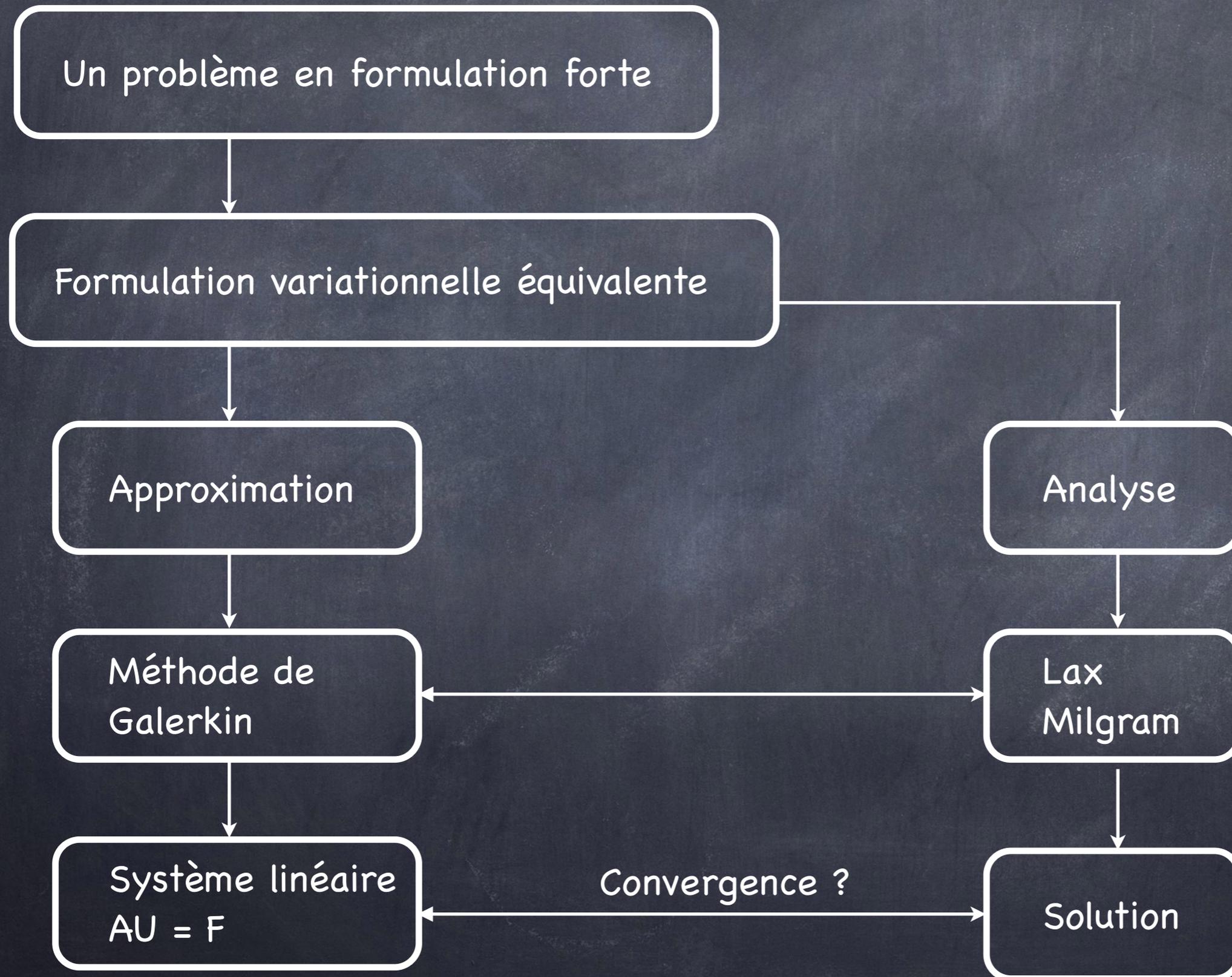


La méthode des éléments finis

Convergence de la méthode

Sonia FLISS

Quelques rappels...

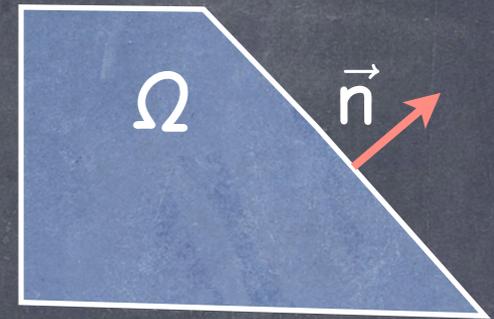


Problème modèle

Trouver $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ telle que (avec $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert polygonal)

$$-\operatorname{div}(\sigma \vec{\nabla} \mathbf{u}) + \mathbf{u} = f \quad \text{dans } \Omega$$

$$\sigma \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$



avec $f \in L^2(\Omega)$ et $\sigma \in L^\infty(\Omega)$, avec $\sigma(x) \geq \sigma_0 > 0$ p.p. tout $x \in \Omega$.

Ce problème est **équivalent** à la formulation variationnelle (voir amphi 2)

Trouver $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\int_{\Omega} \left(\sigma \vec{\nabla} \mathbf{u} \vec{\nabla} \mathbf{v} + \mathbf{u} \mathbf{v} \right) d\Omega = \int_{\Omega} f \mathbf{v} d\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)$$

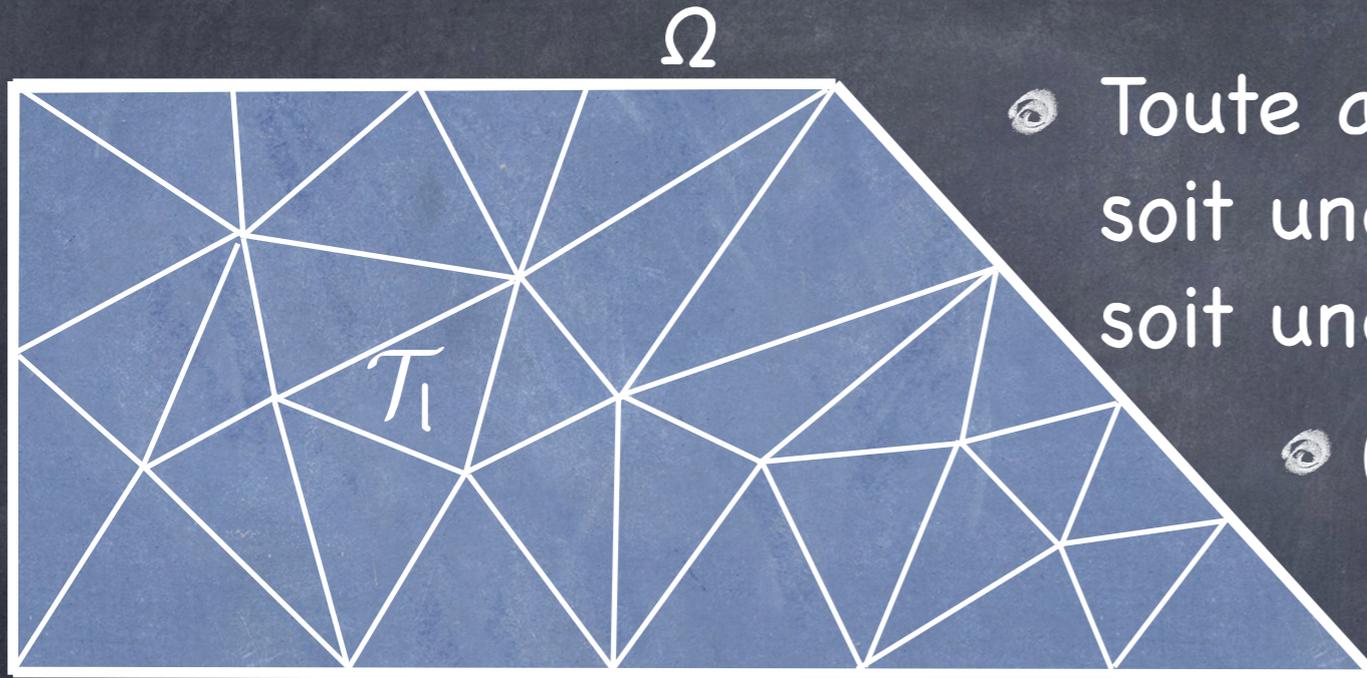
On vérifie que le théorème de Lax-Milgram s'applique (voir amphi 3).

Dans la suite, on note la forme bilinéaire

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \left(\sigma \vec{\nabla} \mathbf{v} \vec{\nabla} \mathbf{w} + \mathbf{v} \mathbf{w} \right) d\Omega$$

Discrétisation

Maillage

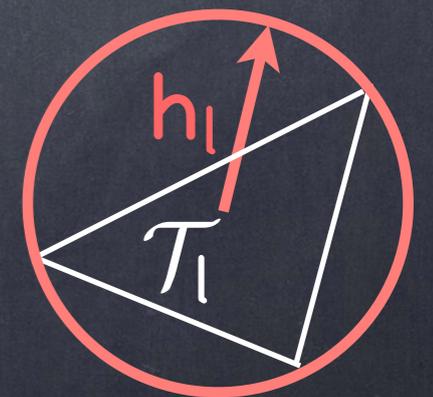


- Toute arête d'un triangle est soit une arête d'un autre triangle, soit une arête portée par la frontière
- $(\overset{\circ}{\mathcal{T}}_l \neq \emptyset)$
- $\overset{\circ}{\mathcal{T}}_l \cap \overset{\circ}{\mathcal{T}}_{l'} = \emptyset$ si $l \neq l'$
- $\bigcup_l \mathcal{T}_l = \bar{\Omega}$

On notera le pavage de $\bar{\Omega}$ composé de triangles : $\mathfrak{T}_h = (\mathcal{T}_l)_{l \in \llbracket 1, N_{\text{tri}} \rrbracket}$

Pas du maillage h (qui sera amené à tendre vers 0)

$h = \max_{1 \leq l \leq N_{\text{tri}}} h_l$ où h_l est le rayon du plus petit cercle contenant \mathcal{T}_l



On introduit également pour chaque triangle \mathcal{T}_l

ρ_l est le rayon du plus grand cercle inclus dans \mathcal{T}_l



Discrétisation

Maillage

Hypothèse sur les maillages

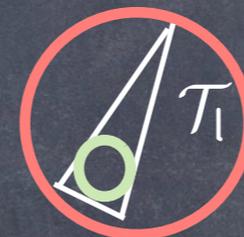
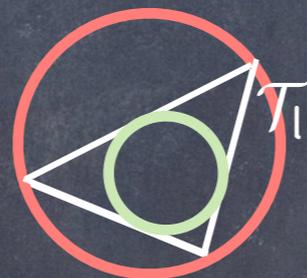
On suppose que la famille de maillage $(\mathcal{T}_h)_h$ est régulière

$$\exists \delta, \quad \forall \mathcal{T}_h, \quad \forall l, \quad \frac{h_l}{\rho_l} \leq \delta$$

Remarque: en 2D, cette hypothèse est équivalente à la condition angulaire

$$\exists \theta_0 > 0, \quad \forall h > 0, \quad \forall T_\ell \in \mathcal{T}_h, \quad \theta_{T_\ell} \geq \theta_0 \quad (\theta_{T_\ell} \text{ plus petit angle de } T_\ell)$$

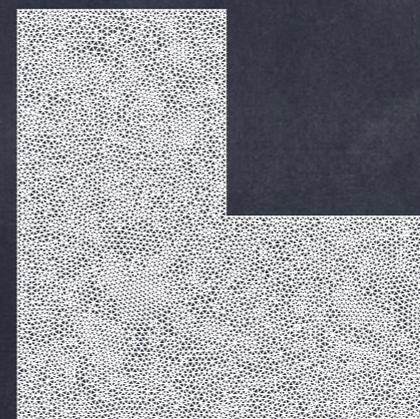
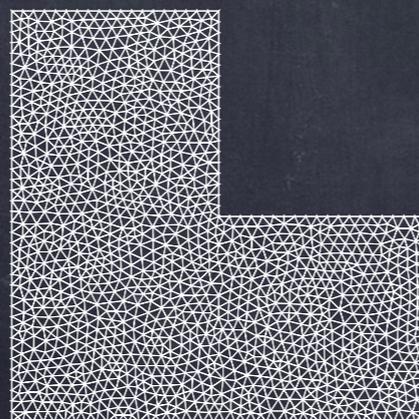
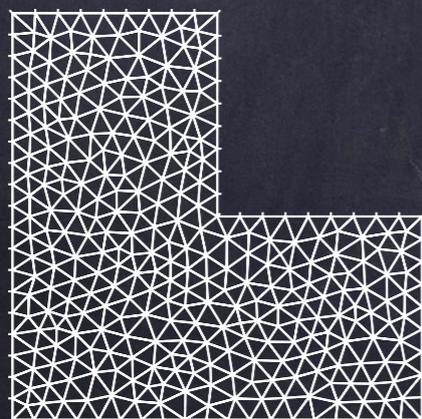
Triangle non aplati



Triangle aplati \rightarrow dégénéré

• Cette hypothèse est tout aussi importante en pratique que pour l'analyse de convergence.

Exemple:



Discrétisation

F.V. discrète et lemme de Céa

Soit $u \in H^1(\Omega)$ solution de

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $a(u, v) = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (\text{F.V.})$

Soit $u_h \in V_h^k$ solution de

Trouver $u_h \in V_h^k$ telle que $a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h \, d\Omega, \quad \forall v_h \in V_h^k \quad (\text{F.V.}_h^k)$

où à un maillage \mathcal{T}_h donné, on associe l'espace de discrétisation

$$V_h^k = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), \quad \forall I \in \{1, \dots, N_{\text{tri}}\}, v_h|_{\mathcal{T}_I} \in \mathbb{P}^k\}$$

où \mathbb{P}^k est l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus k .

Discrétisation

F.V. discrète et lemme de Céa

Soit $u \in H^1(\Omega)$ solution de

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $a(u, v) = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (\text{F.V.})$

Soit $u_h \in V_h^k$ solution de

Trouver $u_h \in V_h^k$ telle que $a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h \, d\Omega, \quad \forall v_h \in V_h^k \quad (\text{F.V.}_h^k)$

Lemme de Céa

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M_a}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h^k} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}$$

où M_a est la constante de continuité et α celle de coercivité de a .

Preuve : 1. a est coercive et $u - u_h \in H^1(\Omega) \Rightarrow a(u - u_h, u - u_h) \geq \alpha \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2$

2. $\forall v_h \in V_h^k \subset H^1(\Omega), u_h - v_h \in H^1(\Omega) \Rightarrow a(u, u_h - v_h) = \ell(u_h - v_h)$
 $u_h - v_h \in V_h^k \Rightarrow a(u_h, u_h - v_h) = \ell(u_h - v_h) \quad \Bigg| \Rightarrow a(u - u_h, u_h - v_h) = 0$

Conclusion: $\alpha \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) + a(u - u_h, u_h - v_h) = a(u - u_h, u - v_h)$
 $\leq M_a \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}$

$$\Rightarrow \boxed{\forall v_h \in V_h^k, \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq M_a/\alpha \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}}$$

Rappel $\exists M_a > 0, \forall v, w \in V, |a(v, w)| \leq M_a \|v\|_V \|w\|_V$ et $\exists \alpha > 0, \forall v \in V, a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$ 7

Discrétisation

F.V. discrète et lemme de Céa

Lemme de Céa

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M_a}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h^k} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}$$

où M_a est la constante de continuité et α celle de coercivité de a .

Proposition

On suppose qu'il existe un sous espace $W \subset H^1(\Omega)$ dense dans $H^1(\Omega)$ et une application $r_h : W \rightarrow V_h^k$ telle que

$$\forall w \in W, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|w - r_h(w)\|_{H^1(\Omega)} = 0,$$

alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = 0$$

Preuve : on va montrer que $\forall v \in V, \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V = 0$, puis il suffit d'utiliser le lemme de Céa.

Soient $v \in V$ et $\varepsilon > 0$, comme W est dense dans V , on sait que $\exists w \in W, \|v - w\|_V \leq \varepsilon/2$

Pour ce w , on sait que $\lim_{h \rightarrow 0} \|w - r_h(w)\|_V = 0$, i.e. $\exists h_0 > 0$, $\forall h \in]0, h_0[$, $\|w - r_h(w)\|_V \leq \varepsilon/2$

Ceci implique que $\forall h \in]0, h_0[$, $\|v - r_h(w)\|_V \leq \|v - w\|_V + \|w - r_h(w)\|_V \leq \varepsilon$

Comme $r_h(w) \in V_h$, on a $\forall h \in]0, h_0[$, $\inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V \leq \varepsilon$, $\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V = 0$,

Discrétisation

F.V. discrète et lemme de Céa

Lemme de Céa

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M_a}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h^k} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}$$

où M_a est la constante de continuité et α celle de coercivité de a .

Proposition

On suppose qu'il existe un sous espace $W \subset H^1(\Omega)$ dense dans $H^1(\Omega)$ et une application $r_h : W \rightarrow V_h^k$ telle que

$$\forall w \in W, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|w - r_h(w)\|_{H^1(\Omega)} = 0,$$

alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = 0$$

Corollaire

Pour notre problème modèle, on a convergence de la méthode EF

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = 0$$

Il suffit de choisir $W = C^\infty(\overline{\Omega})$ et d'utiliser ce que nous allons faire dans la suite pour la convergence dans W (avec $r_h = \Pi_h^k$).

Ce résultat est vrai pour toute solution $u \in H^1(\Omega)$ (sans hypothèse supplémentaire)

Discrétisation

Vitesse de convergence

Corollaire

Pour notre problème modèle, on a convergence de la méthode EF

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = 0$$

Pouvons nous être plus précis sur cette convergence ?

D'après le lemme de Céa

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M_a}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h^k} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}$$

En étudiant comment se comporte $\inf_{v_h \in V_h^k} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}$ vis à vis de h et k on va déterminer la **vitesse de convergence** de la méthode!

Definition : Vitesse de convergence

On dit que l'approximation converge à l'ordre β ($\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$) ssi

$$\exists C > 0, \quad \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^\beta$$

Ce résultat va dépendre de la régularité de u !

Discrétisation

Opérateur d'interpolation

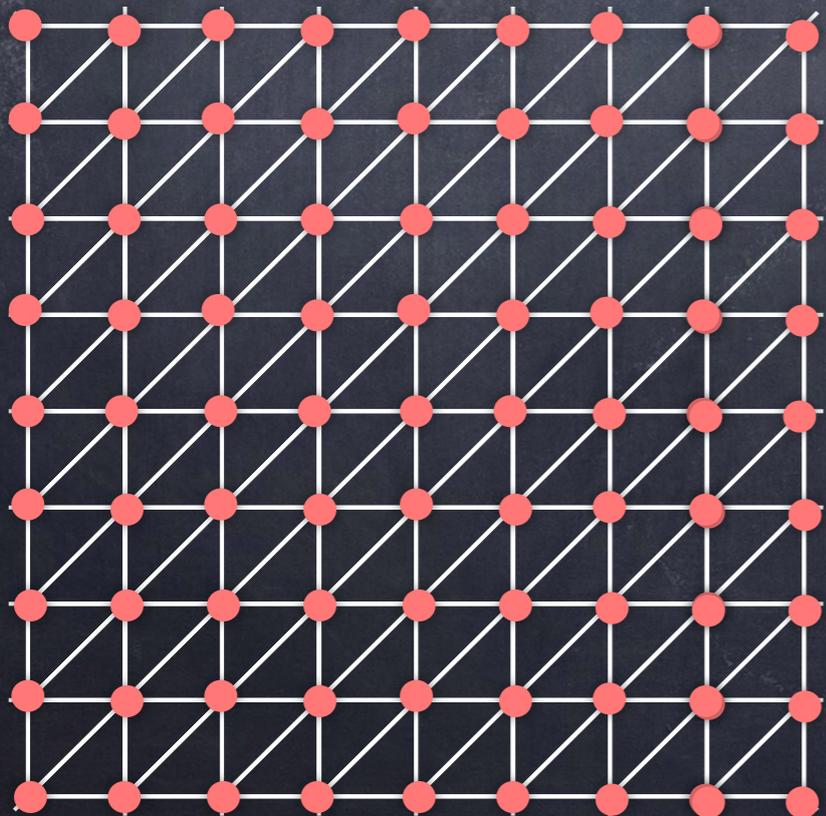
Definition : Opérateur d'interpolation

$$\begin{aligned} \Pi_h^k : C^0(\bar{\Omega}) &\rightarrow V_h^k \\ v &\mapsto \Pi_h^k v \text{ t.q. } (\Pi_h^k v)(x, y) = \sum_{j \in \llbracket 1, N_h^k \rrbracket} v(M_j) w_j(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega} \end{aligned}$$

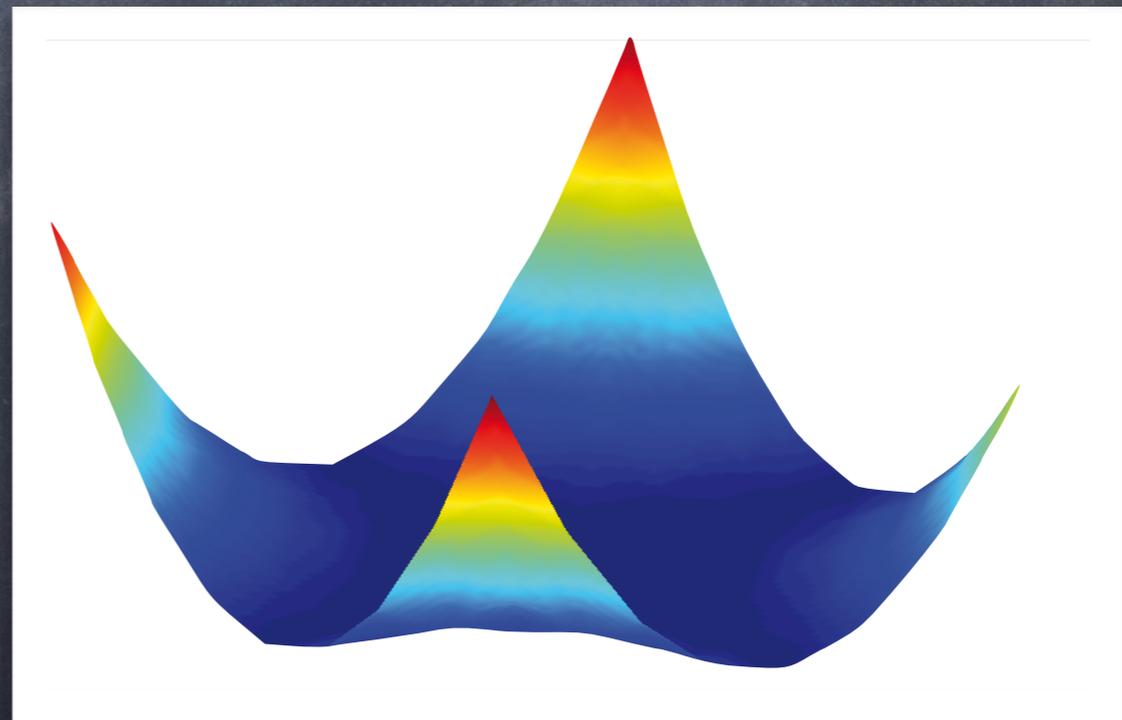
$\Pi_h^k v$ est l'unique fonction de V_h^k qui prend les mêmes valeurs que v aux noeuds $(M_i)_{i \in \llbracket 1, N_h^k \rrbracket}$.

Exemple Pour $v(x, y) = x^2 y^2$

\mathcal{T}_h



$(\Pi_h^1 v)(x, y)$



Les noeuds sont les sommets des triangles

Discrétisation

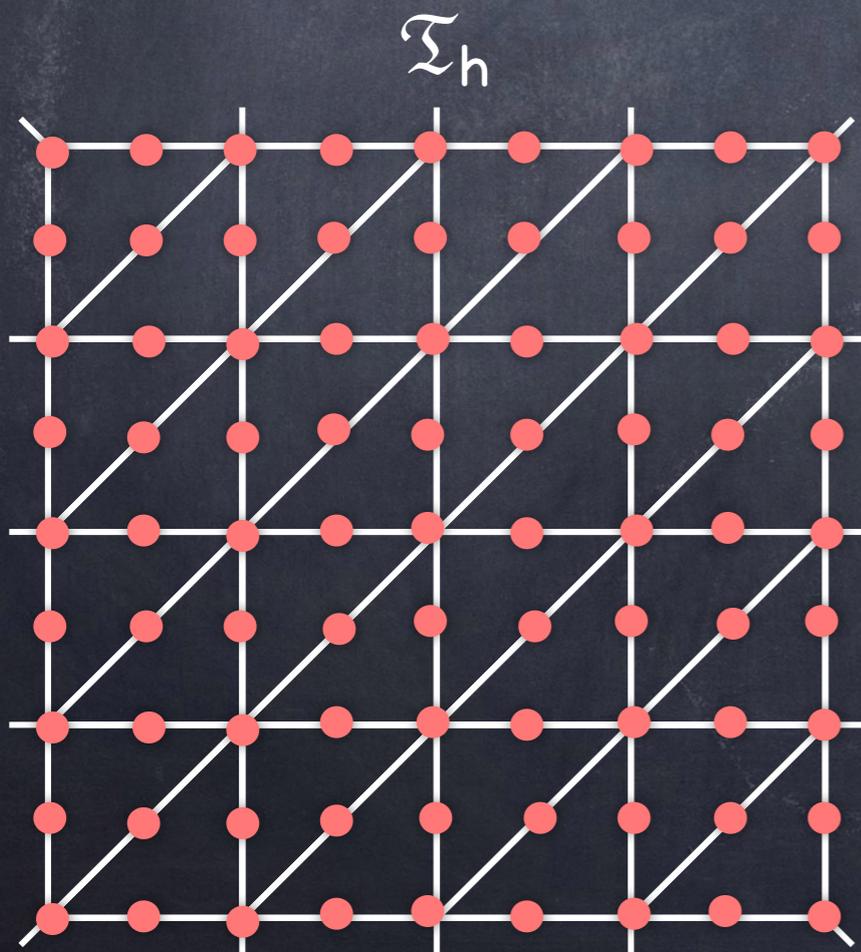
Opérateur d'interpolation

Definition : Opérateur d'interpolation

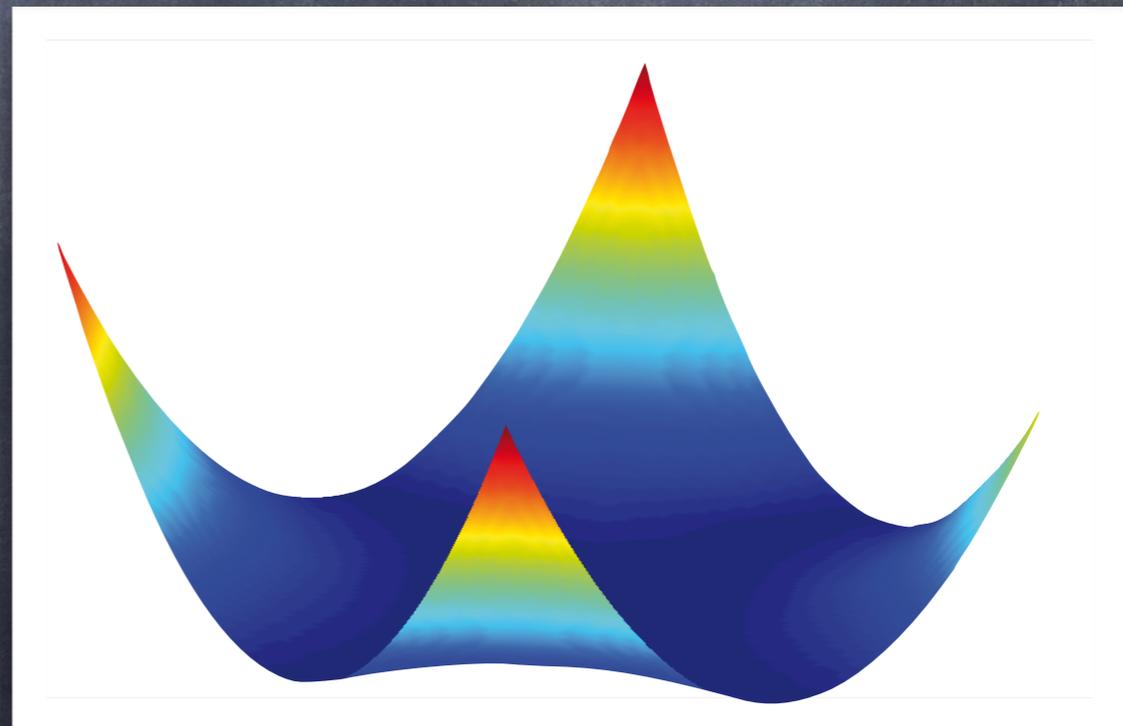
$$\begin{aligned} \Pi_h^k : C^0(\bar{\Omega}) &\rightarrow V_h^k \\ v &\mapsto \Pi_h^k v \text{ t.q. } (\Pi_h^k v)(x, y) = \sum_{j \in \llbracket 1, N_h^k \rrbracket} v(M_j) w_j(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega} \end{aligned}$$

$\Pi_h^k v$ est l'unique fonction de V_h^k qui prend les mêmes valeurs que v aux noeuds $(M_i)_{i \in \llbracket 1, N_h^k \rrbracket}$.

Exemple Pour $v(x, y) = x^2 y^2$



$(\Pi_h^2 v)(x, y)$



Les noeuds sont les sommets et le milieu des arêtes

Discrétisation

Opérateur d'interpolation

Definition : Opérateur d'interpolation

$$\begin{aligned} \Pi_h^k : C^0(\bar{\Omega}) &\rightarrow V_h^k \\ v &\mapsto \Pi_h^k v \text{ t.q. } (\Pi_h^k v)(x, y) = \sum_{j \in \llbracket 1, N_h^k \rrbracket} v(M_j) w_j(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega} \end{aligned}$$

$\Pi_h^k v$ est l'unique fonction de V_h^k qui prend les mêmes valeurs que v aux noeuds $(M_i)_{i \in \llbracket 1, N_h^k \rrbracket}$.

Proposition

Π_h^k est un opérateur de projection

$$\forall v_h \in V_h^k, \quad \Pi_h^k v_h = v_h$$

Remarque

On aimerait utiliser $v_h = \Pi_h^k u$ dans le lemme de Céa :

$$\inf_{v_h \in V_h^k} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u - \Pi_h^k u\|_{H^1(\Omega)}$$

Question : est ce que la solution u est dans $C^0(\bar{\Omega})$?

Discrétisation

Régularité de la solution

Proposition : Régularité des espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , à frontière **suffisamment régulière** et soit $m > \frac{n}{2} + k$ ($k \geq 0$) alors $H^m(\Omega)$ s'injecte continûment dans $C^k(\bar{\Omega})$:

$$H^m(\Omega) \subset C^k(\bar{\Omega}) \quad \forall u \in H^m(\Omega), \quad \|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} := \sup_{x \in \bar{\Omega}} \sum_{|\alpha| \leq k} |\partial_\alpha u(x)| \leq C \|u\|_{H^m(\Omega)}$$

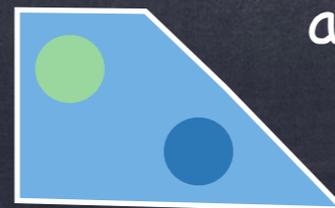
Remarque On en déduit

- si $\Omega \subset \mathbb{R}$, $H^1(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$, c'est faux si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ou $\Omega \subset \mathbb{R}^3$
- si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ou $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $H^2(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$

Proposition : Régularité des espaces de solutions

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , à frontière **suffisamment régulière** et si u est dans $H^1(\Omega)$, Δu est dans $L^2(\Omega)$ et $u = 0$ OU $\nabla u \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$ alors $u \in C^0(\bar{\Omega})$.

Remarque • Dans notre cas, si σ est suffisamment régulière ou si elle est constante par morceaux par « inclusions »



alors $u \in C^0(\bar{\Omega})$

Discrétisation

Vitesse de convergence

D'après le lemme de Céa

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M_a}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h^k} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}$$

On suppose que la solution u est dans $C^0(\bar{\Omega})$, on a donc

$$\inf_{v_h \in V_h^k} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u - \Pi_h^k u\|_{H^1(\Omega)}$$

On est donc ramené à étudier $\|u - \Pi_h^k u\|_{H^1(\Omega)}$, l'erreur d'interpolation.

On se ramène à l'étude d'erreurs d'interpolation locale

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_h^k u\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} (u - \Pi_h^k u)^2 d\Omega + \int_{\Omega} |\vec{\nabla}(u - \Pi_h^k u)|^2 d\Omega \\ &= \sum_{l=1}^{N_{\text{tri}}} \int_{\mathcal{T}_l} (u - \Pi_h^k u)^2 d\Omega + \sum_{l=1}^{N_{\text{tri}}} \int_{\mathcal{T}_l} |\vec{\nabla}(u - \Pi_h^k u)|^2 d\Omega \end{aligned}$$

Etude de $\|u - \Pi_h^k u\|_{H_1(\Omega)}$

Definition : Normes locales

$$|v|_{0,\mathcal{T}_l} = \left(\int_{\mathcal{T}_l} v^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}, \quad |v|_{1,\mathcal{T}_l} = \left(\int_{\mathcal{T}_l} |\nabla v|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}, \quad |v|_{n,\mathcal{T}_l} = \left(\int_{\mathcal{T}_l} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha|=n} (\partial_\alpha v)^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

Theoreme (Lemme de Bramble-Hilbert) (voir Proposition 2.5, p84)

Il existe une constante C indépendante de v et \mathcal{T}_l telle que

$$\forall v \in H^{k+1}(\mathcal{T}_l), \quad |v - \Pi_h^k v|_{0,\mathcal{T}_l} \leq C h_l^{k+1} |v|_{k+1,\mathcal{T}_l}$$

$$|v - \Pi_h^k v|_{1,\mathcal{T}_l} \leq C \frac{h_l^{k+1}}{\rho_l} |v|_{k+1,\mathcal{T}_l}$$

Etude de $\|u - \Pi_h^k u\|_{H_1(\Omega)}$

Preuve (1D, k=1): On suppose $v \in C^\infty([x_l, x_{l+1}])$ et on conclura par densité.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_l &= (x_l, x_{l+1}), \quad h_l = \rho_l = x_{l+1} - x_l, \quad F_l : \hat{\mathcal{T}} = (0, 1) \rightarrow \mathcal{T}_l = (x_l, x_{l+1}) \\ &\quad \hat{x} \mapsto x = h_l \hat{x} + x_l \end{aligned}$$

On pose $\hat{v}(\hat{x}) = v(F_l(\hat{x}))$

Un changement de variable dans les intégrales donne

$$|v|_{0, \mathcal{T}_l}^2 = h_l |\hat{v}|_{0, \hat{\mathcal{T}}}^2 \quad |v'|_{0, \mathcal{T}_l}^2 = \frac{1}{h_l} |\hat{v}'|_{0, \hat{\mathcal{T}}}^2 \quad |v''|_{0, \mathcal{T}_l}^2 = \frac{1}{h_l^3} |\hat{v}''|_{0, \hat{\mathcal{T}}}^2$$

Pour montrer le lemme de Bramble-Hilbert en 1D et pour k=1, il suffit donc de montrer qu'il existe $C > 0$

$$\forall \hat{v} \in C^\infty(0, 1), \quad \begin{aligned} |\hat{v} - \hat{\Pi}^1 \hat{v}|_{0, \hat{\mathcal{T}}} &\leq C |\hat{v}|_{2, \hat{\mathcal{T}}} \\ |\hat{v} - \hat{\Pi}^1 \hat{v}|_{1, \hat{\mathcal{T}}} &\leq C |\hat{v}|_{2, \hat{\mathcal{T}}} \end{aligned}$$

On montre que $\hat{\Pi}^1 \hat{v}(\hat{x}) = (\hat{v}(1) - \hat{v}(0)) \hat{x} + \hat{v}(0)$

$$(1) \quad \hat{v} - \hat{\Pi}^1 \hat{v} \in H_0^1(0, 1) \Rightarrow |\hat{v} - \hat{\Pi}^1 \hat{v}|_{0, \hat{\mathcal{T}}} \leq |\hat{v}' - (\hat{\Pi}^1 \hat{v})'|_{0, \hat{\mathcal{T}}} \quad (\text{Inégalité de Poincaré, voir Cours3-TD3})$$

$$(2) \quad (\hat{\Pi}^1 \hat{v})' = \int_0^1 \hat{v}' \Rightarrow \hat{v}' - (\hat{\Pi}^1 \hat{v})' \text{ est à moyenne nulle}$$

$$\Rightarrow |\hat{v}' - (\hat{\Pi}^1 \hat{v})'|_{0, \hat{\mathcal{T}}} \leq |\hat{v}'' - (\hat{\Pi}^1 \hat{v})''|_{0, \hat{\mathcal{T}}} = |\hat{v}''|_{0, \hat{\mathcal{T}}}$$

(Inégalité de Poincaré-Wirtinger, voir TD3)

Etude de $\|u - \Pi_h^k u\|_{H_1(\Omega)}$

Idées de la preuve dans le cas général :

- On l'utilise l'application affine qui transforme le triangle de référence en un triangle \mathcal{T}_l .



On pose $\hat{v}(\hat{x}) = v(F_l(\hat{x}))$

- On montre par un changement de variable que

$$|v - \Pi_h^k v|_{q, \mathcal{T}_l} \leq C \rho_l^{-q} |d\hat{F}_l|^{1/2} |\hat{v} - \hat{\Pi}^k \hat{v}|_{q, \hat{\mathcal{T}}}$$

$$|\hat{v}|_{k+1, \hat{\mathcal{T}}} \leq C h_l^{k+1} |d\hat{F}_l|^{-1/2} |v|_{k+1, \mathcal{T}_l}$$

Il reste à démontrer les inégalités pour le triangle de réf.

$$|\hat{v} - \hat{\Pi}^k \hat{v}|_{0, \hat{\mathcal{T}}} \leq C |\hat{v}|_{k+1, \hat{\mathcal{T}}}$$

$$|\hat{v} - \hat{\Pi}^k \hat{v}|_{1, \hat{\mathcal{T}}} \leq C |\hat{v}|_{k+1, \hat{\mathcal{T}}}$$

- Sur le triangle de référence, on utilise des inégalités de type Poincaré qui se démontre dans le cas général par l'absurde (en utilisant le théorème de Rellich (énoncé dans l'exo 5 du TD3))

Etude de $\|\mathbf{u} - \Pi_h^k \mathbf{u}\|_{H_1(\Omega)}$

On se ramène à l'étude d'erreurs d'interpolation locale

$$\|\mathbf{u} - \Pi_h^k \mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{u} - \Pi_h^k \mathbf{u})^2 d\Omega + \int_{\Omega} |\vec{\nabla}(\mathbf{u} - \Pi_h^k \mathbf{u})|^2 d\Omega$$

On suppose que $\forall l, \mathbf{u} \in H^{k+1}(\mathcal{T}_l)$ donc

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} - \Pi_h^k \mathbf{u}|_{0, \mathcal{T}_l} &\leq C h_l^{k+1} |\mathbf{u}|_{k+1, \mathcal{T}_l} \\ |\mathbf{u} - \Pi_h^k \mathbf{u}|_{1, \mathcal{T}_l} &\leq C \frac{h_l^{k+1}}{\rho_l} |\mathbf{u}|_{k+1, \mathcal{T}_l} \end{aligned}$$

$$\bullet |\mathbf{u} - \Pi_h^k \mathbf{u}|_{0, \mathcal{T}_l}^2 \leq C^2 h_l^{2k+2} |\mathbf{u}|_{k+1, \mathcal{T}_l}^2 \quad \cdot$$

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u} - \Pi_h^k \mathbf{u})^2 d\Omega = \sum_{l=1}^{N_{\text{tri}}} |\mathbf{u} - \Pi_h^k \mathbf{u}|_{0, \mathcal{T}_l}^2 \leq C^2 \sum_{l=1}^{N_{\text{tri}}} h_l^{2k+2} |\mathbf{u}|_{k+1, \mathcal{T}_l}^2 \leq C^2 h^{2k+2} \sum_{l=1}^{N_{\text{tri}}} |\mathbf{u}|_{k+1, \mathcal{T}_l}^2$$

$$\bullet |\mathbf{u} - \Pi_h^k \mathbf{u}|_{1, \mathcal{T}_l}^2 \leq C \frac{h_l^{2k+2}}{\rho_l^2} |\mathbf{u}|_{k+1, \mathcal{T}_l}^2 \quad \cdot$$

$$\int_{\Omega} |\vec{\nabla}(\mathbf{u} - \Pi_h^k \mathbf{u})|^2 d\Omega = \sum_{l=1}^{N_{\text{tri}}} |\mathbf{u} - \Pi_h^k \mathbf{u}|_{1, \mathcal{T}_l}^2 \leq C^2 \sum_{l=1}^{N_{\text{tri}}} \frac{h_l^{2k+2}}{\rho_l^2} |\mathbf{u}|_{k+1, \mathcal{T}_l}^2 \leq C^2 \delta^2 h^{2k} \sum_{l=1}^{N_{\text{tri}}} |\mathbf{u}|_{k+1, \mathcal{T}_l}^2$$

Rappel: On a supposé que la famille de maillage $(\mathcal{T}_h)_h$ est régulière

$$\exists \delta, \quad \forall \mathcal{T}_h, \quad \forall l, \quad \frac{h_l}{\rho_l} \leq \delta$$

Etude de $\|\mathbf{u} - \Pi_h^k \mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}$

On se ramène à l'étude d'erreurs d'interpolation locale

$$\|\mathbf{u} - \Pi_h^k \mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{u} - \Pi_h^k \mathbf{u})^2 d\Omega + \int_{\Omega} |\vec{\nabla}(\mathbf{u} - \Pi_h^k \mathbf{u})|^2 d\Omega$$

On suppose que $\forall l, \mathbf{u} \in H^{k+1}(\mathcal{T}_l)$ donc

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} - \Pi_h^k \mathbf{u}|_{0, \mathcal{T}_l} &\leq C h_l^{k+1} |\mathbf{u}|_{k+1, \mathcal{T}_l} \\ |\mathbf{u} - \Pi_h^k \mathbf{u}|_{1, \mathcal{T}_l} &\leq C \frac{h_l^{k+1}}{\rho_l} |\mathbf{u}|_{k+1, \mathcal{T}_l} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\mathbf{u} - \Pi_h^k \mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C^2 (\delta^2 + h^2) h^{2k} \sum_{l=1}^{N_{\text{tri}}} |\mathbf{u}|_{k+1, \mathcal{T}_l}^2$$

Rappel: On a supposé que la famille de maillage $(\mathcal{T}_h)_h$ est régulière

$$\exists \delta, \forall \mathcal{T}_h, \forall l, \frac{h_l}{\rho_l} \leq \delta$$

Convergence de la méthode

Théorème

Si la famille de maillage $(\mathcal{T}_h)_h$ est régulière, que l'espace de discrétisation est V_h^k et que

$$\forall \mathcal{T}_h, l \in \llbracket 1, N_{\text{tri}} \rrbracket, \mathbf{u} \in H^{k+1}(\mathcal{T}_l) \quad (\text{Régularité locale de la solution})$$

alors pour h assez petit

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_0 \|\mathbf{u} - \Pi_h^k \mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq C' h^k \left(\sum_{l=1}^{N_{\text{tri}}} |\mathbf{u}|_{k+1, \mathcal{T}_l}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Remarques : • Si $k=1$ (i.e. quand on utilise des éléments finis de Lagrange \mathbb{P}^1) et si

$$\forall \mathcal{T}_h, l \in \llbracket 1, N_{\text{tri}} \rrbracket, \mathbf{u} \in H^2(\mathcal{T}_l)$$

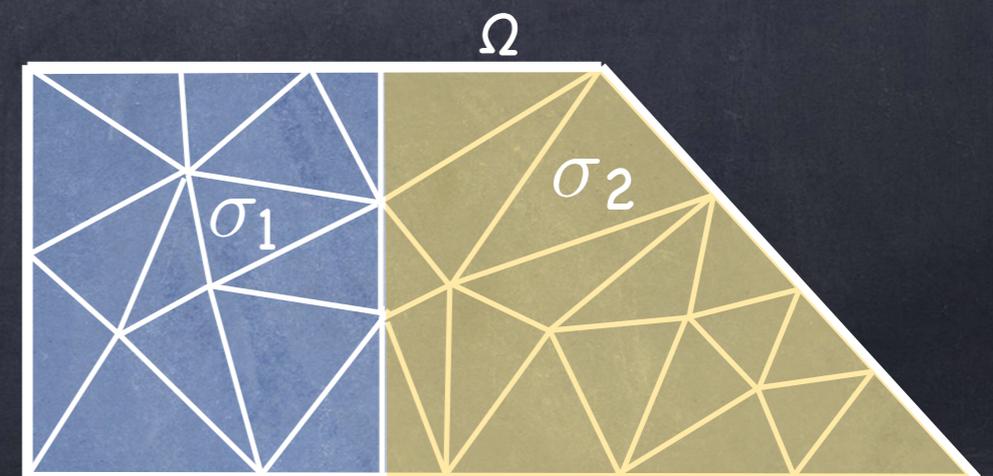
alors la méthode converge à l'ordre 1.

Exemples :

• σ est assez régulière ($\sigma \in C^1(\bar{\Omega})$) et Ω convexe
 $\Rightarrow \mathbf{u} \in H^2(\Omega) \Rightarrow \forall \mathcal{T}_h, l \in \llbracket 1, N_{\text{tri}} \rrbracket, \mathbf{u} \in H^2(\mathcal{T}_l)$

• $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ et $\sigma|_{\Omega_i} = \sigma_i = \text{cste} \Rightarrow \mathbf{u}|_{\Omega_i} \in H^2(\Omega_i)$
si $\forall \mathcal{T}_h, \forall l, \mathcal{T}_l \subset \bar{\Omega}_1$ ou $\mathcal{T}_l \subset \bar{\Omega}_2$

$$\Rightarrow \forall \mathcal{T}_h, l \in \llbracket 1, N_{\text{tri}} \rrbracket, \mathbf{u} \in H^2(\mathcal{T}_l)$$



Convergence de la méthode

Théorème

Si la famille de maillage $(\mathcal{T}_h)_h$ est régulière, que l'espace de discrétisation est V_h^k et que

$$\forall \mathcal{T}_h, l \in \llbracket 1, N_{\text{tri}} \rrbracket, \mathbf{u} \in H^{k+1}(\mathcal{T}_l) \quad (\text{Régularité locale de la solution})$$

alors pour h assez petit

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_0 \|\mathbf{u} - \Pi_h^k \mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq C' h^k \left(\sum_{l=1}^{N_{\text{tri}}} |\mathbf{u}|_{k+1, \mathcal{T}_l}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Remarques : • Si $k=1$ (i.e. quand on utilise des éléments finis de Lagrange \mathbb{P}^1) et si

$$\forall \mathcal{T}_h, l \in \llbracket 1, N_{\text{tri}} \rrbracket, \mathbf{u} \in H^2(\mathcal{T}_l)$$

alors la méthode converge à l'ordre 1.

• Par contre si on utilise des E.F. d'ordre au moins 2, une vitesse de convergence meilleure n'est pas garantie. Il faudrait que \mathbf{u} soit encore plus régulière.

• Si la solution n'est pas régulière, cette convergence n'implique pas une convergence ponctuelle de \mathbf{u} ou de ses dérivées.

Convergence de la méthode

Théorème

Si la famille de maillage $(\mathcal{T}_h)_h$ est régulière, que l'espace de discrétisation est V_h^k et que

$$\forall \mathcal{T}_h, l \in \llbracket 1, N_{\text{tri}} \rrbracket, \mathbf{u} \in H^{\mathbf{p}+1}(\mathcal{T}_l) \quad (\text{Régularité locale de la solution})$$

alors pour h assez petit

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C' h^\beta \left(\sum_{l=1}^{N_{\text{tri}}} |\mathbf{u}|_{\beta+1, \mathcal{T}_l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{où } \beta = \min(k, p)$$

Idée de la Preuve: • lorsque $\beta = k$, c'est le théorème précédent.

• lorsque $\beta = p \leq k$, on écrit $\inf_{v_h \in V_h^k} \|\mathbf{u} - v_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\mathbf{u} - \Pi_h^p \mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}$ et on refait la preuve du théorème précédent en remplaçant k par p dans les estimations.

Remarques : • La régularité de la solution peut limiter la vitesse de convergence.

Exemple : • σ est une constante et Ω a une géométrie en L

$$\Rightarrow \mathbf{u} \in H^s(\Omega) \Rightarrow \forall \mathcal{T}_h, l \in \llbracket 1, N_{\text{tri}} \rrbracket, \mathbf{u} \in H^s(\mathcal{T}_l) \quad \text{avec } s < 5/3$$

Même avec des E.F. de Lagrange \mathbb{P}^1 , la vitesse de convergence est de $2/3$.



Convergence de la méthode

Théorème

Si la famille de maillage $(\mathcal{T}_h)_h$ est régulière, que l'espace de discrétisation est V_h^k et que

$$\forall \mathcal{T}_h, l \in \llbracket 1, N_{\text{tri}} \rrbracket, \mathbf{u} \in H^{p+1}(\mathcal{T}_l) \quad (\text{Régularité locale de la solution})$$

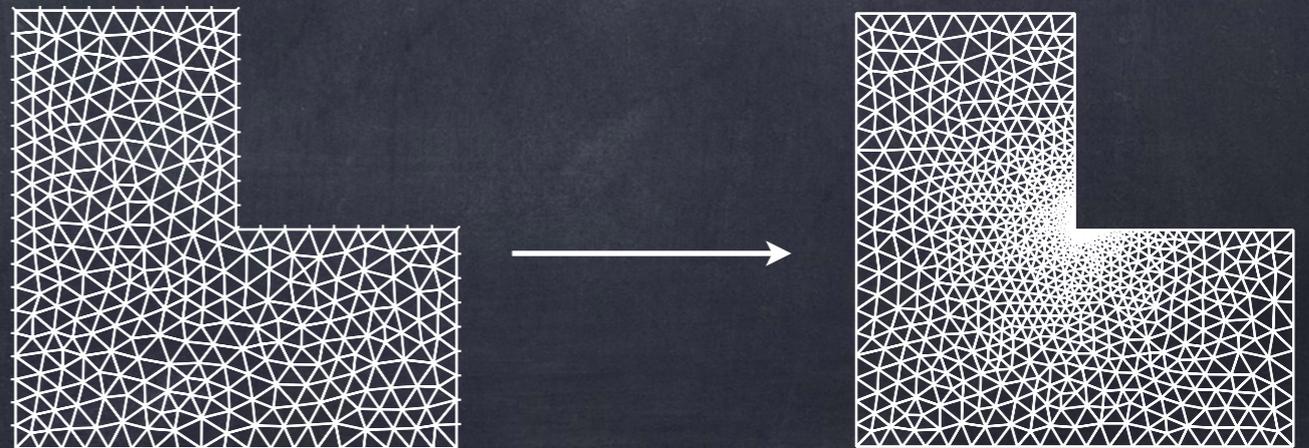
alors pour h assez petit

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C' h^\beta \left(\sum_{l=1}^{N_{\text{tri}}} |\mathbf{u}|_{\beta+1, \mathcal{T}_l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{où } \beta = \min(k, p)$$

Remarques : • Il faut donc prendre en compte la régularité de la solution avant de choisir l'ordre de l'espace de discrétisation.

• L'erreur sur la solution n'est pas uniforme sur le domaine!

Raffinement local du maillage : raffiner le maillage (prendre un h_l plus petit) là où \mathbf{u} varie beaucoup.



Convergence de la méthode

Théorème (Estimation en fonction de la donnée)

Soient Ω un domaine convexe, une famille régulière $(\mathcal{T}_h)_h$ de maillage, σ supposée assez régulière et le second membre $f \in L^2(\Omega)$.

Alors si $u_h \in V_h^1$ on a

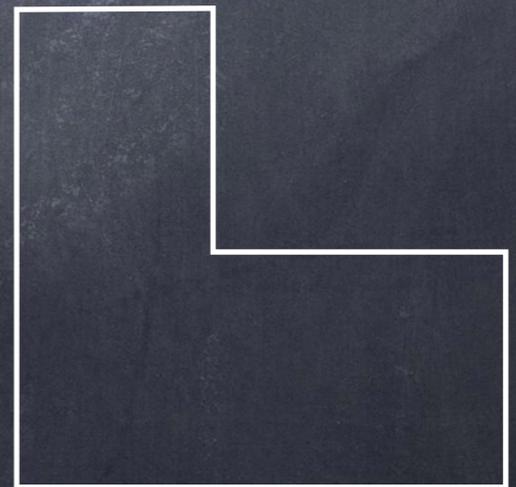
$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C h |u|_{2,\Omega}$$

et surtout

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C h \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

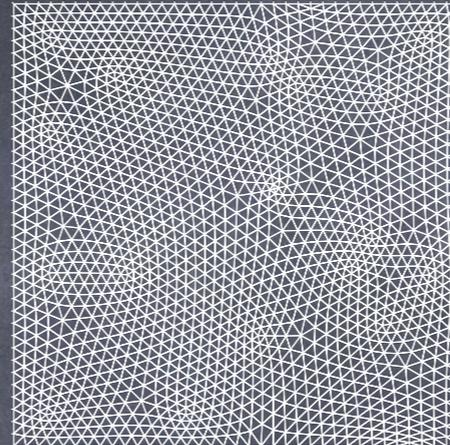
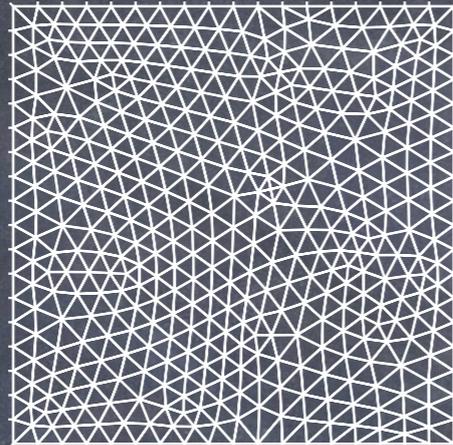
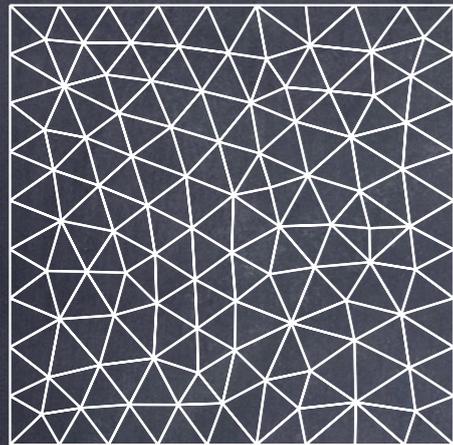
Remarque Ce résultat se généralise si u n'est pas aussi régulière...

$$\forall s \leq s_{\max} \leq 1 \quad \left| \begin{array}{l} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_s h^s |u|_{1+s,\Omega} \\ \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_s h^s \|f\|_{L^2(\Omega)} \end{array} \right.$$

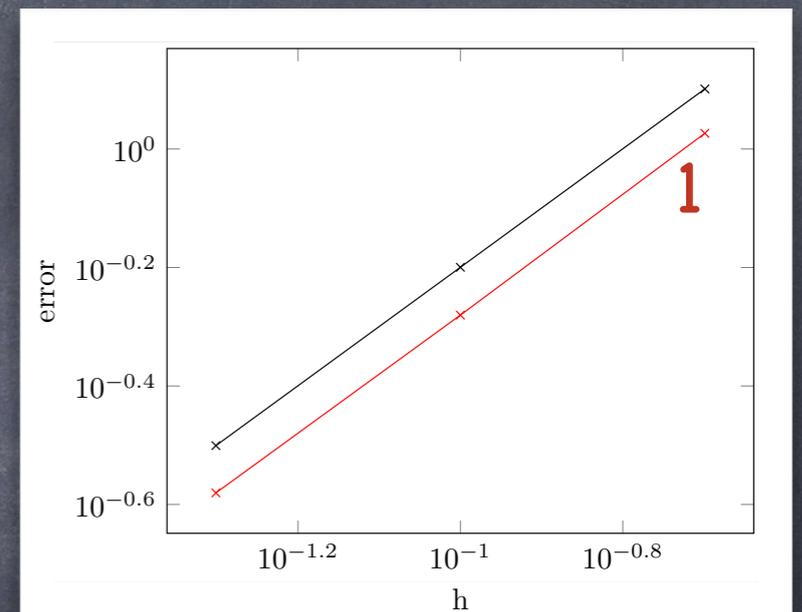
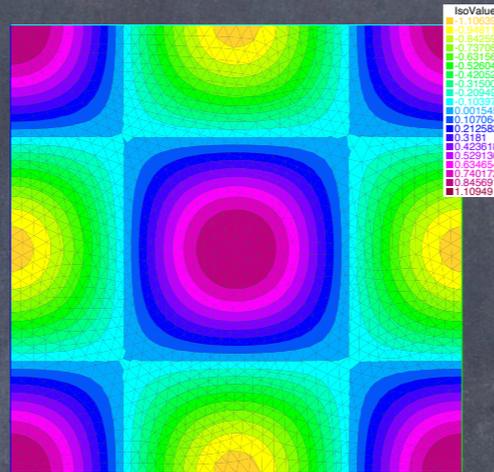
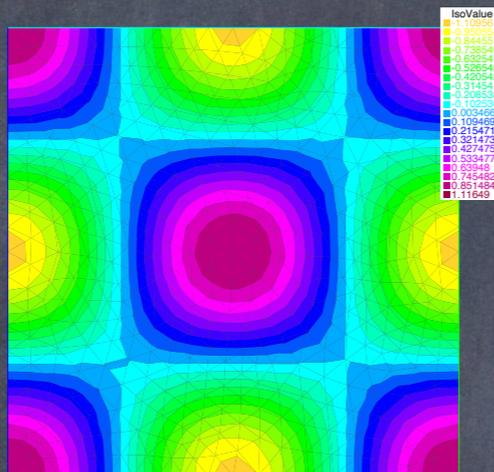
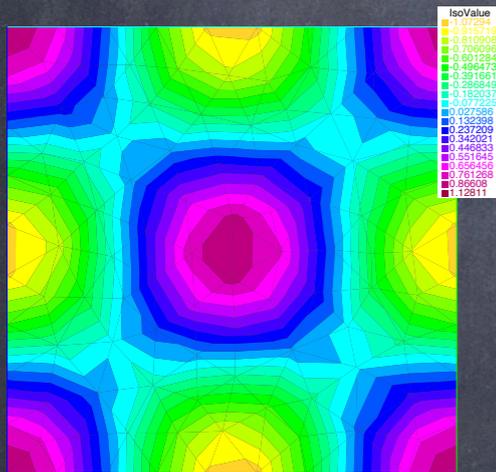


Dans les transparents suivants, on suppose les hypothèses de ce théorème vérifiées.

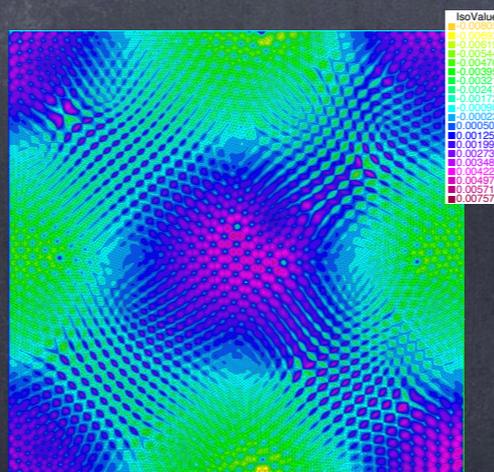
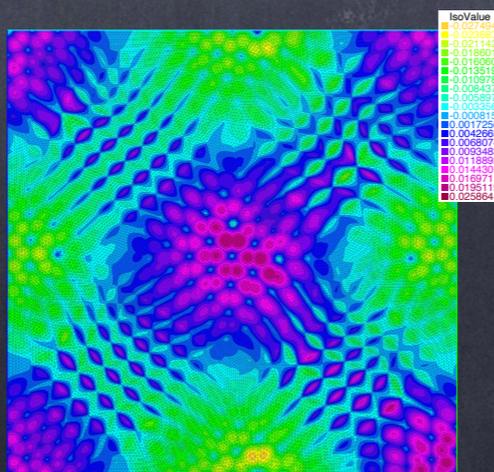
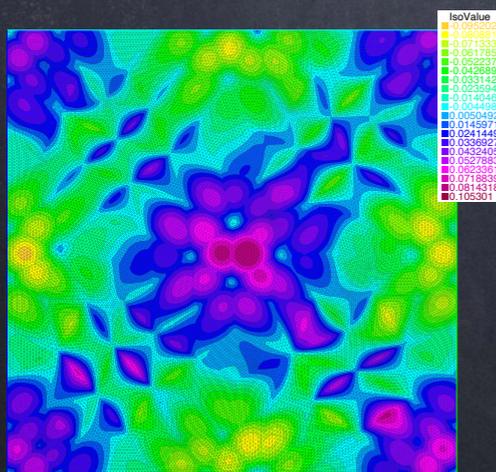
Exemple numérique $f(x, y) = (2\pi^2 + 1) \cos(\pi x) \cos(\pi y)$



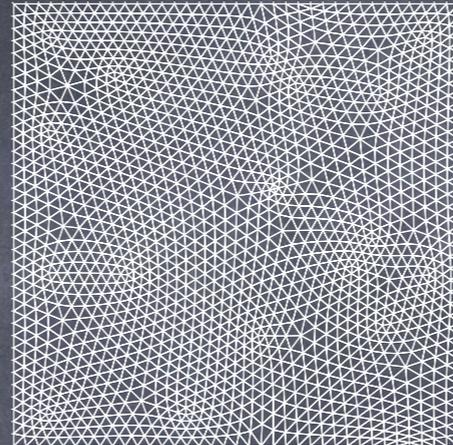
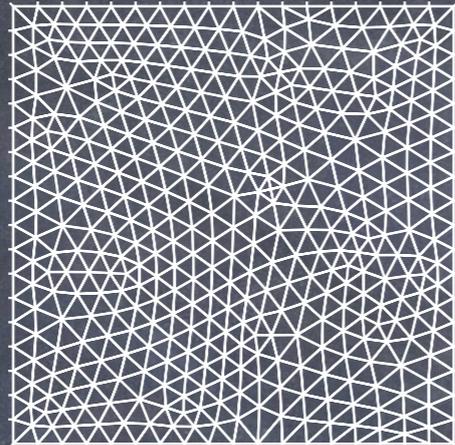
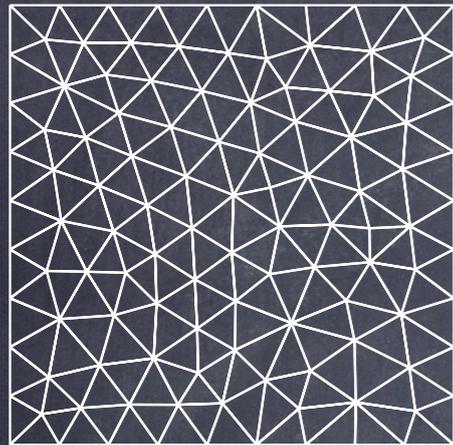
EF de Lagrange P1



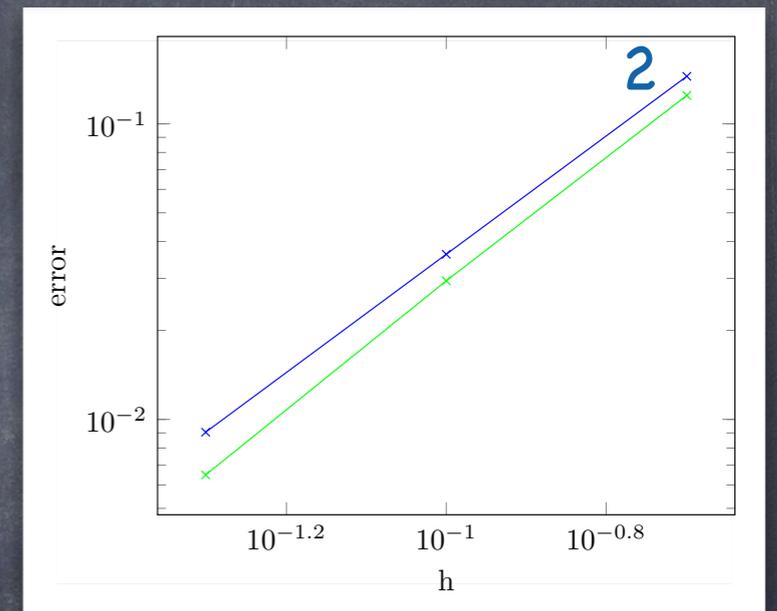
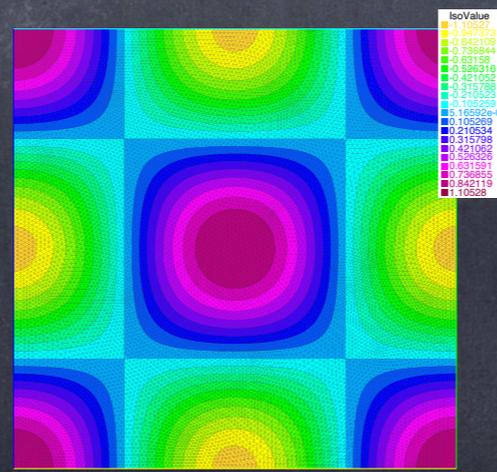
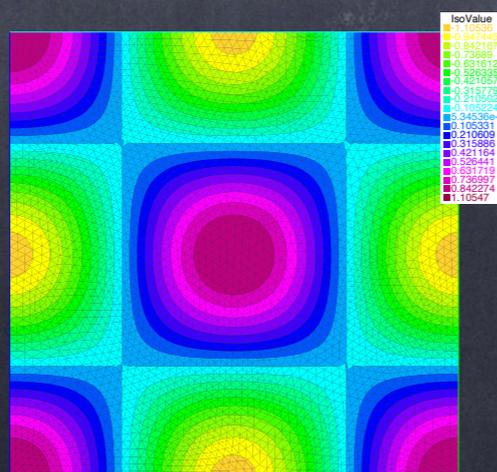
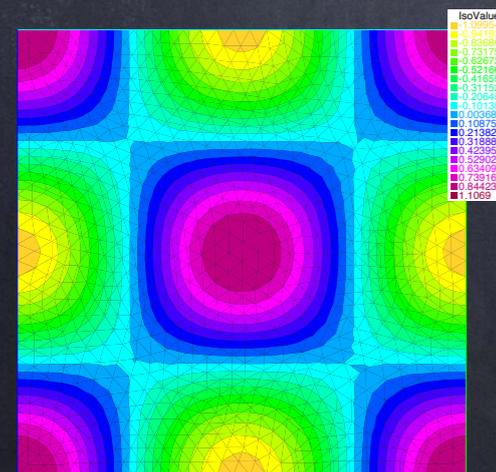
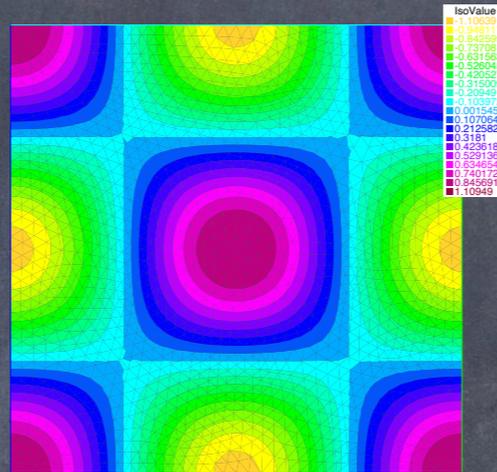
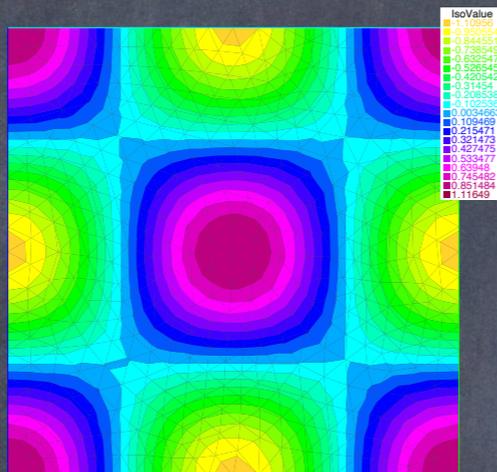
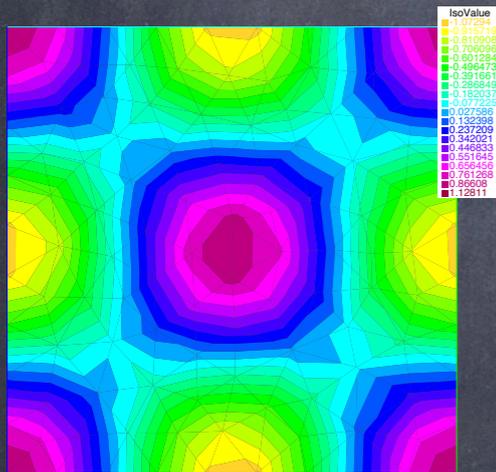
courbe d'erreur en échelle log



Exemple numérique $f(x, y) = (2\pi^2 + 1) \cos(\pi x) \cos(\pi y)$

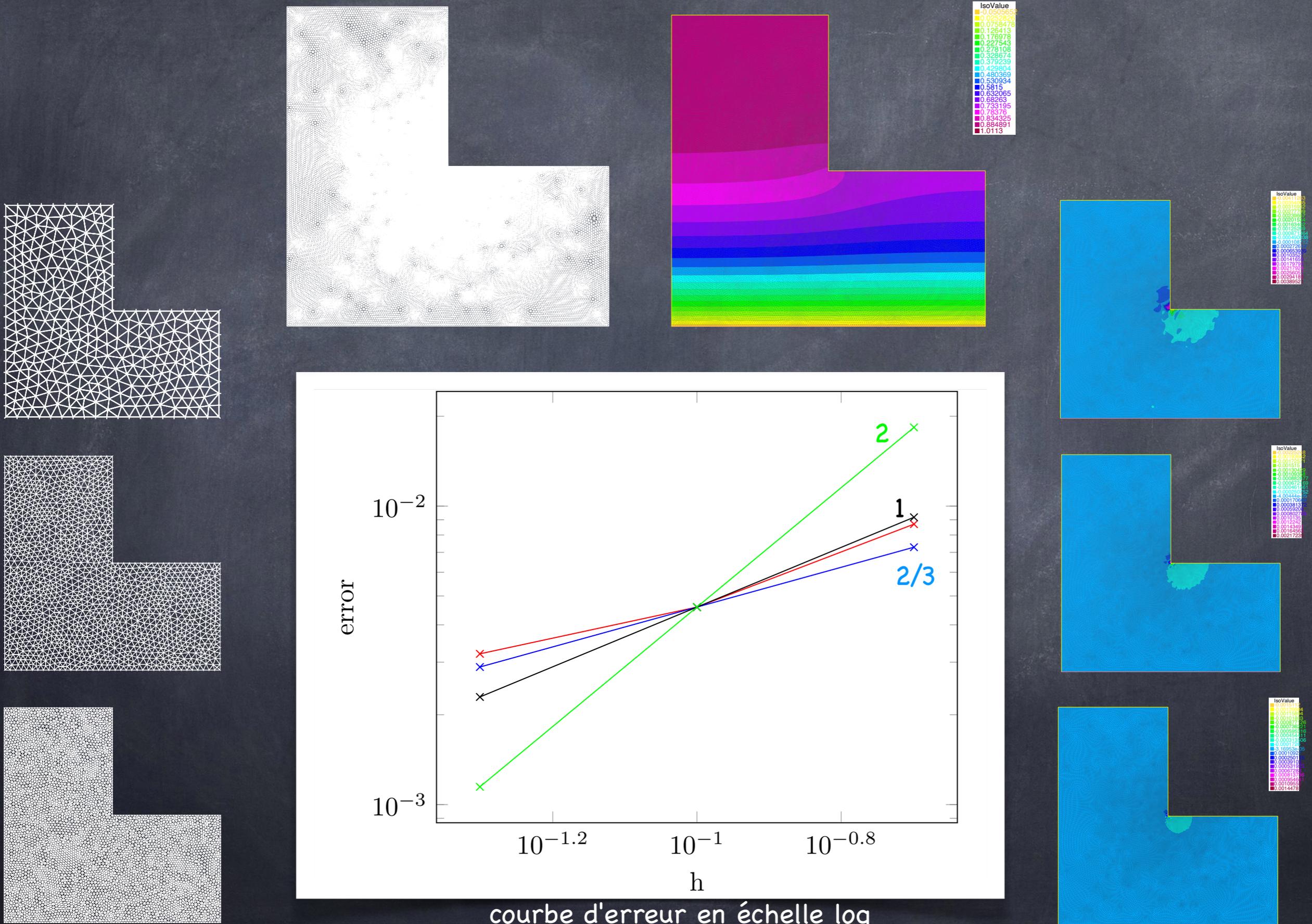


EF de Lagrange P2



courbe d'erreur en échelle log

Un cas où $u \in H^{5/3}$ et $u_h \in V_h^2$



Erreur de quadrature

Problématique

Principe : quand les données sont quelconques, certaines intégrales ne sont pas calculables exactement.

Par exemple, $\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}) \vec{\nabla} w_i \cdot \vec{\nabla} w_j d\Omega$ (dans la matrice de rigidité) et $\int_{\Omega} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}) w_i d\Omega$ (dans le second membre)

L'idée est d'approcher ces intégrales par les suivantes

$$\int_{\Omega} (\Pi_h^m \sigma(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma})) \vec{\nabla} w_i \cdot \vec{\nabla} w_j d\Omega \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} (\Pi_h^k f) w_i d\Omega$$

Question : Quelle est l'erreur d'approximation que nous faisons ?

Remarque : Cela va dépendre de la régularité des fonctions.

Par exemple, si f est localement H^2 ,

$$\|f - (\Pi_h^1 f)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \left(\sum_{l \in \llbracket 1, N_{\text{tri}} \rrbracket} |f|_{2, \mathcal{T}_l}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Erreur de quadrature

sur le second membre

- On vient d'étudier la vitesse de convergence associée à

$$\forall v_h \in V_h^1, \quad a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h \, d\Omega$$

- On s'intéresse au nouveau problème discret (f remplacé par $\Pi_h^1 f$)

$$\forall v_h \in V_h^1, \quad a(\tilde{u}_h, v_h) = \int_{\Omega} (\Pi_h^1 f) v_h \, d\Omega$$

- Comment se comporte maintenant $\|u - \tilde{u}_h\|_{H^1(\Omega)}$?

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} + \|u_h - \tilde{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{avec}$$

- $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C'h \left(\sum |u|_{2, \mathcal{T}_l}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ d'après le théorème précédent si u est H^2

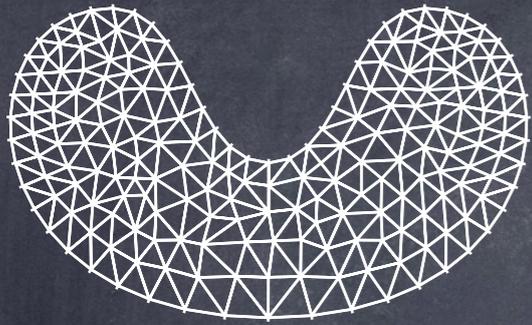
$$\begin{aligned} \alpha \|u_h - \tilde{u}_h\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq a(u_h - \tilde{u}_h, u_h - \tilde{u}_h) = \int_{\Omega} (f - (\Pi_h^1 f))(u_h - \tilde{u}_h) \, d\Omega \\ &\leq \|f - (\Pi_h^1 f)\|_{L^2(\Omega)} \|u_h - \tilde{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|u_h - \tilde{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \leq 1/\alpha \|f - (\Pi_h^1 f)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \left(\sum |f|_{2, \mathcal{T}_l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{si } f \text{ est localement } H^2$$

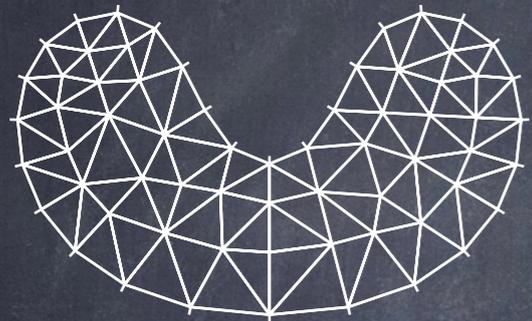
$$\|u - \tilde{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C'h \left(\sum_{l \in \llbracket 1, N_{\text{tri}} \rrbracket} |u|_{2, \mathcal{T}_l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + Ch^2 \left(\sum_{l \in \llbracket 1, N_{\text{tri}} \rrbracket} |f|_{2, \mathcal{T}_l}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

La vitesse de convergence n'est pas modifiée par la quadrature!

Cas des ouverts réguliers



On approche Ω par un domaine polyédrique Ω_h que l'on maille ensuite par un maillage \mathcal{T}_h



On peut choisir Ω_h et son maillage pour que

$$\text{dist}(\partial\Omega, \partial\Omega_h) \leq Ch^2$$

On appelle u_h la solution de (F.V. $_h^k$) dans V_h^k .

Ici, V_h^k n'est pas un sous espace de V dans lequel on cherche u !

MAIS si $n=2$ alors on montre que pour $k=1$ et $u \in H^2(\Omega)$

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch |u|_{2,\Omega}$$

mais pour $k \geq 2$ et $u \in H^{k+1}(\Omega)$

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{3/2} |u|_{k+1,\Omega}$$

Cette méthode est donc satisfaisante pour les EF \mathbb{P}_1 mais **décevante** pour les EF \mathbb{P}_k , $k \geq 2$

Il faut introduire des EF isoparamétriques ou courbes pour retrouver une convergence optimale.

Théorème de Aubin Nitsche

↓
ou comment se comporte $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$?

Plaçons nous encore dans la situation où nous pouvons montrer

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

(voir par exemple les hypothèses du théorème du transparent 24)

Principe de la preuve: On introduit un nouveau problème variationnel avec l'erreur comme donnée au second membre

$$(FV_z) \begin{cases} \text{Trouver } z \in H^1(\Omega) \text{ t.q.} \\ \forall v \in H^1(\Omega), \quad a(z, v) = \int_{\Omega} (u - u_h) v \, d\Omega \end{cases}$$

On applique la même méthode de discrétisation ($z_h \in V_h^1$), on a donc l'estimation d'erreur, si $z \in H^2(\Omega)$

$$\|z - z_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$$

Théorème de Aubin Nitsche

ou comment se comporte $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$?

Estimation de la norme L^2

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (u - u_h)^2 d\Omega = a(z, u - u_h) = a(u - u_h, z) \quad \text{si } a \text{ est symétrique}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } a(u, z_h) &= \int_{\Omega} f z_h d\Omega = a(u_h, z_h) \Rightarrow a(u - u_h, z_h) = 0 \\ &\Rightarrow \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = a(u - u_h, z - z_h) \end{aligned}$$

On en déduit que si $u \in H^2(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &= a(u - u_h, z - z_h) \leq M_a \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \|z - z_h\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq M_a C h \|f\|_{L^2(\Omega)} \times C h \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &\Rightarrow \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq M_a C^2 h^2 \|f\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Proposition

On a donc le résultat de convergence :

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C h^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

TP2 aujourd'hui

Ce TP est noté (50% de la note finale). **Il est à rendre le 25/11** (compte rendu, codes sources et maillages).

Tutorat le 08/11 après midi

Examen le 14/11

Il aura lieu de 9h à 11h et se fera **sans documents**.

Le 14/11 de 11h15 à 12h15 aura lieu le cours d'ouverture :

Quelques applications et extensions de la Méthode des EF à des problèmes plus réalistes.