

Lundi 23 octobre 2023

Contrôle de connaissances. Durée : 2 heures

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.

Exercice 1 : Quelques inégalités de Poincaré

Question 1. Montrer qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\forall v \in H^1(]0, 1[), \quad \|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq C_1 \{ \|v'\|_{L^2(]0, 1[)} + |v(0)| \}.$$

Vous pourrez utiliser que $C^1([0, 1])$ est dense dans $H^1(]0, 1[)$. Vous détaillerez avec soin dans cette question les arguments de densité que vous utiliserez.

Corrigé de la question 1 : Soit v une fonction $C^1([0, 1])$, on peut écrire

$$\forall x \in [0, 1], \quad v(x) = v(0) + \int_0^x v'(y) dy. \quad (1)$$

Par application de l'inégalité triangulaire au membre de droite (pour la norme de $L^2(]0, 1[)$, on déduit

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2} &\leq \left(\int_0^1 \left(\int_0^x v'(y) dy \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 |v(0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_0^1 \left(\int_0^x |v'(y)|^2 dy \right) x dx \right)^{\frac{1}{2}} + |v(0)| \\ &\leq \left(\int_0^1 |v'(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} + |v(0)|, \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir la deuxième inégalité et on a majoré x par 1. Nous allons utiliser des arguments de densité et de continuité de l'application trace pour déduire que l'inégalité est vraie aussi pour v dans $H^1(]0, 1[)$. Soit v dans $H^1(]0, 1[)$, il existe une suite v_n d'éléments de $C^1([0, 1])$ (pour lesquels l'inégalité est vraie) qui est telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n - v\|_{H^1} = 0.$$

On a dans ce cas

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \|v_n\|_{H^1} - \|v\|_{H^1} \right| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \|v_n\|_{L^2} - \|v\|_{L^2} \right| = 0.$$

De plus nous avons montré dans le TD que l'application

$$\begin{aligned} \gamma_\star : C^1([0, 1]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto v(0) \end{aligned}$$

se prolonge de façon unique en une application linéaire et continue de $H^1(]0, 1[)$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi,

$$|v_n(0) - v(0)| \leq C_0 \|v_n - v\|_{H^1} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

On peut donc passer à la limite dans l'inégalité et on trouve.

$$\forall v \in H^1(]0, 1[), \quad \|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq C_1 [\|v'\|_{L^2(]0, 1[)} + |v(0)|].$$

Question 2. Soit A tel que $0 < A < 1$. Montrer qu'il existe une constante $C_A > 0$ telle que pour tout $v \in H^1(]0, 1[)$

$$\|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq C_A [\|v'\|_{L^2(]0, 1[)} + \|v\|_{L^2(]0, A[)}]$$

Quelle est la dépendance de C_A par rapport à A ? Commenter.

Corrigé de la question 2. Soit $A \in]0, 1[$. Soit $v \in C^1([0, 1])$, nous avons

$$v(x) = v(Ax) + \int_{Ax}^x v'(t) dt, \quad \forall x \in [0, 1].$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} &\leq \left(\int_0^1 |v(Ax)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_0^1 \left(\int_{Ax}^x v'(t) dt \right)^2 dx \right)^{1/2}, \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{A}} \left(\int_0^A |v(y)|^2 dy \right)^{1/2} + \left(\int_0^1 |v'(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc choisir $C_A = 1/\sqrt{A}$, qui tend vers l'infini quand A tend vers 0.

Il est également possible d'écrire pour $v \in C^1([0, 1])$,

$$v(x) = v(y) + \int_y^x v'(t) dt, \quad \forall x \in [0, 1], y \in [0, 1]$$

de prendre la norme $L^2(]0, A[, dy)$

$$\sqrt{A}v(x) \leq \|v\|_{L^2(]0, A[)} + \left(\int_0^A \left(\int_y^x v'(t) dt \right)^2 dy \right)^{1/2}$$

puis la norme $L^2(]0, 1[, dx)$ et on retrouve la même inégalité que précédemment.

Pour terminer, il faut raisonner par densité. L'espace C^1 est dense dans H^1 et tous les opérateurs $\|\cdot\|_{L^2(0,1)}$, $\|\cdot\|_{L^2(0,A)}$ et $|\cdot|_{H^1(0,1)}$ sont continus. L'inégalité précédente est donc vraie aussi pour $v \in H^1$.

Question 3. On considère le domaine $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$. Dédurre de la question précédente qu'il existe une constante qu'on appellera encore C_A telle que pour tout $v \in H^1(\Omega)$

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_A (\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(]0, A[\times]0, 1[)})$$

Corrigé de la question 4. Soit $v \in C^1(\overline{\Omega})$. Soit A tel que $0 < A < 1$. Nous avons pour tout $y \in]0, 1[$, en considérant $x \mapsto v(x, y)$

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 |v(x, y)|^2 dx \right)^{1/2} &\leq \frac{1}{\sqrt{A}} \left(\int_0^A |v(x, y)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_0^1 |\partial_x v(x, y)|^2 dx \right)^{1/2}, \\ \int_0^1 |v(x, y)|^2 dx &\leq \frac{2}{A} \int_0^A |v(x, y)|^2 dx + 2 \int_0^1 |\partial_x v(x, y)|^2 dx, \\ \int_0^1 \int_0^1 |v(x, y)|^2 dx dy &\leq \frac{2}{A} \int_0^1 \int_0^A |v(x, y)|^2 dx dy + 2 \int_0^1 \int_0^1 |\partial_x v(x, y)|^2 dx dy, \\ \left(\int_0^1 \int_0^1 |v(x, y)|^2 dx dy \right)^{1/2} &\leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A}} \left(\int_0^1 \int_0^A |v(x, y)|^2 dx dy \right)^{1/2} + \sqrt{2} \left(\int_0^1 \int_0^1 |\nabla v(x, y)|^2 dx dy \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Cela conclut la preuve en utilisant comme à la question précédente un argument de densité.

Exercice 2 : Un problème elliptique à coefficients variables

Soient $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$, A telle que $0 < A < 1$ et la fonction b définie par

$$b(x, y) = \begin{cases} b_0 & \text{si } x < A \\ 0 & \text{si } x > A \end{cases}$$

où $b_0 > 0$. Soient f une fonction donnée de $L^2(\Omega)$ et g de $L^2(\partial\Omega)$. On s'intéresse au problème suivant :

Trouver u dans $H^1(\Omega)$, solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + b(x)u = f, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

Question 1. Ecrire la formulation variationnelle du problème (2). On appellera a la forme bilinéaire et ℓ la forme linéaire associées.

Corrigé de la question 1. Nous considérons u une solution du problème (2). Comme la fonction b est dans $L^2(\Omega)$, nous avons $\Delta u \in L^2(\Omega)$, et donc $u \in H^1(\Omega, \Delta)$. On peut donc supposer $u \in H^2(\Omega)$ ce qui permet d'appliquer la formule de Green, pour $v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} -\Delta u v = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v|_{\partial\Omega}.$$

Ainsi, la formulation variationnelle est

$$\text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ telle que } \forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + b u v) = \int_{\Omega} f v + \int_{\partial\Omega} g v|_{\partial\Omega}.$$

Nous définissons donc la forme bilinéaire a et la forme linéaire ℓ sur $H^1(\Omega)$ par

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + b u v), \quad \ell(v) = \int_{\Omega} f v + \int_{\partial\Omega} g v|_{\partial\Omega}.$$

Question 2. Montrer l'équivalence entre la formulation variationnelle et la formulation forte (2).

Corrigé de la question 2. Nous devons montrer que la formulation variationnelle implique la formulation forte. Considérons dans un premier temps une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pour retrouver l'EDP. Nous avons

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega} (f - b u) \varphi,$$

On a donc d'après la définition de la divergence faible que ∇u a une divergence faible dans $L^2(\Omega)$ et

$$-\operatorname{div} \nabla u = f - b u \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

On en déduit que $-\Delta u = f - b u$ dans $L^2(\Omega)$. Comme le second membre est dans $L^2(\Omega)$, l'égalité est vraie presque partout dans Ω . Nous en déduisons de plus que $u \in H^1(\Omega, \Delta)$.

Pour la condition aux limites, nous choisissons $v \in H^1(\Omega)$. Comme $u \in H^1(\Omega, \Delta)$, nous pouvons supposer $u \in H^2(\Omega)$. En appliquant la formule de Green, nous obtenons, puisque l'intégrale dans Ω disparaît

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} - g \right) v|_{\partial\Omega} = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Comme $\operatorname{Im}(\gamma_0)$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$, nous obtenons

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} - g \right) \psi = 0, \quad \forall \psi \in L^2(\partial\Omega).$$

ce qui implique que $\partial u / \partial n = g$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et donc presque partout sur $\partial\Omega$.

Question 3. Démontrer qu'il existe une solution et une seule au problème (2). On appellera dans la suite α la constante de coercivité de la forme bilinéaire a et M la constante de continuité de la forme linéaire ℓ .

Que se passe-t-il quand A tend vers 0 ?

Corrigé de la question 3. Nous allons appliquer le théorème de Lax-Milgram dans l'espace de Hilbert $H^1(\Omega)$. La forme linéaire ℓ est linéaire continue car l'application γ_0 est linéaire continue :

$$|\ell(v)| \leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} C_0 \right) \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

où C_0 est la constante de continuité de l'application trace γ_0 . La forme bilinéaire a est continue

$$|a(u, v)| \leq \max(1, b_0) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad (u, v) \in H^1(\Omega),$$

et coercive grâce à l'inégalité démontrée à l'exercice 1 :

$$\begin{aligned} a(u, u) &\geq \min(\alpha, b_0) \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2([0, A[\times]0, 1])}^2 \right) + (1 - \alpha) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ &\geq \min\left(1 - \alpha, \frac{A}{2} \min(\alpha, b_0)\right) \|u\|_{H^1(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad u \in H^1(\Omega),$$

pour $0 < \alpha < 1$ quelconque. On peut donc appliquer le théorème de Lax Milgram.

Quand A tend vers 0, la constante de coercivité tend vers 0. Le problème tend vers le problème de Neumann, dont on a vu en cours qu'il était mal posé.

Question 4. Redémontrer que la solution dépend continûment des données.

Corrigé de la question 4. La solution $u \in H^1(\Omega)$ vérifie en prenant $v = u$ dans la formulation variationnelle

$$\alpha \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq a(u, u) = l(u) \leq M \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

ce qui permet d'obtenir $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq M/\alpha$. Pour conclure, on a la continuité des constantes M et α par rapport aux paramètres f, g, A et b_0 du problème.

Question 5. Donner la définition de V_h , l'espace des éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_1$ vu en cours et écrire la formulation variationnelle discrète.

Corrigé de la question 5. L'espace des éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_1$ est défini sur un maillage triangulaire donné comme l'espace vectoriel des fonctions globalement continues et polynomiales de degré 1 sur chaque triangle. Nous noterons V_h cet espace. La formulation variationnelle discrète s'écrit :

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que } \forall v_h \in V_h \quad \int_{\Omega} (\nabla u_h \cdot \nabla v_h + b u_h v_h) = \int_{\Omega} f v_h + \int_{\partial\Omega} g v_h|_{\partial\Omega}.$$

Question 6. Donner une base de V_h et écrire le système linéaire équivalent à la formulation variationnelle discrète de la question précédente. Pourquoi ce système est-il inversible ?

Corrigé de la question 6. Notons N le nombre de sommets dans le maillage et w_i la fonction définie dans chaque triangle comme le polynôme de degré 1 qui prend les valeurs 0 en tous les sommets sauf le $i^{\text{ème}}$ sommet où elle prend la valeur 1. La famille $(w_1, \dots, w_N)$ est une base de V_h .

En écrivant la solution cherchée u_h dans cette base sous la forme $u_h = U_1 w_1 + \dots + U_N w_N$, la linéarité du problème permet de montrer que u_h est solution du problème variationnel discret si, et seulement si, le vecteur U est solution du problème $AU = B$ avec

$$A_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla w_j \cdot \nabla w_i + b w_j w_i, \quad B_i = \int_{\Omega} f w_i + \int_{\partial\Omega} g w_i|_{\partial\Omega}, \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

La matrice A est définie positive et donc inversible car a est coercive sur l'espace de Hilbert V_h : on a

$$V^t A V = a(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|_{H^1}^2 = \alpha \|V\|^2 \quad \text{où } v_h = \sum_i V_i w_i$$

Question 7. Donner et redémontrer le lemme de Céa. Rappeler la vitesse de convergence de l'approximation Eléments finis en norme H^1 et L^2 .

Corrigé de la question 7. Dans cette preuve, nous appellerons α la constante de coercivité de la forme bilinéaire a sur l'espace $H^1(\Omega)$ et M_a sa constante de continuité. Soient u et u_h les solutions dans $H^1(\Omega)$ et V_h . Comme $V_h \subset H^1(\Omega)$, nous avons

$$\alpha \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq a(u - u_h, u - u_h).$$

Par ailleurs, pour $v_h \in V_h$, nous avons en utilisant le fait que u et u_h sont solutions des formulations variationnelles

$$a(u - u_h, u_h - v_h) = a(u, u_h - v_h) - a(u_h, u_h - v_h) = l(u_h - v_h) - l(u_h - v_h) = 0.$$

Nous obtenons ainsi pour tout $v_h \in V_h$

$$\alpha \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \leq M_a \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \|v_h - u_h\|_{H^1(\Omega)},$$

ce qui se réécrit

$$\forall v_h \in V_h, \quad \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M_a}{\alpha} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}.$$

De plus si la vitesse de convergence de la méthode en norme H^1 est 1 et celle en norme L^2 est 2, ce qui signifie que

$$\exists C > 0 : \forall h \text{ suffisamment petit } \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}),$$

$$\exists \tilde{C} > 0 : \forall h \text{ suffisamment petit } \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \tilde{C}h^2(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}).$$

Exercice 3. Équation de plaques

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière suffisamment régulière, $\alpha, \beta > 0$ deux constantes et $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème :

Trouver $u \in H^2(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} \Delta(\Delta u) - \alpha \Delta u + \beta u = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3)$$

où on rappelle que

$$H^2(\Omega) := \left\{ u \in H^1(\Omega), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \in L^2(\Omega) \right\},$$

et qu'il est muni de la norme :

$$\forall u \in H^2(\Omega), \quad \|u\|_{H^2}^2 := \|u\|_{H^1}^2 + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\|_{L^2}^2 + 2 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right\|_{L^2}^2.$$

On définit le sous-espace $H_0^2(\Omega)$ comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^2(\Omega)$.

Question 1. Montrer que $H_0^2(\Omega)$ muni de la norme H^2 est un espace de Hilbert et qu'il vérifie

$$H_0^2(\Omega) \subset \{u \in H^2(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ et } \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0\}. \quad (4)$$

Nous utiliserons dans la suite, que l'inclusion (4) est en fait une égalité.

Corrigé de la question 1. L'espace $H_0^2(\Omega)$ est par définition un sous-espace vectoriel fermé (comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$) de l'espace de Hilbert $H^2(\Omega)$, donc $H_0^2(\Omega)$ est une espace de Hilbert. Soit $u \in H_0^2(\Omega)$, il existe une suite $u_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\|u - u_n\|_{H^2(\Omega)} \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow +\infty$. En utilisant le premier et le deuxième théorèmes de trace (Amphi 1 et 2), on obtient les estimations suivantes

$$\begin{aligned} \|\gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)} &= \|\gamma_0 u - \gamma_0 u_n\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|u - u_n\|_{H^1(\Omega)} \leq C_0 \|u - u_n\|_{H^2(\Omega)}, \\ \|\gamma_1 u\|_{L^2(\partial\Omega)} &= \|\gamma_1 u - \gamma_1 u_n\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_1 \|u - u_n\|_{H^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

et en prenant la limite quand $n \rightarrow +\infty$, cela donne $\gamma_0 u = \gamma_1 u = 0$.

Question 2. Montrer que

$$\forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}), v \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_{\Omega} \Delta(\Delta u) v \, d\Omega = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, d\Omega.$$

et qu'on peut étendre cette formule de Green pour $u \in H^2(\Omega, \Delta^2) := \{u \in H^2(\Omega) \text{ telle que } \Delta \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ et $v \in H_0^2(\Omega)$. On admettra que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^2(\Omega, \Delta^2)$.

Corrigé de la question 2. Soit $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ et $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, en utilisant deux fois la formule de Green (corollaire 2bis de l'Amphi 1),

$$\int_{\Omega} \Delta \varphi \psi \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} \psi \, d\Gamma, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}),$$

on calcule

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta(\Delta u) v \, d\Omega &= - \int_{\Omega} \nabla(\Delta u) \cdot \nabla v \, d\Omega + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \nabla \Delta u \cdot \mathbf{n} v \, d\Gamma}_{v=0 \text{ sur } \partial\Omega}, \\ &= \int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, d\Omega - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \Delta u \nabla v \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma}_{\nabla v \cdot \mathbf{n}=0 \text{ sur } \partial\Omega}, \\ &= \int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, d\Omega, \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.

Pour montrer que la formule s'étend à $u \in H^2(\Omega, \Delta^2)$ et $v \in H_0^2(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}), v \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \left| \int_{\Omega} \Delta(\Delta u) v \, d\Omega \right| &\underset{C.S.}{\leq} \|\Delta(\Delta u)\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^2(\Omega, \Delta^2)} \|v\|_{H^2} \\ \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}), v \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \left| \int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, d\Omega \right| &\underset{C.S.}{\leq} \|\Delta u\|_{L^2} \|\Delta v\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^2(\Omega, \Delta^2)} \|v\|_{H^2} \end{aligned}$$

D'après le théorème de prolongement par densité du cours, la formule de Green s'étend à $u \in H^2(\Omega, \Delta^2)$ et $v \in H_0^2(\Omega)$.

Question 3. Montrer que si u est solution de (3) alors u vérifie la formulation variationnelle

Trouver $u \in H_0^2(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H_0^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} (\Delta u \Delta v + \alpha \nabla u \cdot \nabla v + \beta uv) \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega.$$

Corrigé de la question 3. Soit u solution de (3) et soit $v \in H_0^2(\Omega)$, on multiplie l'EPD par v puis on intègre sur Ω , on obtient

$$\int_{\Omega} (\Delta^2 u v + \alpha \Delta uv + \beta uv) \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega.$$

En utilisant la formule de Green (corollaire 2bis de l'Amphi 1) avec $u, v \in H_0^2(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} \Delta uv \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega.$$

En utilisant l'EDP, on a que $\Delta^2 u = \alpha \Delta u - \beta u + f \in L^2(\Omega)$, car $u \in H^2(\Omega)$, on peut donc utiliser la question 2, on obtient

$$\int_{\Omega} \Delta^2 u v \, d\Omega = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, d\Omega.$$

En combinant les deux précédentes relations, on obtient la formulation variationnelle suivante : trouver $u \in H_0^2(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H_0^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} (\Delta u \Delta v + \alpha \nabla u \cdot \nabla v + \beta uv) \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega.$$

Question 4. Montrer que cette formulation variationnelle est équivalente à (3).

Cette question nécessite la connaissance de la notion de dérivée au sens des distributions, elle ne me semble pas accessible pour $\alpha \neq 0$ si on ne connaît que la dérivée au sens faible L^2 .

Corrigé de la question 4. Soit $u \in H_0^2(\Omega)$ solution de la formulation variationnelle, d'après la question 1, on a que $u|_{\partial\Omega} = 0$ et $\nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$. Ensuite en testant contre une fonction $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et en prenant l'intégrale au sens des distributions, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\Delta u \Delta \varphi + \alpha \nabla u \cdot \nabla \varphi + (\beta u - f) \varphi) \, d\Omega, \\ &= \langle \Delta u, \Delta \varphi \rangle + \langle \alpha \nabla u, \nabla \varphi \rangle + \langle \beta u - f, \varphi \rangle, \\ &= \langle \Delta^2 u, \varphi \rangle - \langle \alpha \Delta u, \varphi \rangle + \langle \beta u - f, \varphi \rangle, \\ &= \langle \Delta^2 u - \alpha \Delta u + \beta u - f, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

ce qui donne $\Delta^2 u - \alpha \Delta u + \beta u = f$ au sens des distributions. Comme $u \in H_0^2(\Omega)$, on a également que $\Delta^2 u = \alpha \Delta u - \beta u + f \in L^2(\Omega)$ et donc presque partout dans Ω .

Question 5. Montrer en raisonnant par densité que

$$\forall u, v \in H_0^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) d\Omega.$$

Corrigé de la question 5. Soit $u, v \in \mathcal{D}(\Omega)$, on calcule

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, d\Omega &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) d\Omega, \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} d\Omega, \end{aligned}$$

ensuite, en utilisant la Formule de Green, on obtient (u et v étant dans $\mathcal{D}(\Omega)$, il n'y a pas de termes de bord)

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} d\Omega,$$

de même

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} d\Omega,$$

ce qui donne

$$\int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) d\Omega.$$

Finalement, par densité on obtient le résultat pour $u, v \in H_0^2(\Omega)$, car les deux côtés de l'égalité sont continues dans $H^2(\Omega)$.

Question 6. Montrer que la formulation variationnelle admet une unique solution dans $H_0^2(\Omega)$. Que se passe-t-il pour $\beta = 0$?

Corrigé de la question 6. On utilise le théorème de Lax-Milgram sur l'espace de Hilbert $H_0^2(\Omega)$:

— La forme linéaire est continue :

$$|\ell(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^2(\Omega)}.$$

— La forme bilinéaire est continue :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} + \alpha \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \beta \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}, \\ &\leq (4 + \alpha + \beta) \|u\|_{H^2(\Omega)} \|v\|_{H^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

— La forme bilinéaire est coercive :

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} (\Delta u)^2 + \alpha |\nabla u|^2 + \beta u^2 \, d\Omega, \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 + \alpha |\nabla u|^2 + \beta u^2 \, d\Omega, \quad \text{d'après la question 5,} \\ &\geq \min(1, \alpha, \beta) \|u\|_{H^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

et comme $\alpha, \beta > 0$, la constante $\min(1, \alpha, \beta) > 0$.

On peut appliquer le théorème de Lax-Milgram, on a ainsi l'existence d'une unique solution dans $H_0^2(\Omega)$ de la formulation variationnelle.

Si $\beta = 0$, cela ne modifie que la forme bilinéaire, pour la continuité le même calcul que précédemment donne $|a(u, v)| \leq (4 + \alpha) \|u\|_{H^2(\Omega)} \|v\|_{H^2(\Omega)}$. En ce qui concerne la coercivité de a , comme $u \in H_0^2(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, en utilisant l'inégalité de Poincaré

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

avec la constante $C_p > 0$, on obtient que a est coercive :

$$a(u, u) \geq \min \left(1, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2C_p^2} \right) \|u\|_{H^2(\Omega)}^2.$$

À nouveau, on peut encore appliquer le théorème de Lax-Milgram et il existe une unique solution à la formulation variationnelle.

Question 7. Expliquer pourquoi on ne peut pas utiliser les éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}^1$ introduits en cours pour résoudre numériquement le problème.

En vous restreignant à la dimension 1, proposer un autre espace de dimension finie.

Corrigé de la question 7. On se donne un maillage $\mathcal{T}_h$ du domaine Ω composé de triangles. Il y a plusieurs façons de voir que les éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}^1$ ne fonctionnent pas pour résoudre des EDP avec le Laplacien. On rappelle que l'espace de discrétisation est

$$V_h = \{u \in C^0(\overline{\Omega}) \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, u|_K \in \mathbb{P}^1\}.$$

- On a vu que $V_h \subset H^1$ dans le cours mais V_h n'est pas un sous-espace de H^2 , la continuité ne suffit pas.
- De manière plus pragmatique, si on utilise les éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}^1$, la matrice correspondant au terme $\int_{T_\ell} \Delta u \Delta v d\Omega$ est nul sur chaque triangle, car le Laplacien d'une fonction affine est nul. Donc, il nous manquerait un terme dans l'écriture matricielle de la formulation variationnelle.

En dimension 1, on a un intervalle $[a, b]$, que l'on discrétise en sous-intervalles $a = a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$. Chercher des fonctions dans $H_0^2(a, b)$ revient à chercher des fonctions $\mathcal{C}^1$. En effet si $u \in H^2$, alors $u \in H^1((a, b)) \subset C^0([a, b])$ et $u' \in H^1((a, b)) \subset C^0([a, b])$. On va donc choisir

$$\tilde{V}_h = \left\{ u \in C^1([a, b]) \mid \forall i, u|_{(a_i, a_{i+1})} \in \mathbb{P}^k \right\}.$$

On doit encore trouver le degré du polynôme, en sachant qu'on doit raccorder valeurs et dérivées en chaque point. Il est donc naturel de prendre $k = 3$.

Pour les fonctions de base, on peut choisir

$$\forall i, w_i(a_j) = w'_i(a_j) = \tilde{w}_i(a_j) = \tilde{w}'_i(a_j) = 0 \text{ si } i \neq j, \quad w_i(a_i) = \tilde{w}'_i(a_i) = 1, \quad w'_i(a_i) = \tilde{w}_i(a_i) = 0.$$

Il y a donc deux fonctions de base par sommet. Pour $\tilde{V}_h^0 := \tilde{V}_h \cap H_0^2(a, b)$, il suffit de retirer les 4 fonctions de base associées à a et b .

Remarque : En dimension 2, il est possible d'étendre ce qu'on a fait en dimension 1. On cherche un espace de dimension finie composé de fonctions polynomiales par morceaux telle que au travers de chaque arête entre deux triangles les traces et traces normales des fonctions coïncident. Le plus petit degré pour lequel, c'est possible est 5 voir les éléments finis de Argyris (<https://defelement.com/elements/argyris.html>).