ une partie du bord $\partial\Omega$. En repartant du résultat de la Question 1, montrer que

$$\forall v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}),\quad \|v|_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\,\|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{4}$$

Qu'en déduisez vous sur l'application trace sur $\Gamma$ ? Faire de même en remplaçant $\Gamma$ par $\partial\Omega$.

**Corrigé de la question 3 :** D'après la question 1, on a

$$\forall v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}),\quad |v(0,y)|^2 \leq 2\left(\int_0^1 |v(x,y)|^2\,dx + \int_0^1 |\partial_x v(x,y)|^2\,dx\right)$$

et en intégrant par rapport à $y$, on trouve

$$\forall v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}),\quad \int_\Gamma |v|_\Gamma|^2 d\Gamma := \int_0^1 |v(0,y)|^2\,dy \leq 2\left(\int_\Omega |v|^2\,d\Omega + \int_\Omega |\partial_x v|^2\,d\Omega\right) \leq 2\|v\|^2_{H^1(\Omega)}$$

D'après l'exercice précédent, on peut prolonger l'application trace $\gamma_\Gamma\ :\ v \mapsto v|_\Gamma$ de façon unique en une application linéaire et continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$.

En utilisant la même approche que précédemment et en notant $\Gamma_i,\ i = 1,2,3,4$ les côtés du carré $\Omega$, on montre que

$$\forall v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}),\quad \|v|_{\Gamma_i}\|^2_{L^2(\Gamma_i)} \leq 2\|v\|^2_{H^1(\Omega)}$$

soit

$$\forall v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}),\quad \|v|_{\partial\Omega}\|^2_{L^2(\partial\Omega)} = \sum_{i=1}^4 \|v|_{\Gamma_i}\|^2_{L^2(\Gamma_i)} d\Gamma \leq 8\|v\|^2_{H^1(\Omega)}$$

D'après l'exercice précédent, on peut prolonger l'application trace $\gamma\ :\ v \mapsto v|_{\partial\Omega}$ de façon unique en une application linéaire et continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$.