

Jeudi 14 novembre 2024

Contrôle de connaissances. Durée : 2 heures

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.

1 Questions préliminaires

Question 1. Montrer qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\forall v \in H^1(]0, 1[), \|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq C_1 \{ \|v'\|_{L^2(]0, 1[)} + |v(0)| \}.$$

On vous demande de détailler avec soin les arguments de densité utilisés.

On admet que pour Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière suffisamment régulière, il existe une constante $C_p > 0$ telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_p \left[\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \right]. \quad (1)$$

Question 2. (a). Montrer, en utilisant la première formule de Green vue en cours, que

$$\begin{aligned} \forall u, v \in C^\infty(\overline{\Omega}), \forall \vec{b} \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^3, \int_{\Omega} \left[(\vec{b} \cdot \nabla u) v + (\vec{b} \cdot \nabla v) u + (\operatorname{div} \vec{b}) u v \right] d\Omega \\ = \int_{\partial\Omega} \vec{b} \cdot \vec{n} u|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} d\Gamma, \quad (2) \end{aligned}$$

où $\vec{n}$ est la normale extérieure à Ω .

(b). Expliquer pourquoi cette formule s'étend aux fonctions $u, v \in H^1(\Omega)$.

2 Equation d'advection-diffusion avec condition de Dirichlet

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière. On considère une équation de diffusion avec un terme d'advection posée sous forme variationnelle :

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_{\Omega} \left[\nabla u \cdot \nabla v + (\vec{b} \cdot \nabla u) v \right] d\Omega = \int_{\Omega} \vec{F} \cdot \nabla v d\Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (FV_I)$$

Ici, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^3$ et $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^3$ sont des **fonctions vectorielles** de Ω considérées comme des données du problème.

Question 3. On suppose dans cette question et la suivante qu'il existe une constante β strictement négative telle que

$$\operatorname{div} \vec{b} \leq \beta < 0.$$

En utilisant (2), montrer que la forme bilinéaire a associée à (FV_I) est coercive dans $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1}$.

Question 4. (a). Montrer qu'il existe une unique solution au problème (FV_I) .

(b). Montrer que la solution est continue par rapport aux données. On explicitera cette propriété en fonction de $\vec{F}$ et β .

Question 5. Montrer qu'il existe une constante $\eta > 0$ telle que si

$$\operatorname{div} \vec{b} \leq \eta$$

le problème reste bien posé dans $H_0^1(\Omega)$.

Question 6.(a). Retrouver le problème aux limites vérifié par la solution u de (FV_I) constitué d'une équation aux dérivées partielles satisfaite presque partout dans Ω et d'une condition aux limites sur le bord $\partial\Omega$.

(b). Montrer l'équivalence entre ce problème aux limites et la formulation variationnelle.

3 Equation d'advection-diffusion avec condition de fourier

On considère maintenant le problème d'advection-diffusion suivant

Trouver u dans $H^1(\Omega)$, solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + \vec{b} \cdot \nabla u = f, & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \cdot \vec{n} + \lambda u = g, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3)$$

avec $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$, $\lambda \geq 0$ et $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in (\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}))^3$ est tel que

$$\operatorname{div} \vec{b} = 0.$$

Question 7. (a). Ecrire la formulation variationnelle (FV_{II}) du problème (3). On appellera a la forme bilinéaire et ℓ la forme linéaire associées.

(b). Montrer l'équivalence entre la formulation variationnelle et le problème aux limites (3).

Question 8. On suppose dans cette question que

$$\frac{1}{2} \vec{b} \cdot \vec{n} + \lambda \geq \gamma > 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (4)$$

(a). Montrer que le problème (3) est bien posé dans $H^1(\Omega)$.

On suppose maintenant que $\vec{b} \cdot \vec{n} + 2\lambda \geq 0$ sur $\partial\Omega$. Comme $\vec{b} \cdot \vec{n}$ est une fonction très régulière du bord, il n'y a que deux configurations : soit $\vec{b} \cdot \vec{n} + 2\lambda \geq \gamma > 0$ sur une partie de $\partial\Omega$ de mesure non nulle, soit $\vec{b} \cdot \vec{n} + 2\lambda = 0$ sur $\partial\Omega$.

(b). Est ce que le problème est toujours bien posé dans $H^1(\Omega)$ si $\vec{b} \cdot \vec{n} + 2\lambda \geq 0$ sur $\partial\Omega$ et $\vec{b} \cdot \vec{n} + 2\lambda \geq \gamma > 0$ sur une partie de $\partial\Omega$ de mesure non nulle.

(c). On suppose enfin que $\vec{b} \cdot \vec{n} + 2\lambda = 0$ sur $\partial\Omega$. Montrer que ceci ne peut arriver que pour $\lambda = 0$. Est ce que le problème est toujours bien posé dans ce cas ?

On suppose de nouveau que (4) est vérifiée. On se propose de calculer par éléments finis une approximation u_h de u .

On note V_h l'espace des éléments finis de Lagrange P^1 , associé à un maillage $\mathcal{T}_h$ de pas h .

Question 9. (a). Rappeler la définition précise de V_h et les raisons pour lesquelles $V_h \subset H^1(\Omega)$.

(b). Ecrire la formulation variationnelle discrète (FV_h) posée dans V_h . Montrer que cette formulation variationnelle discrète admet une unique solution dans V_h .

(c). Redémontrer le lemme de Céa pour (FV_h) , c'est à dire qu'il existe une constante $C > 0$ (que l'on explicitera) indépendante de V_h telle que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}$$

(d). Nous avons montré dans le cours que si $u \in H^2(\Omega)$ alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Redémontrer le théorème d'Aubin-Nitsche : il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

On pourra considérer, l'unique solution $z \in H^1(\Omega)$ de $a(z, v) = \int_{\Omega} (u - u_h)v, \forall v \in H^1(\Omega)$.

Question 10. (a). Montrer que (FV_h) peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire :

$$(\mathbb{K} + \mathbb{B} + \lambda \mathbb{S})\mathbf{U} = \mathbf{L},$$

où $\mathbb{K}$ est la matrice de rigidité vue en cours.

(b). Est ce que les matrices $\mathbb{K}$, $\mathbb{B}$ et $\mathbb{S}$ sont symétriques ? positives ? définies positives ? Montrer que $\mathbb{B} + \lambda \mathbb{S}$ est définie positive.

(c). Montrer que si $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, la matrice $\mathbb{K} + \mathbb{B} + \lambda \mathbb{S}$ est inversible si $\lambda > 0$ mais pas pour $\lambda = 0$.