ENSTA 2ème année, Cours ANN201

Lundi 24 octobre 2022

Contrôle de connaissances. Durée : 2 heures

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.

Les deux exercices sont indépendants l'un de l'autre.
On notera dans tout l'examen C une constante générique qui peut être différente d'une question à une autre.
On rappelle que pour tout ouvert borné $\mathcal{O}$ à frontière suffisamment régulière,

$$\exists C_p > 0,\ \forall v \in H^1(\mathcal{O}), \quad \|v\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq C_p \left(\|\nabla v\|_{L^2(\mathcal{O})} + \|v\big|_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)} \right).$$

où Γ coincide avec la frontière $\partial\mathcal{O}$ ou seulement une partie de la frontière $\partial\mathcal{O}$ de mesure non nulle.

Exercice 1 : Traitement des conditions aux limites de Dirichlet non homogènes

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ $(n \leq 3)$, dont la frontière $\partial\Omega$ est "suffisamment régulière".
Dans tout ce qui suit, nous supposerons que $f \in L^2(\Omega)$ et que g est "assez régulière". Nous noterons u l'unique solution de
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

La frontière et la donnée g sont supposées assez régulières pour que u soit dans $H^2(\Omega)$. Ceci implique notamment que $p = \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$, ce qui sera important dans l'étude.
Soit ε un réel strictement positif, tel que $\varepsilon < 1$. On considère le problème (FV_ε) suivant

Trouver $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v \, d\Omega + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} u_\varepsilon v \, d\Gamma = \int_\Omega f v d\Omega + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} g v \, d\Gamma. \tag{FV_ε}$$

Question 1.

a. Montrer que la forme bilinéaire apparaissant dans (FV_ε) est coercive avec une constante de coercivité qui est indépendante de ε.
b. Montrer que le problème (FV_ε) est bien posé. On explicitera les constantes de continuité en fonction de ε, si elles en dépendent.
c. Montrer que l'unique solution de (FV_ε) dépend continûement des données f, g et ε.

Question 2

a. Retrouver le problème aux limites (l'EDP et la condition aux limites) satisfait par u_ε.
b. Montrer l'équivalence entre le problème aux limites obtenu à la question précédente et la formulation variationnelle (FV_ε).

Question 3

Montrer que l'on a pour u solution de (1)

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} uv \, d\Gamma = \int_\Omega fv \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} pv \, d\Gamma + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} gv \, d\Gamma, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{2}$$

Question 4

Posons $v_\varepsilon = u - u_\varepsilon$. Montrer que :

$$\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 \, d\Omega + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} |v_\varepsilon|^2 \, d\Gamma = \int_{\partial\Omega} pv_\varepsilon \, d\Gamma$$

et en déduire les deux inégalités suivantes : $\exists C > 0$, indépendante de ε telle que :

$$\|v_\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C \|p\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{L^2(\partial\Omega)} \text{ et } \|v_\varepsilon\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \varepsilon \|p\|_{L^2(\partial\Omega)}. \tag{3}$$

Question 5

En déduire l'estimation : $\exists C > 0$, indépendante de ε telle que

$$\|u - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon} \, \|p\|_{L^2(\partial\Omega)}. \tag{4}$$

Commenter ce résultat.

On se propose de calculer par éléments finis une approximation u_ε^h de u_ε.

On note V_h l'espace des éléments finis de Lagrange P^1, associé à un maillage $\mathcal{T}_h$ de pas h.

Question 6

a. Ecrire la formulation variationnelle discrète $\left(FV_\varepsilon^h\right)$ posée dans V_h. Montrer que cette formulation variationnelle discrète est bien posée.
b. Introduire la base naturelle de V_h associée aux sommets du maillage et écrire $\left(FV_\varepsilon^h\right)$ sous la forme d'un système linéaire.
c. En quoi la résolution de ce problème diffère-t-elle de la résolution du problème (1) proposée dans le cours ?

Question 7

a. Redémontrer le lemme de Céa pour (FV_ε), c'est à dire qu'il existe une constance $C > 0$ (que l'on explicitera) indépendante de V_h telle que

$$\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\|_{H^1(\Omega)} \leq C\frac{1}{\varepsilon} \inf_{v_h \in V_h} \|u_\varepsilon - v_h\|_{H^1(\Omega)}$$

b. En utilisant le cours, en déduire que si $u_\varepsilon \in H^2(\Omega)$ alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que

$$\|u - u_\varepsilon^h\|_{H^1(\Omega)} \leq C\left(\frac{h}{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon}\right).$$

Question 8

Pour approcher la solution d'un problème de Dirichlet non homogène, il est donc possible de passer par le problème (FV_ε) : c'est la méthode de pénalisation. Commenter les avantages et les inconvénients de cette méthode.

Exercice 2 : Un problème de conduction

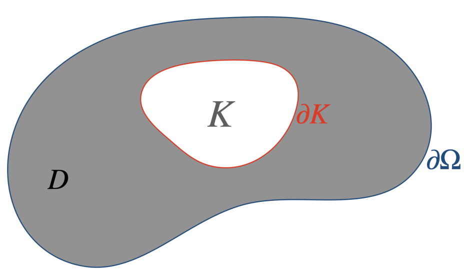
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et K un compact connexe de $\mathbb{R}^n$ inclus dans Ω, telle que la frontière de $\Omega \setminus K$ est "suffisamment régulière". On suppose que $\partial\Omega \cap \partial K = \emptyset$.

On considère un problème de conduction thermique dans $D = \Omega \setminus K$ où K est une inclusion parfaitement conductrice (ce qui signifie que la température est constante, mais inconnue). Ce problème se modélise par

Trouver $u \in H^1(D)$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } D, \\ u \text{ est constante} & \text{sur } \partial K, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\Gamma = 0, & \end{cases} \tag{5}$$

avec la donnée $f \in L^2(D)$.



Question 1

On introduit l'espace vectoriel

$$V = \{u \in H^1(D), \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega,\ u \text{ est constante sur } \partial K\}.$$

Montrer que muni de la norme de $H^1(D)$, V est un espace de Hilbert.

Question 2.

Montrer que si u satisfait (5) alors

$$\forall v \in V, \quad \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n} v = 0$$

Question 3

Donner la formulation variationnelle vérifiée par une solution u de (5).

Question 4

a. Montrer que cette formulation variationnelle est bien posée dans V.
b. Montrer que son unique solution dépend continûment des données.

Question 5

Montrer que la solution de la fomulation variationnelle obtenue à la question 3 vérifie le problème aux limites (5).

Question 6

Proposer un espace de dimension finie $\tilde{V}_h \subset V$, construit à partir de l'espace des éléments finis de Lagrange P^1 vu en cours. On pourra par exemple construire une base de $\tilde{V}_h$.