ENSTA 2ème année, Cours ANN1

Jeudi 14 novembre 2024

Contrôle de connaissances. Durée : 2 heures

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.

Questions préliminaires

Question 1. Montrer qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\forall v \in H^1(]0,1[),\ \|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq C_1 \{\|v'\|_{L^2(]0,1[)} + |v(0)|\}.$$

en détaillant avec soin les arguments de densité utilisés.

Corrigé de la question 1 : Tout d'abord, d'après le cours, l'application trace définie par

$$\begin{aligned}\gamma_0 : C^\infty([0,1]) &\to \mathbb{R}\\ v &\mapsto v(0)\end{aligned}$$

se prolonge de façon unique en une application linéaire et continue de $H^1(]0,1[)$ dans $\mathbb{R}$.

Soit v une fonction $C^\infty([0,1])$, on peut écrire

$$\forall x \in [0,1], \quad v(x) = v(0) + \int_0^x v'(y)\, dy. \tag{1}$$

Nous avons donc deux fonctions qui sont égales pour tout x : leur norme L^2 sont donc égales. Par application de l'inégalité triangulaire au membre de droite (pour la norme de $L^2(]0,1[; dx)$), on déduit

$$\begin{aligned}\|v\|_{L^2} &\leq \left(\int_0^1 \left(\int_0^x v'(y)\, dy\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 |v(0)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \left(\int_0^1 \left(\int_0^x |v'(y)|^2\, dy\right) x\, dx\right)^{\frac{1}{2}} + |v(0)|\\ &\leq \left(\int_0^1 |v'(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} + |v(0)|,\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir la deuxième inégalité et on a majoré x par 1. Nous avons donc démontré l'inégalité pour des fonctions $v \in C^\infty([0,1])$. En utilisant la densité de $C^\infty([0,1])$ dans $H^1(]0,1[)$, cette inégalité s étend aux fonctions dans $H^1(]0,1[)$. Détaillons ce point. Soit $v \in H^1(]0,1[)$, il existe une suite $(v_n)_n$ d'éléments de $C^\infty([0,1])$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|v_n - v\|_{H^1} = 0.$$

Chaque élément v_n vérifie

$$\|v_n\|_{L^2(]0,1[)} \leq \{\|v_n'\|_{L^2(]0,1[)} + |v_n(0)|\}$$

Il suffit ensuite d'écrire que pour tout n

$$\begin{aligned}
\|v\|_{L^2(]0,1[)} &\leq \|v_n\|_{L^2(]0,1[)} + \|v - v_n\|_{L^2(]0,1[)} \\
&\leq \{\|v_n'\|_{L^2(]0,1[)} + |v_n(0)|\} + \|v - v_n\|_{L^2(]0,1[)} \\
&\leq \{\|v'\|_{L^2(]0,1[)} + |v(0)|\} + \|v - v_n\|_{L^2(]0,1[)} + \|v_n' - v'\|_{L^2(]0,1[)} + |v(0) - v_n(0)|
\end{aligned}$$

Il suffit ensuite de faire tendre n vers l'infini et d'utiliser que

$$\|v - v_n\|_{L^2(]0,1[)} + \|v_n' - v'\|_{L^2(]0,1[)} \leq 2\|v - v_n\|_{H^1(]0,1[)} \quad \text{et } |v(0) - v_n(0)| \leq C_0\|v - v_n\|_{H^1(]0,1[)}$$

où la première inégalité est obtenue par définition des normes L^2 et H^1 et la deuxième inégalité correspond à la continuité de l'application trace. On en déduit que

$$\|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq C_1 \left[\|v'\|_{L^2(]0,1[)} + |v(0)|\right].$$

On admet que pour Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière suffisamment régulière, il existe une constante $C_p > 0$ telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_p \left[\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v|_{\partial\Omega}\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\right]. \tag{2}$$

Question 2. **a.** Montrer, en utilisant la première formule de Green vue en cours, que

$$\begin{aligned}
\forall u, v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}),\ \forall \vec{b} \in (\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}))^3,\ \int_\Omega \left[(\vec{b}\cdot\nabla u)v + (\vec{b}\cdot\nabla v)u + \left(\operatorname{div}\vec{b}\right) u\, v\right] d\Omega& \\
= \int_{\partial\Omega} \vec{b}\cdot\vec{n}\, u\big|_{\partial\Omega}\, v\big|_{\partial\Omega}\, d\Gamma,& \quad (3)
\end{aligned}$$

où $\vec{n}$ est la normale extérieure à Ω.
b. Expliquer pourquoi cette formule s'étend aux fonctions $u, v \in H^1(\Omega)$.

Corrigé de la question 2 **a.** On rappelle la formule de Stokes

$$\forall w \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \quad \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i}\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} w\big|_{\partial\Omega}\, n_i\, d\Gamma \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3 \tag{4}$$

où $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ est la normale sortante à $\partial\Omega$. On applique (4) à $w = b_i uv$, avec $u, v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. En dérivant le produit $b_i uv$ et en sommant sur i, on obtient

$$\sum_{i=1}^3 \int_\Omega (\partial_{x_i} b_i)uv + \sum_{i=1}^3 \int_\Omega b_i \partial_{x_i} u\, v + \sum_{i=1}^3 \int_\Omega b_i \partial_{x_i} v\, u = \sum_{i=1}^3 \int_\Omega b_i\, n_i uv$$

ce qui correspond à (3).
b. Il suffit d'utiliser la densité de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$, la continuité de l'application trace et le résultat de prolongement par densité des formes bilinéaires énoncé dans le cours.

Equation d'advection-diffusion avec des conditions aux limites de type I

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière. On considère une équation de diffusion avec un terme d'advection posée sous forme variationnelle :
Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega \Big[\nabla u \cdot \nabla v + \big(\vec{b} \cdot \nabla u\big) v\Big] \, d\Omega = \int_\Omega \vec{F} \cdot \nabla v \, d\Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \qquad (FV_I)$$

Ici, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in (\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}))^3$ et $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) \in (\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}))^3$ sont des **fonctions vectorielles** de Ω considérées comme des données du problème.

Question 3. On suppose dans cette question et la suivante qu'il existe une constante β strictement négative telle que

$$\operatorname{div} \vec{b} \leq \beta < 0.$$

en utilisant (3), montrer que la forme bilinéaire a associée à (FV_I) est coercive dans $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1}$.

Corrigé de la question 3. Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. On a

$$a(v, v) = \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \big(\vec{b} \cdot \nabla v\big) v.$$

En utilisant (3) et puisque $v\big|_{\partial\Omega} = 0$, on en déduit que $(-\beta > 0)$

$$\int_\Omega \big(\vec{b} \cdot \nabla v\big) v = -\frac{1}{2} \int_\Omega \operatorname{div} \vec{b} \, v^2 \geq -\beta \|v\|^2_{L^2(\Omega)}$$

ce qui donne immédiatement la coercivité de a puisque $\min(1, |\beta|) > 0$:

$$a(v, v) \geq \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \beta \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \min(1, |\beta|) \, \|v\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Question 4. **a.** Montrer qu'il existe une unique solution au problème (FV_I).

Corrigé de la question 4.a

- o $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ est bien un espace de Hilbert, en tant que sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$.
- o La forme a associée à (FV_I) est bilinéaire et coercive d'après la Question 2. Elle est également continue puisque $\forall v, w \in H_0^1(\Omega)$,

$$|a(w, v)| \leq \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)^3} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\vec{b} \cdot \nabla w\|_{L^2(\Omega)^3} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

où on a utilisé une inégalité triangulaire. Comme $\vec{b} \in (\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}))^3$ est borné et on obtient $\forall v, w \in H_0^1(\Omega)$,

$$|a(w, v)| \leq \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)^3} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\vec{b}\|_{L^\infty} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)^3} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq (1 + \|\vec{b}\|_{L^\infty}) \|w\|_{H^1(\Omega)} \, \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

où $\|\vec{b}\|_{L^\infty} := \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|\vec{b}(x)\|$.

o la forme linéaire ℓ définie par

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \ell(v) = \int_\Omega \vec{F} \cdot \nabla v \, d\Omega$$

est continue puisque

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad |\ell(v)| \leq \|\vec{F}\|_{L^2(\Omega)^3} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \|\vec{F}\|_{L^2(\Omega)^3} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

où on a utilisé l'inégalité de Cauchy Schwarz puisque comme $\vec{F} \in (\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}))^3$ est borné dans Ω borné, $\vec{F}$ est dans $L^2(\Omega)^3$.

On peut donc appliquer le théorème de Lax Milgram : il y a donc existence et unicité d'une solution u de (FV_I).

(b) Montrer que la solution est continue par rapport aux données. On explicitera cette propriété en fonction de $\vec{F}$ et β.

Corrigé de la question 4.(b) Il suffit d'écrire (FV_I) avec $v = u$. On trouve, en utilisant la coercivité de a et la continuité de ℓ :

$$\min(1, |\beta|/2) \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq a(u,u) = \ell(u) \leq \|\vec{F}\|_{L^2(\Omega)^3} \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

soit

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\|\vec{F}\|_{L^2(\Omega)^3}}{\min(1, |\beta|/2)}.$$

Question 5. Montrer qu'il existe une constante $\eta > 0$ telle que si

$$\operatorname{div} \vec{b} \leq \eta$$

le problème reste bien posé dans $H_0^1(\Omega)$.

Corrigé de la question 5. La difficulté réside dans la coercivité de a. On a

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(v,v) = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega (\vec{b} \cdot \nabla v) v.$$

On a d'après (3)

$$\int_\Omega (\vec{b} \cdot \nabla v) v = -\frac{1}{2} \int_\Omega \operatorname{div} \vec{b} v^2 \geq -\frac{\eta}{2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

On a donc

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(v,v) = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\eta}{2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2$$

D'après l'inégalité de Poincaré, on a pour tout $(c \in (0,1))$

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \geq (1-c) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \frac{c}{C_p} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2$$

donc

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(v,v) \geq (1-c) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \left(\frac{c}{C_p} - \frac{\eta}{2} \right) \|v\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Tant que $\eta < 2/C_p$, la forme bilinéaire est coercive avec pour tout $c \in (\eta C_p/2, 1)$,

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(v,v) \geq \min(1-c, \frac{c}{C_p} - \frac{\eta}{2})\|v\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Il suffit ensuite d'utiliser le corrigé de la question 3.(a) pour voir que toutes les autres hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites (pour montrer notamment la continuité de la forme bilinéaire, nous avons seulement utilisé que chaque composant de $\vec{b}$ est bornée). Le problème est donc bien posé dans $H_0^1(\Omega)$ dès que $\eta < 2/C_p$.

Question 6.(a). Retrouver le problème aux limites vérifié par la solution u de (FV_I) constitué d'une équation aux dérivées partielles satisfaite presque partout dans Ω et d'une condition aux limites sur le bord $\partial\Omega$.

(b) Montrer l'équivalence entre ce problème aux limites et la formulation variationnelle.

Corrigé de la question 6. Tout d'abord, u solution de (FV_I) appartient à $H_0^1(\Omega)$, on a donc

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

On choisit ensuite une fonction-test v de $\mathscr{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, et on a

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \langle \nabla u, \nabla v\rangle \quad , \int_\Omega \big(\vec{b}\cdot\nabla u\big) v \, d\Omega = \langle \vec{b}\cdot \nabla u, v\rangle \quad \text{et} \quad \int_\Omega \vec{F}\cdot\nabla v \, d\Omega = \langle \vec{F}, \nabla v\rangle$$

et par définition de la dérivation au sens des distributions

$$\langle \nabla u, \nabla v\rangle = \langle -\triangle u, v\rangle \quad \text{et} \quad \langle \vec{F}, \nabla v\rangle = -\langle \operatorname{div}\vec{F}, v\rangle$$

On a alors

$$\langle -\triangle u + \vec{b}\cdot\nabla u + \operatorname{div}\vec{F}, v\rangle = 0, \quad \forall v \in \mathscr{D}(\Omega).$$

On déduit que

$$-\triangle u + \vec{b}\cdot\nabla u = -\operatorname{div}\vec{F} \quad \text{dans } \mathscr{D}'(\Omega).$$

Comme $\operatorname{div}\vec{F}$ et u sont dans $L^2(\Omega)$, on trouve que $-\triangle u$ aussi. On a donc $-\triangle u + \vec{b}\cdot\nabla u = -\operatorname{div}\vec{F}$ dans L^2 et donc presque partout dans Ω. En conclusion, u solution de (FV_I) est également solution de

$$\left\{\begin{array}{ll} -\triangle u + \vec{b}\cdot\nabla u = -\operatorname{div}\vec{F} & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array}\right. .$$

Equation d'advection-diffusion avec des conditions aux limites de type II

On considère maintenant le problème d'advection-diffusion suivant
Trouver u dans $H^1(\Omega)$, solution de

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta u + \vec{b}\cdot\nabla u = f, & \text{dans} \quad \Omega \\ \nabla u \cdot \vec{n} + \lambda u = g, & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{array}\right. \tag{5}$$

avec $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$, $\lambda \geq 0$ et $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in (\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}))^3$ est tel que $\operatorname{div} \vec{b} = 0$.

Question 7. **a.** Ecrire la formulation variationnelle (FV_{II}) du problème (5). On appellera a la forme bilinéaire et ℓ la forme linéaire associées.

Corrigé de la question 7.a On multiplie la première équation par $v \in H^1(\Omega)$ et on intègre dans Ω. Comme $u \in H^1(\Omega)$ à laplacien dans $L^2(\Omega)$ (puisque $-\Delta u + \vec{b} \cdot \nabla u = f$), on peut supposer $u \in H^2(\Omega)$ et si $v \in H^1(\Omega)$ on peut utiliser la formule de Green. On obtient en utilisant la condition aux bords :
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega \left[\nabla u \cdot \nabla v + (\vec{b} \cdot \nabla u) v\right] \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} u\big|_{\partial\Omega} v\big|_{\partial\Omega} \, d\Gamma = \int_\Omega f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g \, v\big|_{\partial\Omega} \, d\Gamma, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (FV_{II})$$

b. Montrer l'équivalence entre la formulation variationnelle et le problème aux limites (5).

Corrigé de la question 7.b. On choisit une fonction-test v de $\mathscr{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. On a comme précédemment

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \langle \nabla u, \nabla v\rangle \quad , \int_\Omega (\vec{b} \cdot \nabla u) v \, d\Omega = \langle \vec{b} \cdot \nabla u, v\rangle \quad \text{et} \quad \int_\Omega f \, v \, d\Omega = \langle f, v\rangle$$

et par définition de la dérivation au sens des distributions

$$\langle \nabla u, \nabla v\rangle = \langle -\triangle u, v\rangle$$

On a alors

$$\langle -\triangle u + \vec{b} \cdot \nabla u - f, v\rangle = 0, \quad \forall v \in \mathscr{D}(\Omega).$$

On déduit que

$$-\triangle u + \vec{b} \cdot \nabla u = f \quad \text{dans } \mathscr{D}'(\Omega).$$

Comme f et u sont dans $L^2(\Omega)$, on trouve que $-\triangle u$ aussi. On a donc $-\triangle u + \vec{b} \cdot \nabla u = f$ dans L^2 et donc presque partout dans Ω.

Pour retrouver la condition aux limites, on choisit maintenant $v \in H^1(\Omega)$. Comme $u \in H^1(\Omega)$ est à laplacien dans $L^2(\Omega)$ (puisque $-\Delta u + \vec{b} \cdot \nabla u = f$ dans Ω), on peut supposer $u \in H^2(\Omega)$ et on peut utiliser la formule de Green. On obtient pour tout $v \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega (-\Delta u + \vec{b} \cdot \nabla u) v \, d\Omega + \int_\Gamma (\nabla u \cdot \vec{n}\big|_{\partial\Omega} + \lambda u\big|_{\partial\Omega}) v\big|_{\partial\Omega} \, d\Gamma = \int_\Omega f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g \, v\big|_{\partial\Omega} \, d\Gamma.$$

Comme $-\Delta u + \vec{b} \cdot \nabla u = f$ dans Ω, les intégrales volumiques se simplifient et on obtient

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_\Gamma (\nabla u \cdot \vec{n}\big|_{\partial\Omega} + \lambda u\big|_{\partial\Omega}) v\big|_{\partial\Omega} \, d\Gamma = \int_{\partial\Omega} g \, v\big|_{\partial\Omega} \, d\Gamma$$

Quand v parcourt $H^1(\Omega)$, $v\big|_{\partial\Omega}$ parcourt $\mathrm{Im}\gamma_0$ donc

$$\forall \psi \in \mathrm{Im}\gamma_0, \quad \int_\Gamma (\nabla u \cdot \vec{n}\big|_{\partial\Omega} + \lambda u\big|_{\partial\Omega} - g) \psi \, d\Gamma = 0$$

Comme $\mathrm{Im}\gamma_0$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$, on en déduit

$$\forall \psi \in L^2(\partial\Omega), \quad \int_\Gamma (\nabla u \cdot \vec{n}\big|_{\partial\Omega} + \lambda u\big|_{\partial\Omega} - g)\psi \, d\Gamma = 0$$

et donc $(\nabla u \cdot \vec{n}\big|_{\partial\Omega} + \lambda u\big|_{\partial\Omega} - g)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et donc presque partout.

Question 8. **a.** On suppose dans cette question que

$$\frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{n} + \lambda \geq \gamma > 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \tag{6}$$

Montrer que le problème (5) est bien posé dans $H^1(\Omega)$.

Corrigé de la question 8.(a). Puisque (5) est équivalent à (FV_{II}). Nous allons appliquer le théorème de Lax Milgram à (FV_{II}).

- o $H^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ est bien un espace de Hilbert.
- o La forme a associée à (FV_{II}) est bilinéaire et continue puisque $\forall v, w \in H^1(\Omega)$,

$$|a(w,v)| \leq \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)^3} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\vec{b} \cdot \nabla w\|_{L^2(\Omega)^3} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \lambda \|v\big|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \|w\big|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)}$$

où on a utilisé une inégalité triangulaire. En utilisant les mêmes arguments qu'à la question 4.a. et la continuité de l'application trace (de constante de continuité notée C_0), on obtient $\forall v, w \in H^1(\Omega)$,

$$|a(w,v)| \leq (1 + \|\vec{b}\|_{L^\infty} + \lambda C_0^2) \|w\|_{H^1(\Omega)} \, \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

- o La forme a est coercive. En effet, on a d'une part

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad a(v,v) = \int_\Omega \left[|\nabla v|^2 + (\vec{b} \cdot \nabla v) v \right] \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} |v\big|_{\partial\Omega}|^2 \, d\Gamma,$$

et en utilisant (3) avec $\operatorname{div} \vec{b} = 0$ et $u = v$ on a d'autre part

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega (\vec{b} \cdot \nabla v) v \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \vec{b} \cdot \vec{n} \, |v\big|_{\partial\Omega}|^2.$$

Donc si la condition (6) est vérifiée, on obtient

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad a(v,v) \geq \int_\Omega |\nabla v|^2 \, d\Omega + \gamma \int_{\partial\Omega} |v\big|_{\partial\Omega}|^2 \, d\Gamma.$$

Il suffit d'utiliser l'inégalité (2)

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad a(v,v) \geq \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 \, d\Omega + \frac{1}{C_p} \min(\frac{1}{2}, \gamma) \int_\Omega |v|^2 \, d\Omega \geq \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2C_p}, \frac{\gamma}{C_p}) \|v\|_{H^1}^2.$$

- o la forme linéaire ℓ définie par

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \ell(v) = \int_\Omega f \, v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g \, v\big|_{\partial\Omega} \, d\Gamma$$

est continue puisque

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad |\ell(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\big|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + C_0 \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}) \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

où on a utilisé la continuité de l'application trace (de constante de continuité notée C_0).

On peut donc appliquer le théorème de Lax Milgram : il y a donc existence et unicité de la solution u de (FV_{II}).

On suppose maintenant que $\vec{b} \cdot \vec{n} + 2\lambda \geq 0$ sur $\partial\Omega$. Comme $\vec{b} \cdot \vec{n}$ est une fonction très régulière du bord, il n'y a que deux configurations : soit $\vec{b} \cdot \vec{n} + 2\lambda \geq \gamma > 0$ sur une partie de $\partial\Omega$ de mesure non nulle, soit $\vec{b} \cdot \vec{n} + 2\lambda = 0$ sur $\partial\Omega$.
b. Est ce que le problème est toujours bien posé si $\vec{b} \cdot \vec{n} + 2\lambda \geq 0$ sur $\partial\Omega$ et $\vec{b} \cdot \vec{n} + 2\lambda \geq \gamma > 0$ sur une partie de $\partial\Omega$ de mesure non nulle.

Corrigé de la question 8.(b). C'est pour prouver la coercivité de a que nous avons utilisé l'hypothèse (6). La question est donc : est ce que a est toujours coercive si $\vec{b} \cdot \vec{n} + 2\lambda \geq 0$ sur $\partial\Omega$ et $\vec{b} \cdot \vec{n} + 2\lambda\gamma > 0$ sur une partie de $\partial\Omega$ de mesure non nulle.
Dans ce cas, on peut montrer que a est toujours coercive puisqu'il est possible d'écrire une inégalité de Poincaré où la trace sur $\partial\Omega$ est remplacée par la trace sur une partie du bord de mesure non nulle.

c. On suppose enfin que $\vec{b} \cdot \vec{n} + 2\lambda = 0$ sur $\partial\Omega$. Montrer que ceci ne peut arriver que pour $\lambda = 0$. Est ce que le problème est toujours bien posé dans ce cas ?

Corrigé de la question 8.(c). Supposons $\vec{b} \cdot \vec{n} + 2\lambda = 0$ sur $\partial\Omega$. Comme $\operatorname{div} \vec{b} = 0$, d'après la formule de Stokes, ceci n'est possible que pour $\lambda = 0$. Dans ce cas, on a

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad a(v, v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 \, d\Omega,$$

et donc a ne peut pas être coercive ($a(1, 1) = 0$).
En conclusion, si $\lambda = 0$ et $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, alors le problème n'est pas bien posé.

On suppose de nouveau que (6) est vérifiée. On se propose de calculer par éléments finis une approximation u_h de u.

On note V_h l'espace des éléments finis de Lagrange P^1, associé à un maillage $\mathcal{T}_h$ de pas h.

Question 9. **a.** Rappeler pourquoi $V_h \subset H^1(\Omega)$.
b. Ecrire la formulation variationnelle discrète (FV_h) posée dans V_h. Montrer que cette formulation variationnelle discrète admet une unique solution dans V_h.
c. Redémontrer le lemme de Céa pour (FV_{II}), c'est à dire qu'il existe une constante $C > 0$ (que l'on explicitera) indépendante de V_h telle que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}$$

d. Nous avons montré dans le cours que si $u \in H^2(\Omega)$ alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Redémontrer le théorème d'Aubin-Nitsche : il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

On pourra considérer, l'unique solution $z \in H^1(\Omega)$ de $a(z,v) = \int_\Omega (u-u_h)v$, $\forall v \in H^1(\Omega)$.

Corrigé de la question 10.

a. $V_h \subset H^1(\Omega)$ car les fonctions de V_h sont C^1 sur chaque triangle et globalement C^0. D'après un théorème du cours (lié à la formule des sauts), ces fonctions sont dans $H^1(\Omega)$.
b. La FV discrète est : Trouver $u_h \in V_h$ telle que

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$$

On montre avec le théorème de Lax-Milgram que le problème est bien posé. Comme V_h est un sous-espace de dimension finie de H^1, il est fermé et donc quand il est muni de la norme H^1 c'est un espace de Hilbert. Comme c'est un sous-espace de H^1, continuité et coercivité se déduisent facilement avec les mêmes constantes.
c. et **d.** voir le cours.

Question 10. **a.** Montrer que (FV_h) peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire :

$$(\mathbb{K} + \mathbb{B} + \lambda\mathbb{S})\mathbb{U} = \mathbb{L},$$

où $\mathbb{K}$ est la matrice de rigidité vue en cours.
b. Est ce que les matrices $\mathbb{K}$, $\mathbb{B}$ et $\mathbb{S}$ sont symétriques ? positives ? définies positives ? Montrer que $\mathbb{B} + \lambda\mathbb{S}$ est définie positive.
c. Montrer que si $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, la matrice $\mathbb{K} + \mathbb{B} + \lambda\mathbb{S}$ est inversible si $\lambda > 0$ mais pas pour $\lambda = 0$.

Corrigé de la question 10.

a. Soit $(w_1, \dots, w_N)$ une base de V_h. Comme V_h est un espace de dimension finie, la formulation variationnelle discrète est équivalente à

$$\forall i,\ 1 \le i \le N, \quad a(u_h, w_i) = \ell(w_i)$$

Comme $u_h \in V_h$, on peut le décomposer dans la base $u_h = \sum_j u_j w_j$ et on obtient

$$\forall i,\ 1 \le i \le N, \quad \sum_j u_{\varepsilon,j} \left(\int_\Omega \nabla w_j \cdot \nabla w_i \, d\Omega + \int_\Omega \vec{b} \cdot \nabla w_j \, w_i \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} w_j w_i \, d\Gamma \right) = \int_\Omega f w_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} g w_i \, d\Gamma.$$

On reconnait un système matriciel

$$(\mathbb{K} + \mathbb{B} + \lambda\mathbb{S})\mathbb{U} = \mathbb{L}$$

où

$$\mathbb{K}_{ij} = \int_\Omega \nabla w_j \cdot \nabla w_i \, d\Omega, \ \mathbb{B}_{ij} = \int_\Omega \vec{b} \cdot \nabla w_j \, w_i \, d\Omega \quad \mathbb{S}_{ij} = \int_{\partial\Omega} w_i w_j d\Omega, \quad \mathbb{L}_i = \int_\Omega f w_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} g w_i \, d\Gamma.$$

b. Les matrices $\mathbb{K}$ et $\mathbb{S}$ sont bien symétriques mais pas $\mathbb{B}$. Soit $\mathbb{V} \in \mathbb{R}^N$ et $v_h = \sum_j \mathbb{V}_j w_j$, on a

$$\mathbb{V}^T \mathbb{K} \mathbb{V} = \int_\Omega |\nabla v_h|^2 \, d\Omega \ge 0$$

donc $\mathbb{K}$ est positive mais pas définie positive puisque $\mathbb{V}$ telle que $v_h = 1 \in V_h$ est dans le noyau de $\mathbb{K}$.

$$\mathbb{V}^T \mathbb{S} \mathbb{V} = \int_{\partial\Omega} |v_h|^2 \, d\Omega > 0 \quad \text{si } \mathbb{V} \neq 0.$$

Enfin

$$\mathbb{V}^T \mathbb{B} \mathbb{V} = \int_\Omega \vec{b} \cdot \nabla v_h \, v_h \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \vec{b} \cdot \vec{n} |v_h|^2 \, d\Gamma$$

n'a pas de signe mais

$$\mathbb{V}^T (\mathbb{B} + \lambda \mathbb{S}) \mathbb{V} = \int_{\partial\Omega} (\frac{1}{2} \vec{b} \cdot \vec{n} + \lambda) |v_h|^2 \, d\Gamma \geq \gamma \int_{\partial\Omega} |v_h|^2 \, d\Omega \geq 0$$

c. On a

$$\mathbb{V}^T (\mathbb{K} + \mathbb{B} + \lambda \mathbb{S}) \mathbb{V} = \int_\Omega |\nabla v_h|^2 \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\frac{1}{2} \vec{b} \cdot \vec{n} + \lambda) |v_h|^2 \, d\Gamma$$

Si $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\lambda > 0$, la matrice est définie positive donc inversible. Si $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\lambda = 0$, la matrice a un noyau et n'est donc pas inversible.