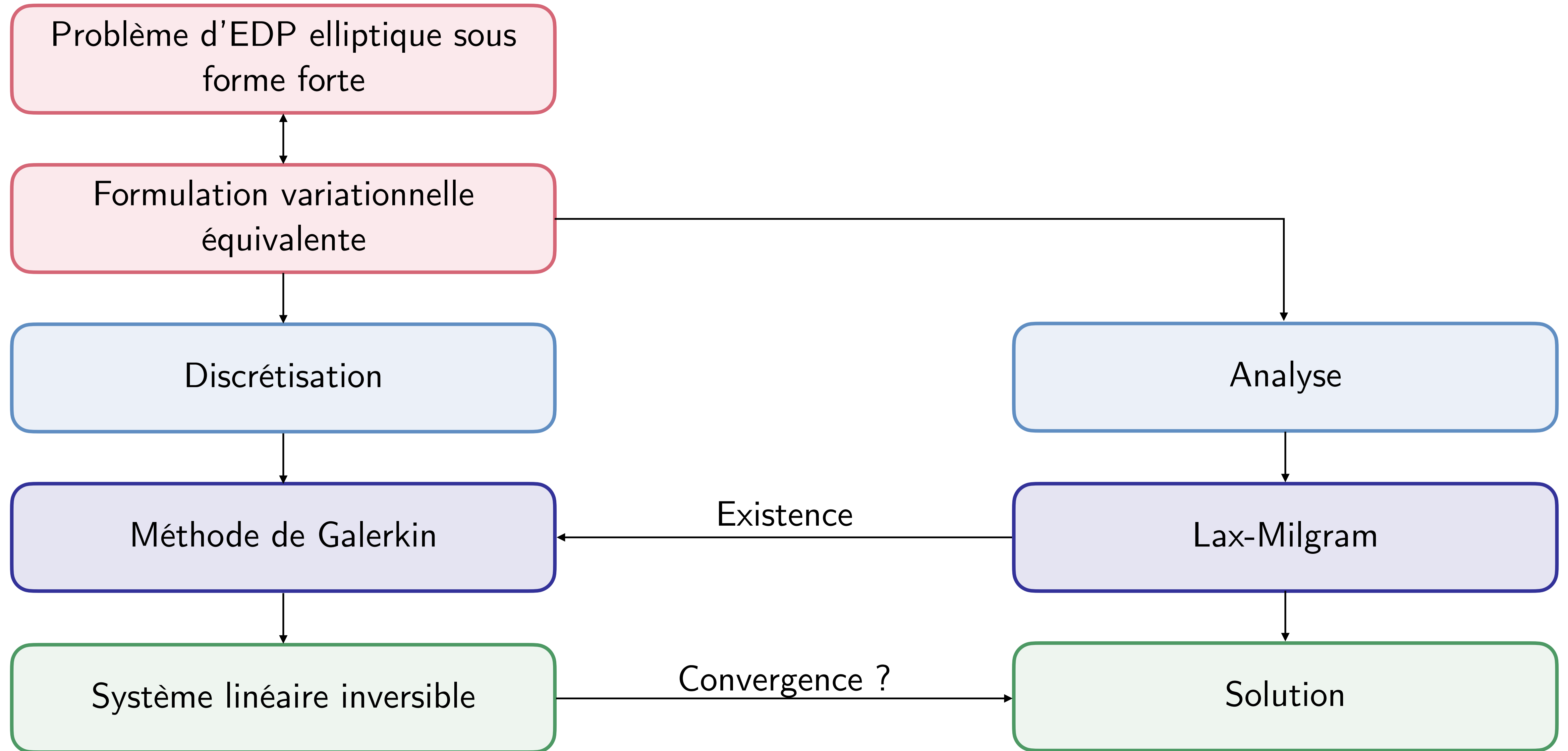

Introduction à la méthode des Éléments Finis.

Sonia Fliss

Chargés de TDs : Sarah Al Humaikani (UMA), Marc Bakry (CEA),
Eliane Bécache (Inria, UMA), Pierre Boulogne (UMA), Xavier
Claeys (UMA), Elise Fressart (CMAP, X), Benjamin Graille (Orsay),
Erell Jamelot (CEA), Zoïs Moitier (UMA)

Point d'étape



Séance 6 : Analyse numérique de la méthode des éléments finis

Problème modèle et hypothèses

Convergence de l'approximation interne

Vitesse de convergence

Autres erreurs

Problème modèle

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert **polygonal**, $\kappa \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$

$$0 < \kappa_0 \leq \kappa \leq \bar{\kappa}$$

On cherche la solution u dans $\mathcal{V} = H^1(\Omega)$

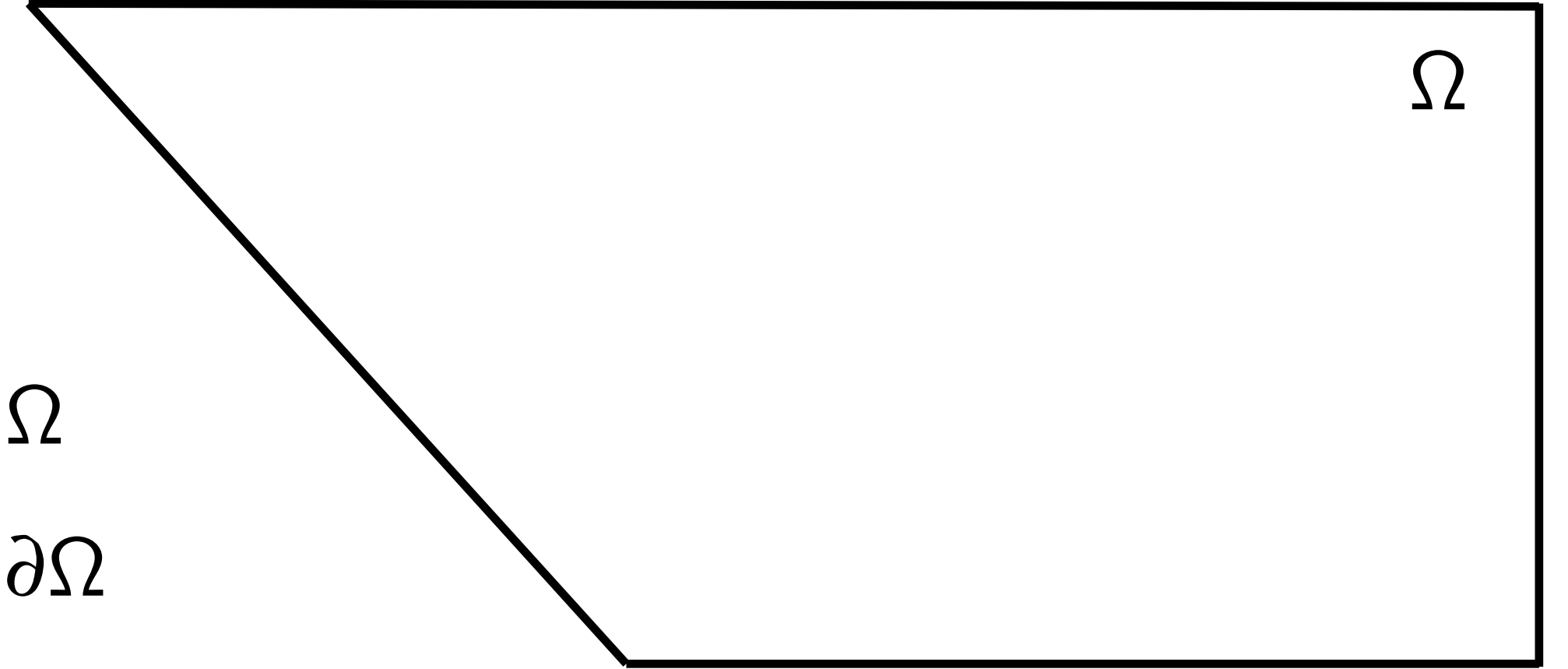
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa(\underline{x}) \underline{\nabla} u(\underline{x})) + u(\underline{x}) = f(\underline{x}), & \underline{x} \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(\underline{x}) = 0, & \underline{x} \in \partial\Omega \end{cases}$$

↕  voir Amphi 2

On cherche la solution u dans $\mathcal{V} = H^1(\Omega)$

$$\forall v \in \mathcal{V}, \quad a(u, v) = \ell(v) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a(u, v) &= \int_{\Omega} [\kappa(\underline{x}) \underline{\nabla} u(\underline{x}) \cdot \underline{\nabla} v(\underline{x}) + u(\underline{x}) v(\underline{x})] \, d\Omega \\ \ell(v) &= \int_{\Omega} f(\underline{x}) v(\underline{x}) \, d\Omega \end{cases}$$

On vérifie que le théorème de Lax-Milgram s'applique!  voir Amphi 3



Définition : Maillage triangulaire

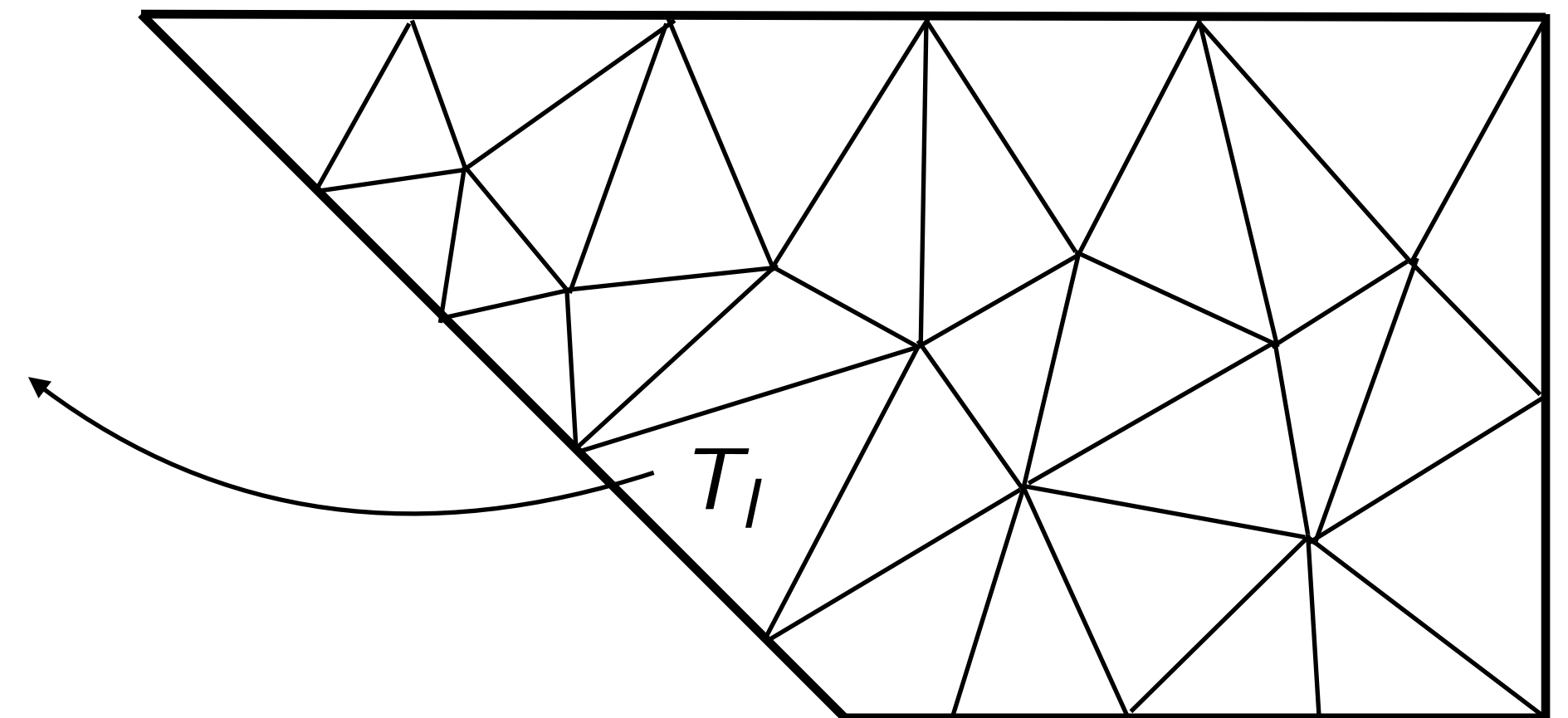
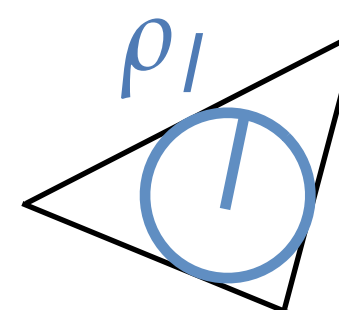
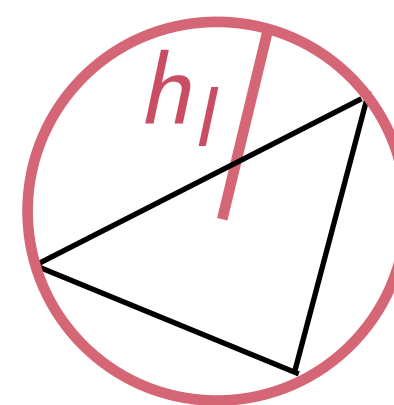
Soit Ω un ouvert connexe polyédrique de $\mathbb{R}^2$. Un maillage triangulaire de $\overline{\Omega}$ est un ensemble de N_e triangles $\{T_l\}_{1 \leq l \leq N_e}$ tels que

- Tout triangle T_k est d'intérieur non vide (c'est-à-dire $\overset{\circ}{T}_k \neq \emptyset$). On définit alors ρ_k le rayon du cercle inscrit au triangle T_k et h_k le rayon du cercle circonscrit.
- $\overset{\circ}{T}_k \cap \overset{\circ}{T}_{k'} = \emptyset$ si $k \neq k'$,
- $\bigcup_l T_k = \overline{\Omega}$,
- toute arête d'un triangle est soit une arête d'un autre triangle soit une arête portée par la frontière $\partial\Omega$.

$$h(T) = \inf_{T \subset B(\underline{x}, r)} r, \quad \rho(T) = \sup_{B(\underline{x}, r) \subset T} r.$$

Pas du maillage

$$h = \max_{1 \leq l \leq N_e} h_l$$



Hypothèse

Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une suite de maillages de Ω . On suppose que la famille de maillages $(\mathcal{T}_h)_h$ est *régulière*, c'est à dire que

1. la suite $h = \max_{T_I \in \mathcal{T}_h} h(T_I)$ tend vers 0,
2. il existe une constante C telle que, pour tout $h > 0$ et tout $T \in \mathcal{T}_h$,

$$\frac{h(T)}{\rho(T)} \leq C.$$

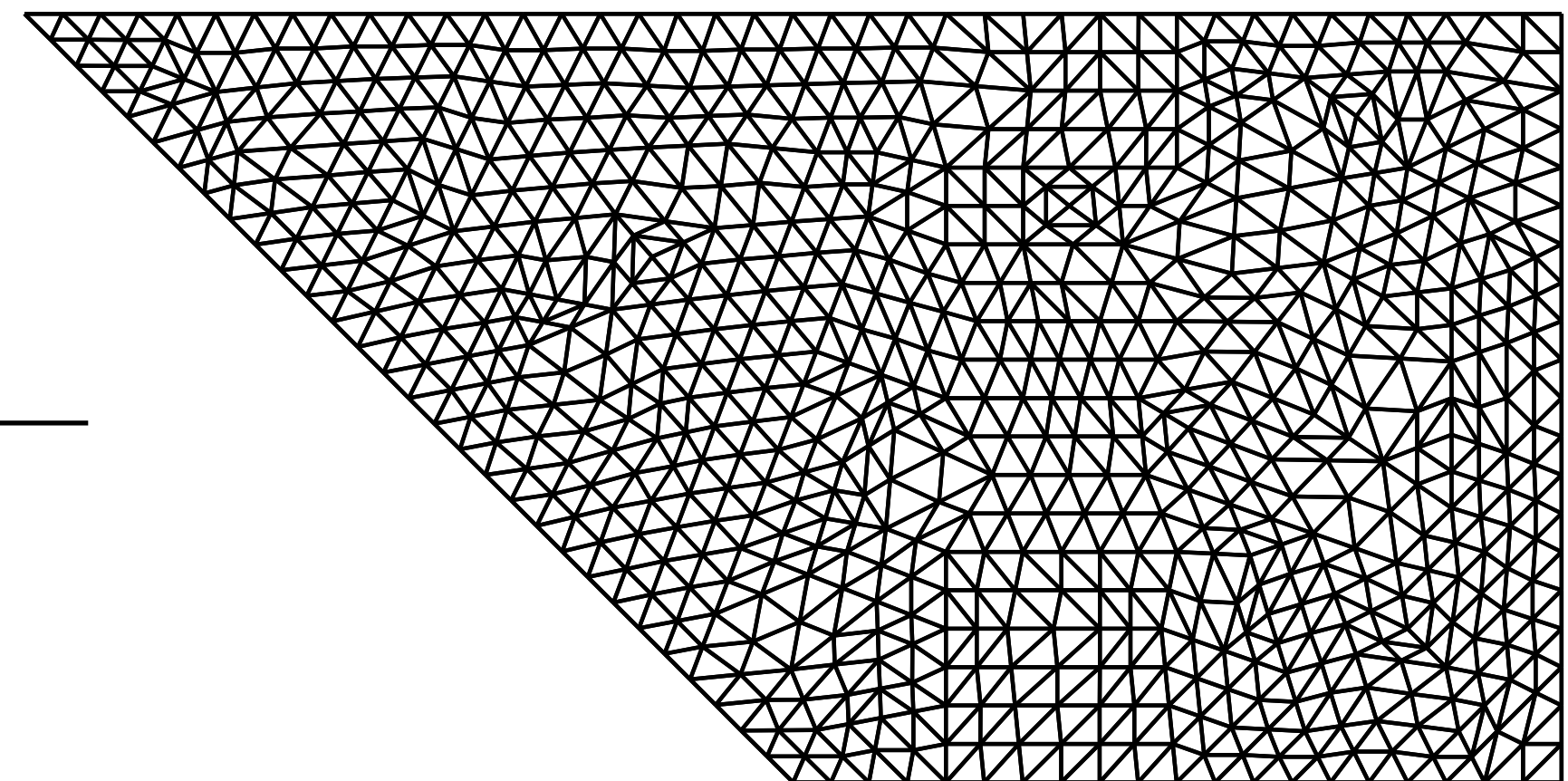
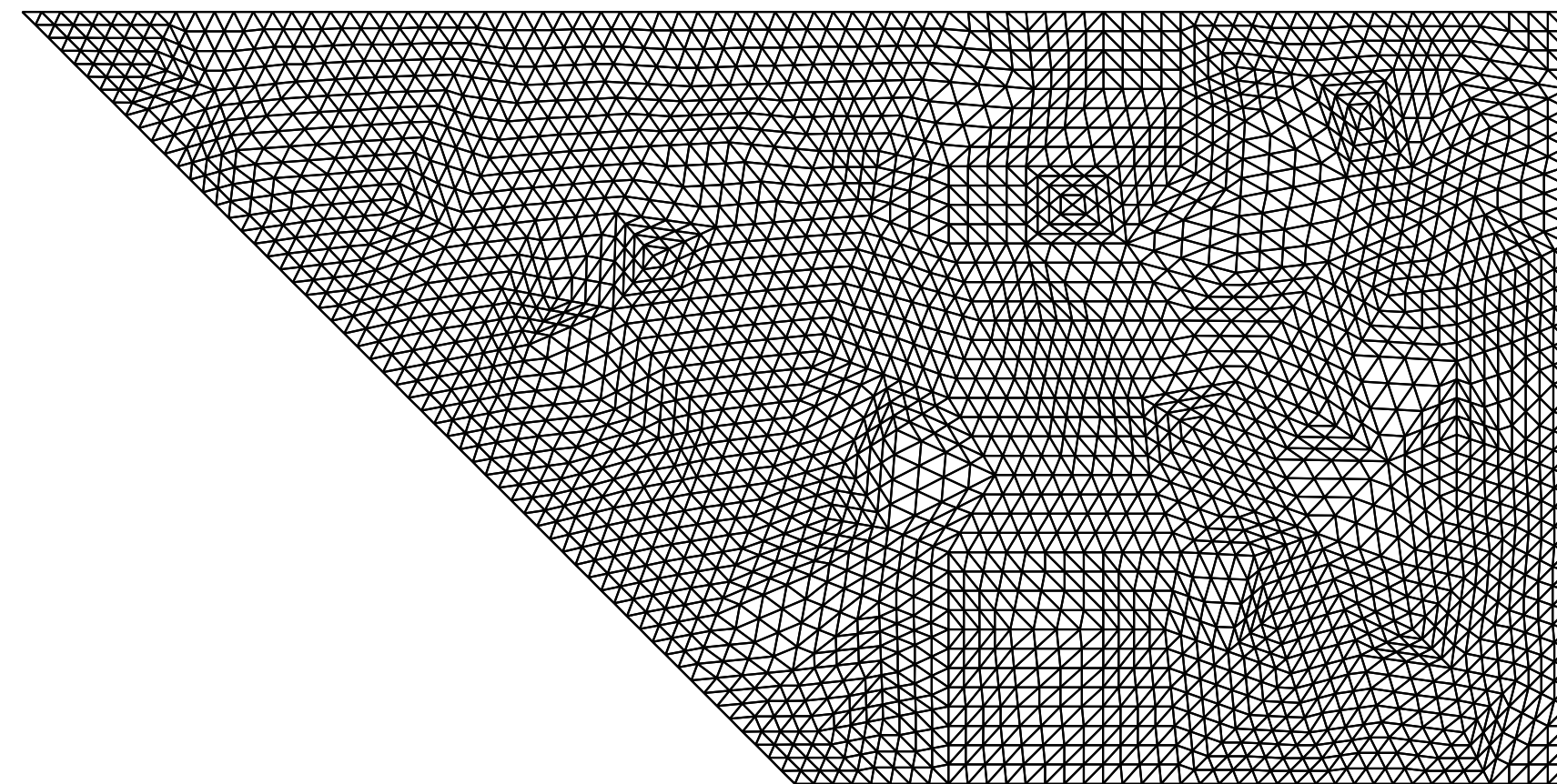
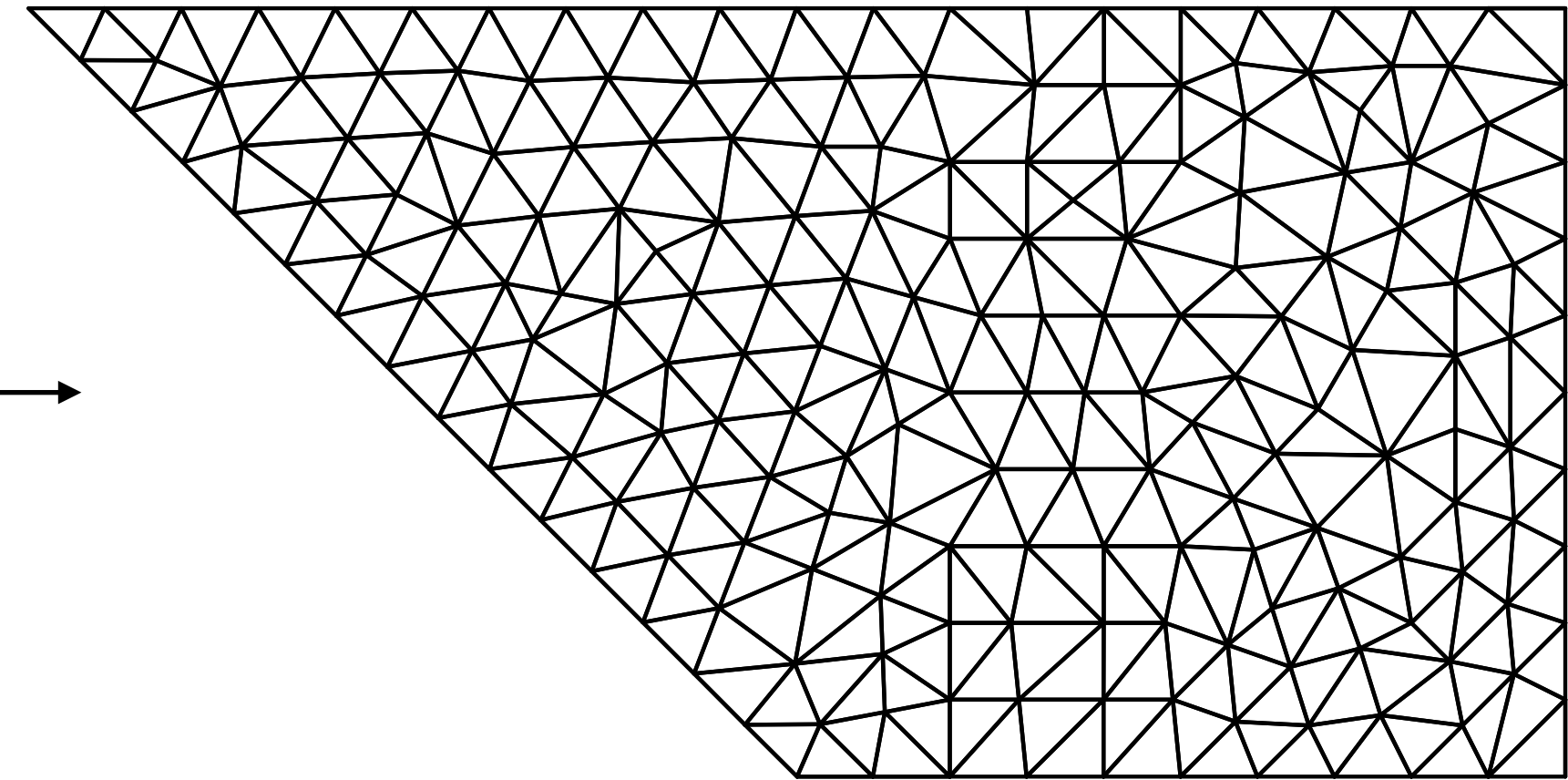
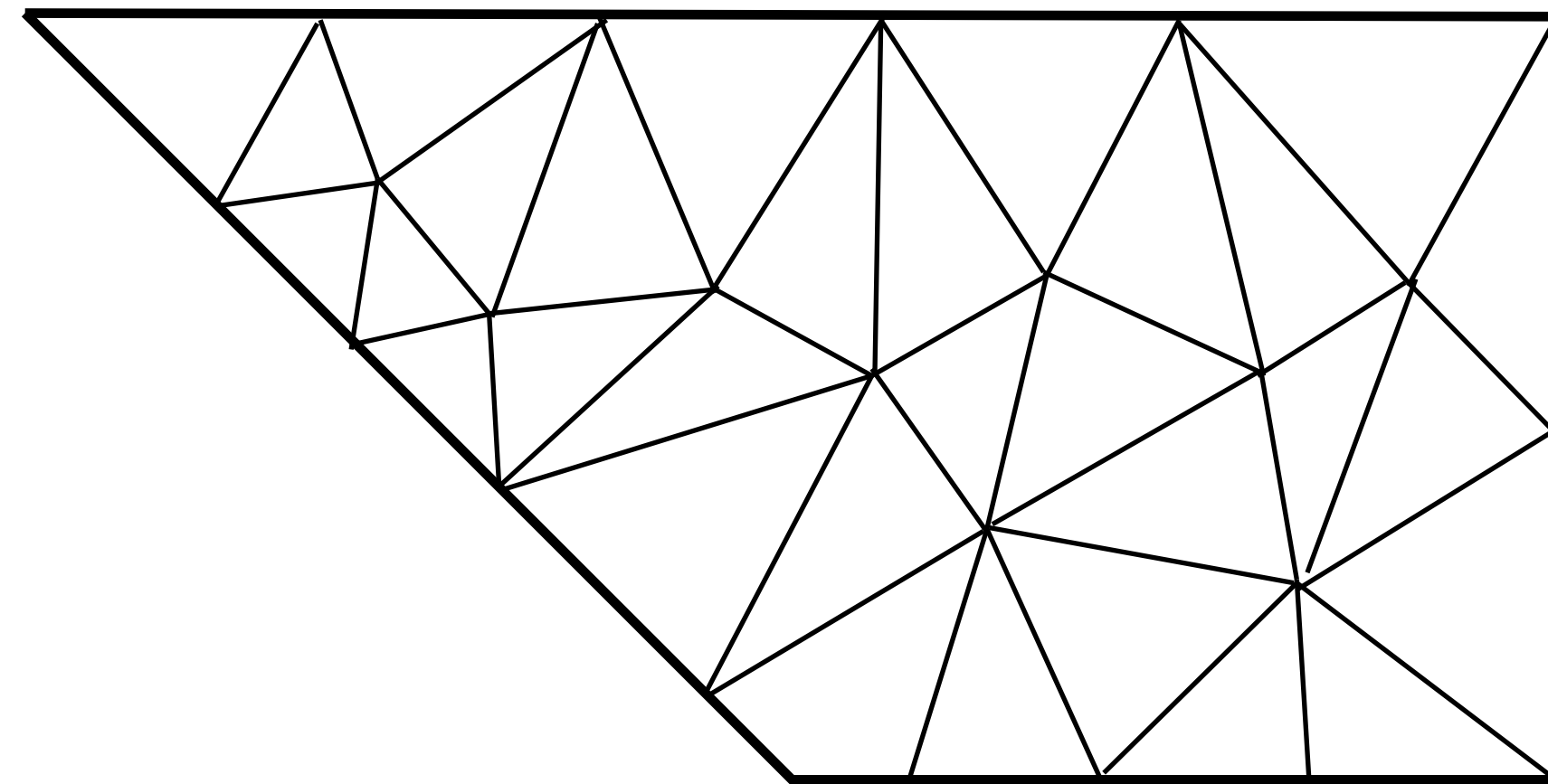
! Remarques:

- Parfois, on définit h comme étant $\max_{T_I \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(T_I)$ où $\text{diam}(T) = \max_{(\underline{x}, \underline{y}) \in T^2} |\underline{x} - \underline{y}|$

c'est équivalent car $C_1 \max_{T_I \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(T_I) \leq h \leq C_2 \max_{T_I \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(T_I)$

- En dimension $d = 2$ la condition est équivalente à la condition suivante sur les angles du triangle T : il existe un angle minimum $\theta_0 > 0$ qui minore (uniformément en h) tous les angles de tout $T \in \mathcal{T}_h$.

Séquence de maillage



Séance 6 : Analyse numérique de la méthode des éléments finis

Problème modèle et hypothèses

Convergence de l'approximation interne

Vitesse de convergence

Autres erreurs

Formulation variationnelle discrete

- On écrit la formulation variationnelle dans un espace de dimension finie $\mathcal{V}_h = \mathcal{V}_h^k \subset H^1(\Omega)$ où

$$\mathcal{V}_h = \mathcal{V}_h^k = \left\{ v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ tel que } v_h|_{T_i} \in \mathbb{P}_k \text{ pour tout } T_i \in \mathcal{T}_h \right\}$$

où $\mathbb{P}_k(T_i)$ désigne l'ensemble des polynômes multivariés sur T_i de degré au maximum k

- La formulation variationnelle discrète s'écrit

On cherche $u_h \in \mathcal{V}_h$ telle que $\forall v_h \in \mathcal{V}_h, \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$

Lemme de Céa :

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{M_a}{\alpha} \inf_{v_h \in \mathcal{V}_h} \|u - v_h\|_{\mathcal{V}},$$

où M_a est la constante de continuité de a , et α sa constante de coercivité

Erreur de meilleure approximation

Preuve au tableau

Continuité

$$\exists M_a > 0, \forall v, w \in V, \quad |a(v, w)| \leq M_a \|v\|_V \|w\|_V$$

Coercivité

$$\exists \alpha > 0, \forall v \in V, \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$$

Un résultat abstrait de convergence

Proposition

On suppose qu'il existe un sous-espace $\mathcal{W}$ dense de $\mathcal{V}$ et, pour chaque h , une application $r_h : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}_h$ tels que

$$\forall v \in \mathcal{W}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h v\|_{\mathcal{V}} = 0,$$

alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{\mathcal{V}} = 0,$$

Preuve Soit $\varepsilon > 0$, $\mathcal{W}$ est dense dans $\mathcal{V}$ donc, il existe $w \in \mathcal{W}$ tel que $\|u - w\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\alpha \varepsilon}{2M_a}$.

Par hypothèse, il existe $h(\varepsilon) > 0$ tel que $\forall h \leq h(\varepsilon), \quad \|w - r_h w\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\alpha \varepsilon}{2M_a}$.

D'après le lemme de Céa, nous avons donc

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{M_a}{\alpha} \|u - r_h w\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{M_a}{\alpha} \left[\|u - w\|_{\mathcal{V}} + \|w - r_h w\|_{\mathcal{V}} \right] \leq \varepsilon$$

Corollaire

Pour notre problème modèle, on a convergence de la méthode EF

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{\mathcal{V}} = 0,$$

Il suffit de choisir $\mathcal{W} = C^\infty(\overline{\Omega})$, $r_h = \Pi_h^k$ et d'utiliser ce que nous allons faire dans la suite pour la convergence dans $\mathcal{W}$. Ce résultat est vrai **sans hypothèse supplémentaire** sur u .

Séance 6 : Analyse numérique de la méthode des éléments finis

Problème modèle et hypothèses

Convergence de l'approximation interne

Vitesse de convergence

Autres erreurs

Vitesse de convergence

Définition : Vitesse de convergence

On dit que l'approximation interne est convergente à l'ordre β s'il existe une constante $C > 0$, indépendante de h telle que

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{V}} \leq Ch^\beta.$$

Comme

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{M_a}{\alpha} \inf_{v_h \in \mathcal{V}_h^k} \|u - v_h\|_{\mathcal{V}}$$

on est donc ramené à étudier la vitesse de convergence de $\inf_{v_h \in \mathcal{V}_h^k} \|u - v_h\|_{\mathcal{V}}$,

Erreur de meilleure approximation

 Ce résultat va dépendre de la régularité de u !

Opérateur d'interpolation

Définition : Opérateur d'interpolation

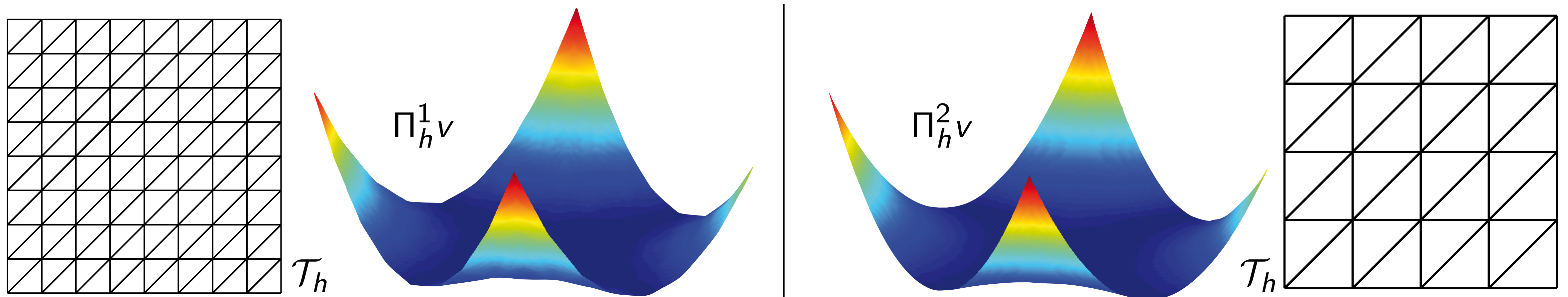
On appelle opérateur d'interpolation $\mathbb{P}_k$ l'application linéaire Π_h^k de $C^0(\overline{\Omega})$ dans $\mathcal{V}_h^k$, définie par

$$\forall v \in C^0(\overline{\Omega}), \quad (\Pi_h^k v)(\underline{x}) = \sum_{j=1}^N v(\underline{S}_j) \phi_j(\underline{x}),$$

où la famille $\{\phi_j, j \in \llbracket 1, N \rrbracket\}$ est la base éléments-finis de $\mathbb{P}_k$

$\Pi_h^k v$ est l'unique fonction de $\mathcal{V}_h$ qui prend les mêmes valeurs que v aux noeuds $(\underline{S}_i)_i$.

- Exemple $v : (x, y) \mapsto x^2 y^2$



Opérateur d'interpolation

Définition : Opérateur d'interpolation

On appelle opérateur d'interpolation $\mathbb{P}_k$ l'application linéaire Π_h^k de $C^0(\overline{\Omega})$ dans $\mathcal{V}_h^k$, définie par

$$\forall v \in C^0(\overline{\Omega}), \quad (\Pi_h^k v)(\underline{x}) = \sum_{j=1}^N v(\underline{S}_j) \phi_j(\underline{x}),$$

où la famille $\{\phi_j, j \in \llbracket 1, N \rrbracket\}$ est la base éléments-finis de $\mathbb{P}_k$

Proposition

L'opérateur Π_h^k est un opérateur de projection.

$$\forall v_h \in \mathcal{V}_h^k, \quad \Pi_h^k v_h = v_h$$

 **Remarque:** on aimerait utiliser $\Pi_h^k u$ dans le lemme de Céa

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{M_a}{\alpha} \inf_{v_h \in \mathcal{V}_h} \|u - v_h\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{M_a}{\alpha} \|u - \Pi_h^k u\|_{H^1(\Omega)}$$

Question : est ce que la solution u est dans $C^0(\overline{\Omega})$?

Régularité de la solution

Proposition : Régularité des espaces de Sobolev [ADMIS]

Si Ω est un ouvert de frontière suffisamment régulière et si $m > \frac{d}{2} + k$ alors $H^m(\Omega)$ s'injecte de manière continue dans $C^k(\overline{\Omega})$, c'est à dire:

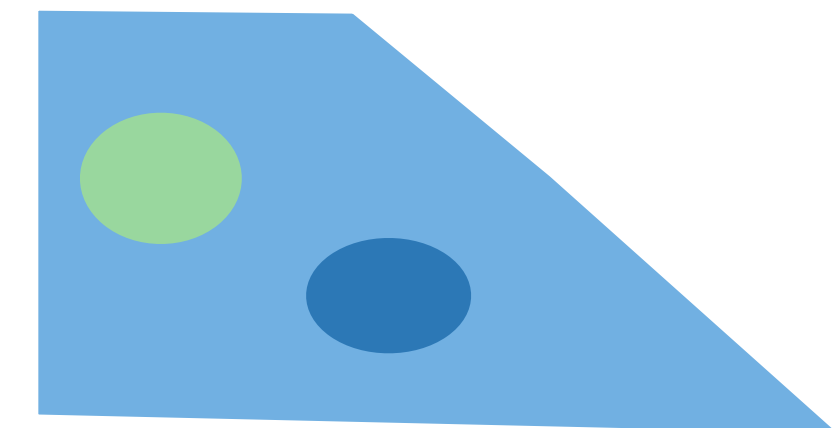
$$H^m(\Omega) \subset C^k(\overline{\Omega}) \quad \text{et} \quad \exists C > 0, \forall u \in H^m(\Omega), \quad \|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} := \sup_{x \in \overline{\Omega}} \sum_{|\alpha| \leq k} |\partial^\alpha u(x)| \leq C \|u\|_{H^m(\Omega)}.$$

- On en déduit que si $d = 1$ alors $H^1(\Omega) \subset C^0(\Omega)$ mais c'est faux pour $d \geq 2$
si $d = 2, 3$ alors $H^2(\Omega) \subset C^0(\Omega)$

Proposition : Régularité des espaces de solutions [ADMIS]

Si Ω est un ouvert de frontière suffisamment régulière et si $u \in H^1(\Omega)$ avec $\Delta u \in L^2(\Omega)$ et $u = 0$ ou $\nabla u \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$ alors $u \in C^0(\overline{\Omega})$

Pour le problème modèle, le coefficient κ doit être assez régulier ou réguliers par morceaux par inclusions



Étude de l'erreur d'interpolation $\|u - \Pi_h^k u\|_{H^1(\Omega)}$

D'après le lemme de Céa et si on suppose que $u \in C^0(\overline{\Omega})$, on peut utiliser l'opérateur d'interpolation

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{M_a}{\alpha} \inf_{v_h \in \mathcal{V}_h} \|u - v_h\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{M_a}{\alpha} \|u - \Pi_h^k u\|_{H^1(\Omega)}$$

Erreur d'interpolation

On se ramène à l'étude d'erreurs d'interpolation locale

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_h^k u\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} (u - \Pi_h^k u)^2 d\Omega + \int_{\Omega} |\vec{\nabla}(u - \Pi_h^k u)|^2 d\Omega \\ &= \sum_{\ell=1}^{N_e} \int_{T_\ell} (u - \Pi_h^k u)^2 d\Omega + \sum_{\ell=1}^{N_e} \int_{T_\ell} |\vec{\nabla}(u - \Pi_h^k u)|^2 d\Omega \end{aligned}$$

Definition : semi-normes locales

Sur chaque élément T_ℓ de $\mathcal{T}_h$, on définit les semi-normes $|v|_{m, T_\ell}^2 := \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha|=m}} \int_{T_\ell} \left| \partial_{x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}} v \right|^2 d\Omega$.

En particulier

$$|v|_{0, T_\ell} = \left(\int_{T_\ell} v^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } |v|_{1, T_\ell} = \left(\int_{T_\ell} |\underline{\nabla} v|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } |v|_{2, T_\ell} = \left(\int_{T_\ell} |\underline{\underline{\nabla}}^2 v|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

Théorème de Bramble Hilbert

Théorème : Bramble-Hilbert

Pour tout triangle $T_I \in \mathcal{T}_h$ supposé non dégénéré, on note $h_I = h(T_I) \neq 0$ et $\rho_I = \rho(T_I) \neq 0$. Il existe une constante C indépendante de T_I telle que pour tout $v \in C^0(\overline{T_I}) \cap H^{k+1}(T_I)$ on a

$$\forall m \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \left| v - \Pi_h^k v \right|_{m, T_I} \leq C \frac{h_I^{k+1}}{\rho_I^m} |v|_{k+1, T_I}.$$

Lemme 1: Retour à l'élément de référence :

Pour tout triangle $T_I \in \mathcal{T}_h$ supposé non dégénéré, on note $h_I = h(T_I) \neq 0$ et $\rho_I = \rho(T_I) \neq 0$. Soient $m \in \mathbb{N}$, $v \in H^m(T_I)$ et $\hat{v} = v \circ \hat{\varphi}_I \in H^m(\hat{T})$, il existe des constantes C_m et C'_m telles que

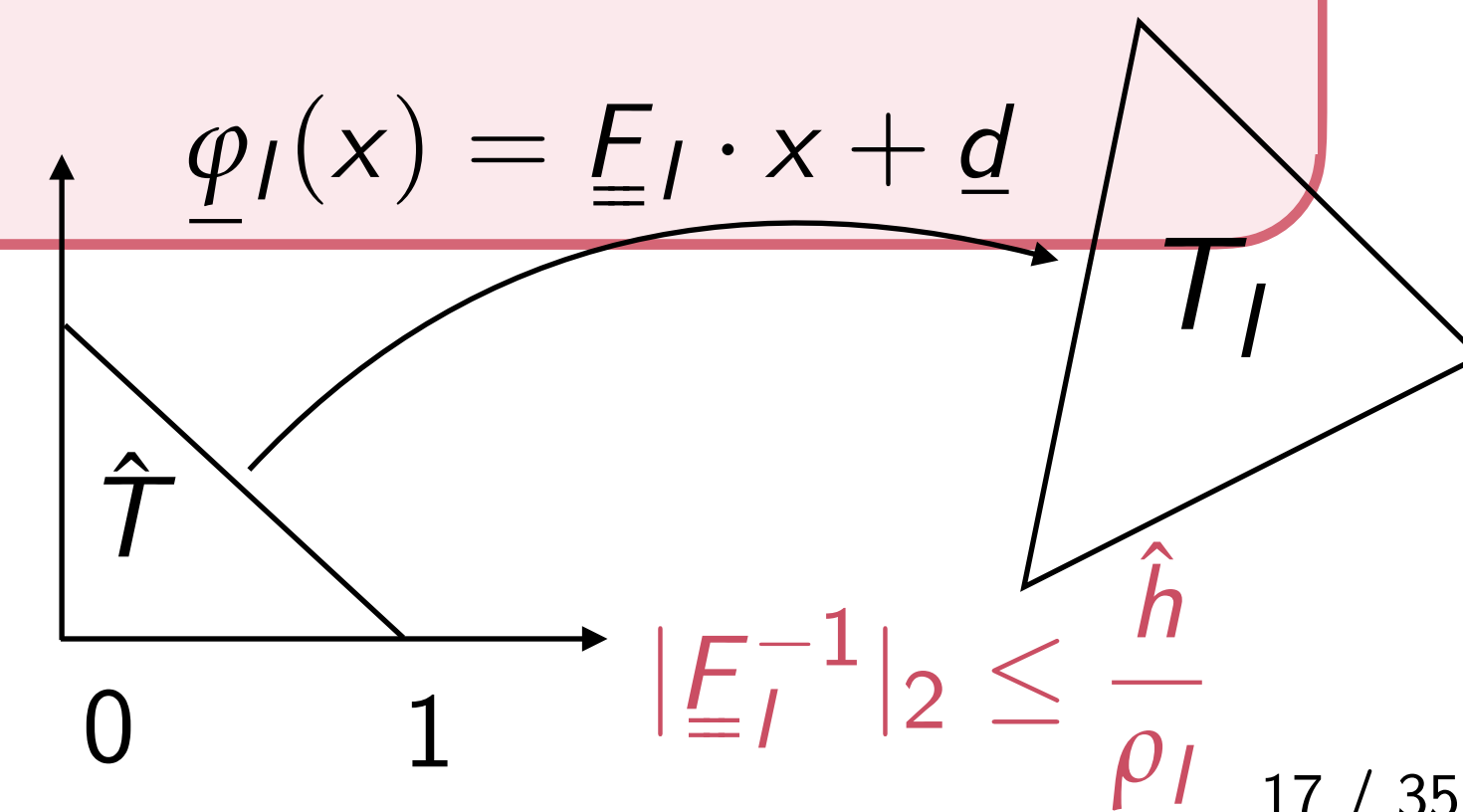
$$|v|_{m, T_I} \leq C_m \rho_I^{-m} |\det \underline{F}_I|^{\frac{1}{2}} |\hat{v}|_{m, \hat{T}},$$

$$|\hat{v}|_{m, \hat{T}} \leq C'_m h_I^m |\det \underline{F}_I|^{-\frac{1}{2}} |v|_{m, T_I}.$$

Preuve: Changement de variable

$$|v|_{0, T_I}^2 \leq \int_{\hat{T}} |\hat{v}|^2 |\det(\underline{F}_I)| d\Omega \leq |\det(\underline{F}_I)| |\hat{v}|_{0, \hat{T}}^2$$

$$|v|_{1, T_I}^2 \leq \int_{\hat{T}} |\underline{F}_I^{-T} \cdot \nabla \hat{v}|^2 |\det(\underline{F}_I)| d\Omega \leq |\underline{F}_I^{-1}|_2^2 |\det(\underline{F}_I)| \int_{\hat{T}} |\nabla \hat{v}|^2 d\Omega \leq \frac{\hat{h}}{\hat{\rho}_I} |\det(\underline{F}_I)| \int_{\hat{T}} |\nabla \hat{v}|^2 d\Omega$$



Preuve du théorème de Bramble-Hilbert — étape ii

Lemme 2: inégalité sur l'élément de référence :

Soit $\hat{\Pi}^k$ l'opérateur d'interpolation sur $(\hat{T})$. Il existe une constante C telle que pour tout $\hat{v} \in H^{k+1}(\hat{T})$ on a

$$|\hat{v} - \hat{\Pi}^k \hat{v}|_{H^k(\hat{T})} \leq C |\hat{v}|_{k+1, \hat{T}}.$$

- **Preuve** dans le cas particulier $k=1, d=1$. Dans ce cas, $\hat{\Pi}^1 \hat{v} = (\hat{v}(1) - \hat{v}(0))x + \hat{v}(0)$

On a $\hat{v} - \hat{\Pi}^1 \hat{v} \in H_0^1([0, 1])$ donc par l'inégalité de Poincaré $|\hat{v} - \hat{\Pi}^1 \hat{v}|_{L^2([0, 1])} \leq C |\hat{v}' - (\hat{\Pi}^1 \hat{v})'|_{L^2([0, 1])}$  voir Amphi 3

De plus, $(\hat{\Pi}^1 \hat{v})' = \int_0^1 \hat{v}'$ donc $\hat{v}' - (\hat{\Pi}^1 \hat{v})' \in H_{\#}^1([0, 1]) := \left\{ w \in H^1([0, 1]) \mid \int_0^1 w = 0 \right\}$

donc par l'inégalité de Poincaré-Wirtinger,  voir TD3, exo4.

$$\left| \hat{v}' - (\hat{\Pi}^1 \hat{v})' \right|_{L^2([0, 1])} \leq \left| \hat{v}'' - (\hat{\Pi}^1 \hat{v})'' \right|_{L^2([0, 1])} = |\hat{v}''|_{L^2([0, 1])}$$

On obtient:
$$\left| \hat{v} - (\hat{\Pi}^1 \hat{v}) \right|_{L^2([0, 1])} \leq \left| \hat{v}' - (\hat{\Pi}^1 \hat{v})' \right|_{L^2([0, 1])} \leq |\hat{v}''|_{L^2([0, 1])}$$

- **Preuve** dans le cas général : *par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite de fonctions qui ne vérifient pas l'inégalité et on utilise le théorème de Rellich*  hors programme, voir TD3 Exo5 et 5ANA1

Convergence de la méthode

Théorème :

Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une suite de maillages régulière de Ω . Si $u \in C^0(\bar{\Omega})$ et pour tout $T_I \in \mathcal{T}_h$, $u \in H^{k+1}(T_I)$ il existe C une constante indépendante de h et de u telle que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k \left(\sum_{I=1}^{N_e} |u|_{k+1, T_I}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{On rappelle que } u_h \in \mathcal{V}_h^k.$$

Preuve

$$\|v - \Pi_h^k v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\underline{\nabla} (v - \Pi_h^k v)|^2 d\Omega + \int_{\Omega} (v - \Pi_h^k v)^2 d\Omega$$

$$\text{où} \quad \int_{\Omega} (v - \Pi_h^k v)^2 d\Omega = \sum_{I=1}^{N_e} |v - \Pi_h^k v|_{0, T_I}^2 \leq C \sum_{I=1}^{N_e} h_I^{2k+2} |v|_{k+1, T_I}^2$$

$$\text{et} \quad \int_{\Omega} |\underline{\nabla} (v - \Pi_h^k v)|^2 d\Omega = \sum_{I=1}^{N_e} |v - \Pi_h^k v|_{1, T_I}^2 \leq C \sum_{I=1}^{N_e} \frac{h_I^{2k+2}}{\rho_I^2} |v|_{k+1, T_I}^2$$

Comme la suite de maillage est régulière $\forall \mathcal{T}_h, \quad \forall T_I \in \mathcal{T}_h, \quad \frac{h(T_I)}{\rho(T_I)} \leq \delta$

on en déduit $\|v - \Pi_h^k v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C(\delta^2 + h^2) h^{2k} \sum_{I=1}^{N_e} |v|_{k+1, T_I}^2$

Convergence de la méthode

Théorème :

Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une suite de maillages régulière de Ω . Si $u \in C^0(\bar{\Omega})$ et pour tout $T_I \in \mathcal{T}_h$, $u \in H^{k+1}(T_I)$ il existe C une constante indépendante de h et de u telle que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k \left(\sum_{I=1}^{N_e} |u|_{k+1, T_I}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{On rappelle que } u_h \in \mathcal{V}_h^k.$$

⚠ **Remarques:** • ce résultat de convergence nécessite une **hypothèse de régularité** sur la solution.

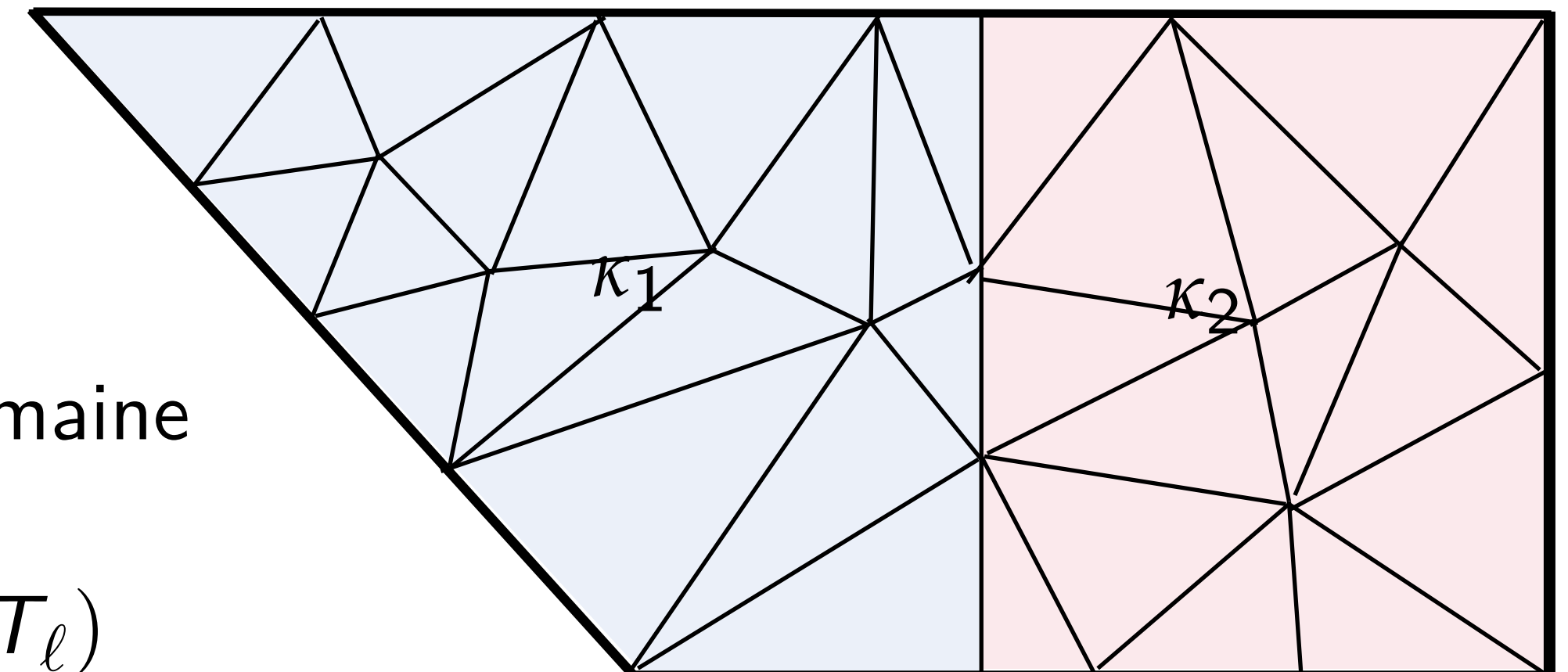
- Si $k=1$ (i.e. quand on utilise des éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}^1$) et si $\forall \mathcal{T}_h, \forall T_\ell, u \in H^2(T_\ell)$ alors la méthode converge à l'ordre 1 en norme H^1

Exemples :

Si $\kappa \in C^1(\Omega)$, et Ω est convexe alors on peut montrer que $u \in H^2(\Omega) \Rightarrow \forall T_I, u \in H^2(T_I)$

Si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ avec Ω_1 et Ω_2 convexe et κ constant par domaine $u \in H^2(\Omega_1)$ et $u \in H^2(\Omega_2)$ mais $u \notin H^2(\Omega)$

$$\forall \mathcal{T}_h, \forall \ell, T_\ell \subset \bar{\Omega}_1 \text{ ou } T_\ell \subset \bar{\Omega}_2 \Rightarrow \forall \mathcal{T}_h, \forall T_\ell, u \in H^2(T_\ell)$$



Convergence de la méthode

Théorème :

Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une suite de maillages régulière de Ω . Si $u \in C^0(\overline{\Omega})$ et pour tout $T_I \in \mathcal{T}_h$, $u \in H^{k+1}(T_I)$ il existe C une constante indépendante de h et de u telle que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k \left(\sum_{I=1}^{N_e} |u|_{k+1, T_I}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{On rappelle que } u_h \in \mathcal{V}_h^k.$$



Remarques: • ce résultat de convergence nécessite une **hypothèse de régularité** sur la solution.

- Si $k=1$ (i.e. quand on utilise des éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}^1$) et si $\forall \mathcal{T}_h, \forall T_\ell, u \in H^2(T_\ell)$ alors la méthode converge à l'ordre 1 en norme H^1

- Par contre si on utilise des E.F. d'ordre au moins 2, une vitesse de convergence meilleure n'est pas garantie. Il faudrait que u soit **encore plus régulière**.

- Si la solution n'est pas régulière, cette convergence n'implique pas une convergence ponctuelle de u ou de ses dérivées.

Attention à l'éventuelle perte de régularité locale

Théorème :

Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une suite de maillages réguliers de Ω . Si $u \in C^0(\overline{\Omega})$ et pour tout $T_I \in \mathcal{T}_h$, $u \in H^{p+1}(T_I)$ il existe C une constante indépendante de h et de u telle que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^\beta \left(\sum_{I=1}^{N_e} |u|_{k+1, T_I}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{où } \beta = \min(k, p)$$

On rappelle que $u_h \in \mathcal{V}_h^k$.

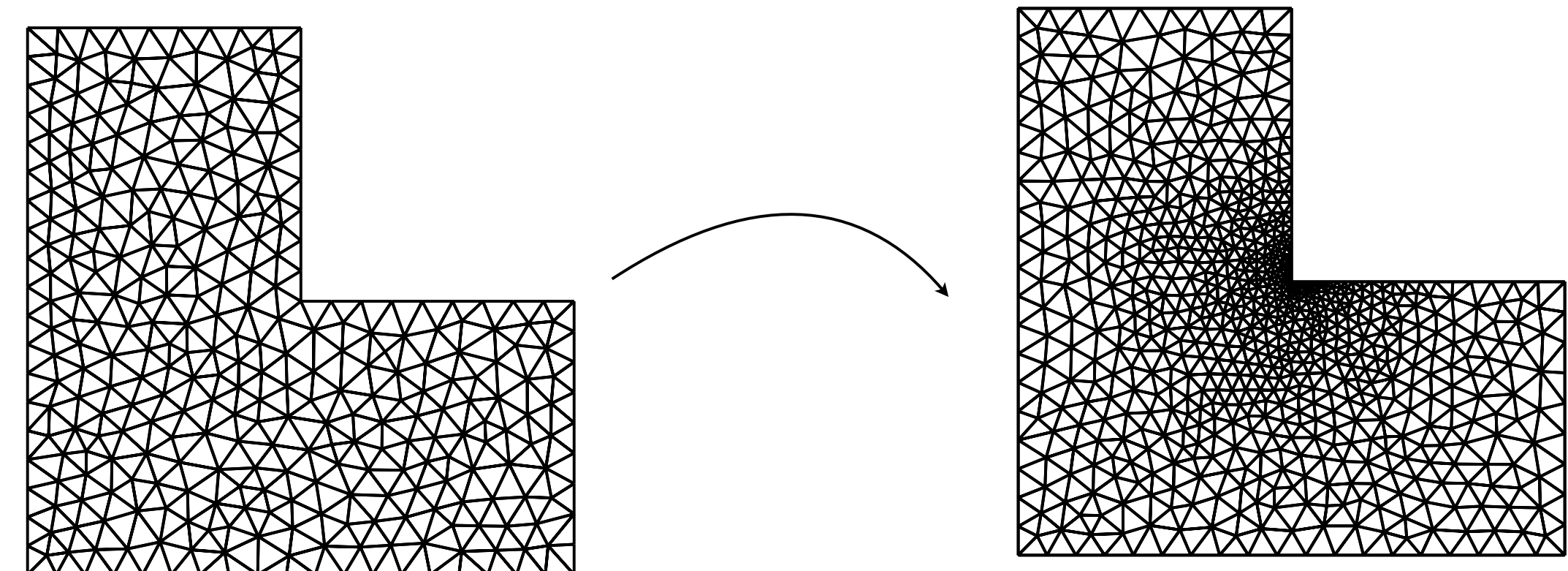
Remarques: • Il faut prendre en compte la régularité de la solution avant de choisir l'espace de discrétisation

Exemple

Si κ est une constante et Ω est un domaine en forme de L (donc non convexe)

$$u \in H^s(\Omega) \Rightarrow \forall \mathcal{T}_h, \forall T_\ell, u \in H^s(T_\ell) \quad \text{avec } s < 5/3$$

- L'erreur sur la solution n'est pas uniforme sur le domaine
 - On peut donc raffiner localement le maillage



Théorème :

Soit Ω un ouvert **convexe polygonal** et $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une suite de maillages réguliers de Ω . Soit $u_h \in \mathcal{V}_h$, l'approximation interne par la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$ pour $d \in \{2, 3\}$. On suppose par ailleurs que $f \in L^2(\Omega)$. Alors il existe C est une constante indépendante de h et de u telle que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \|u\|_{2,\Omega}$$

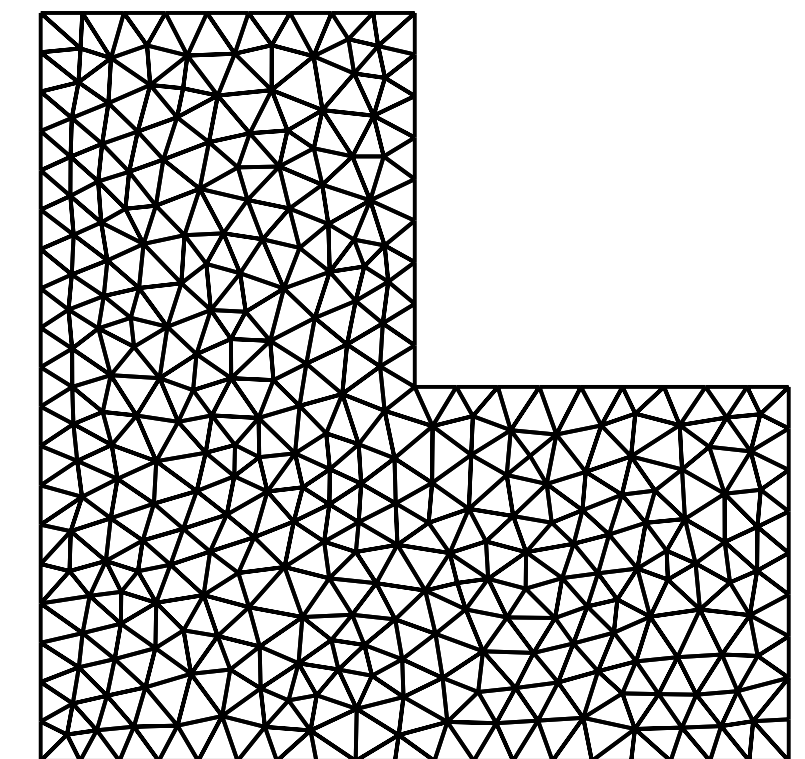
et surtout

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

- Remarque: Si u n'est pas assez régulière on va perdre un ordre de convergence

$$\forall s \leq s_{\max} \leq 1, \quad \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_s h^s \|u\|_{1+s,\Omega}$$

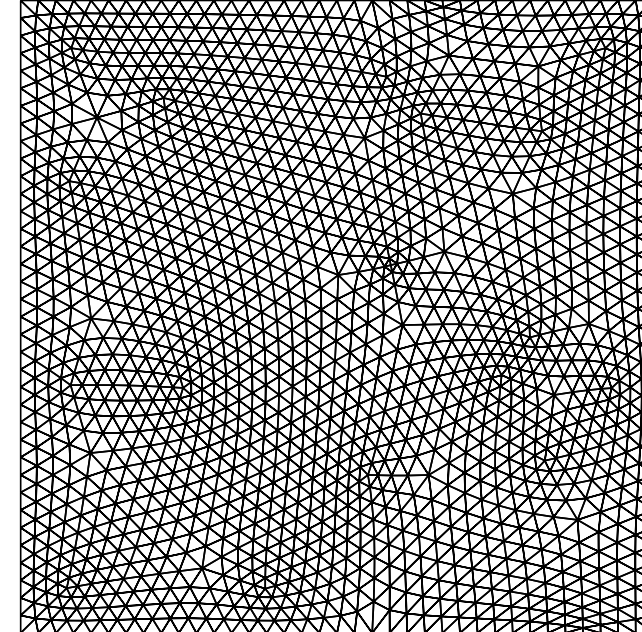
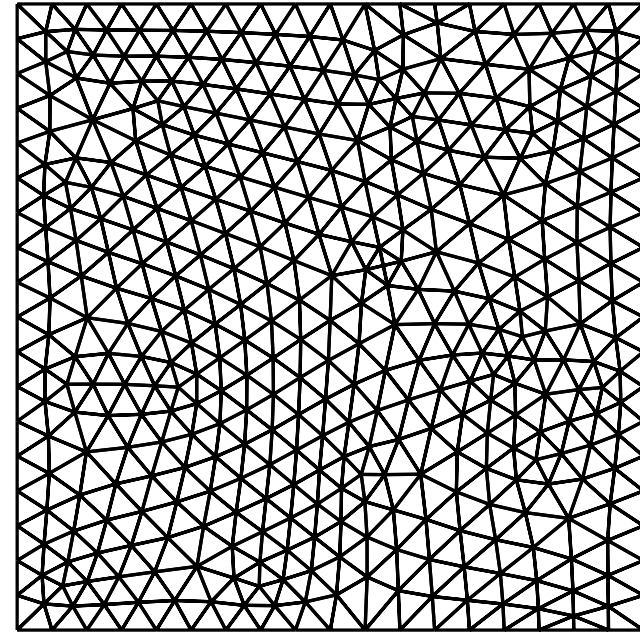
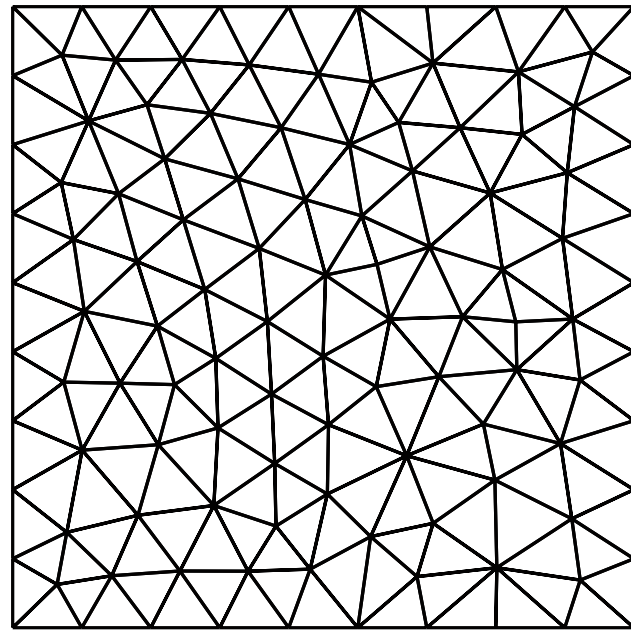
$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_s h^s \|f\|_{L^2(\Omega)}$$



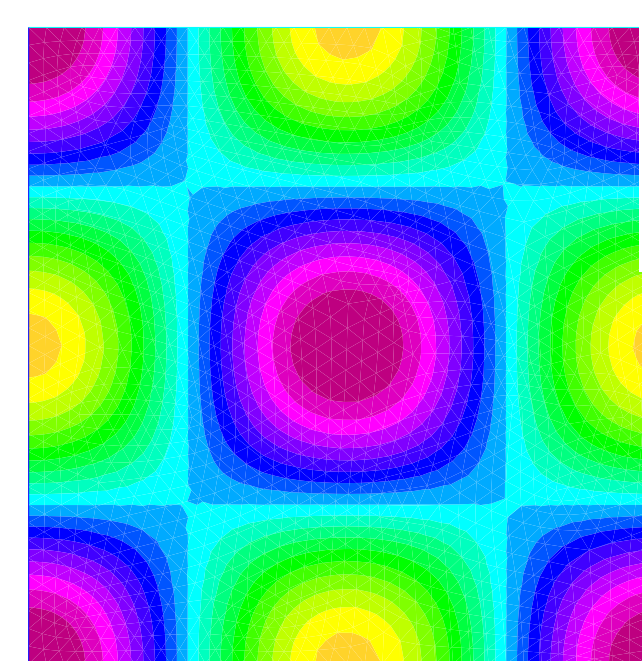
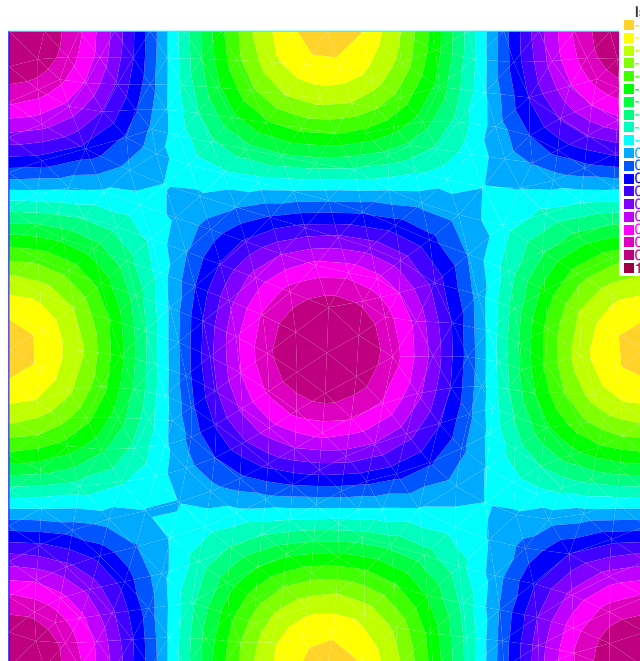
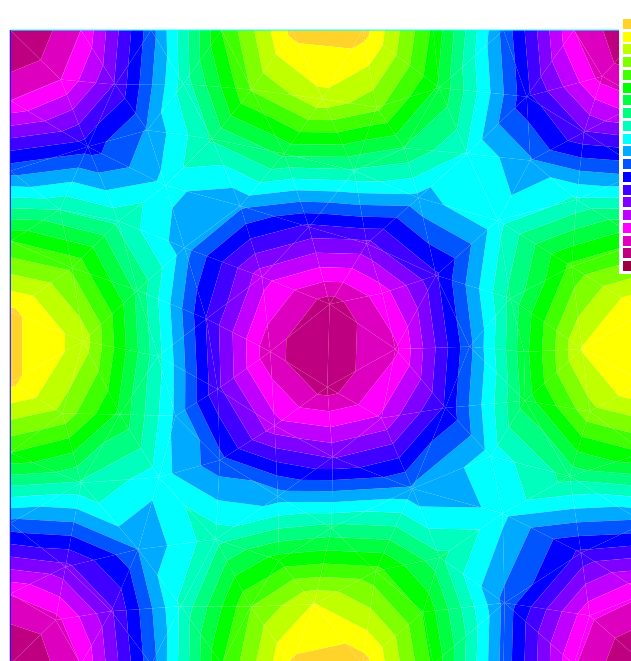
Exemple numérique

- Pour $f(x, y) = (2\pi^2 + 1) \cos(\pi x) \cos(\pi y)$ et $\kappa = 1$

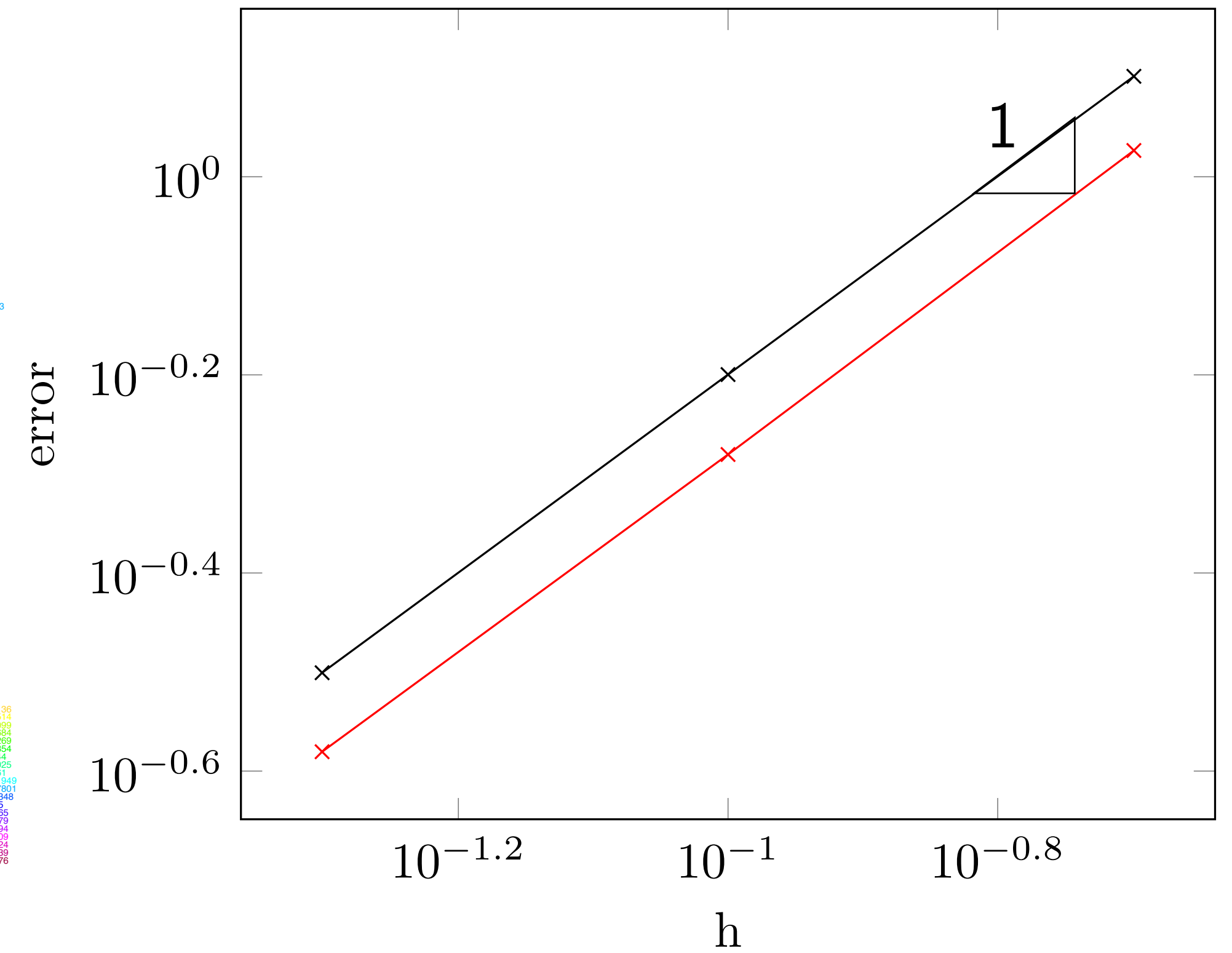
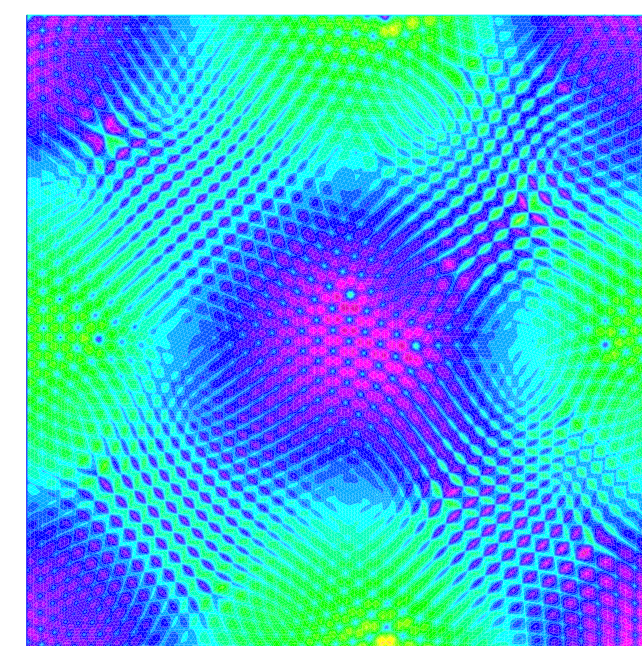
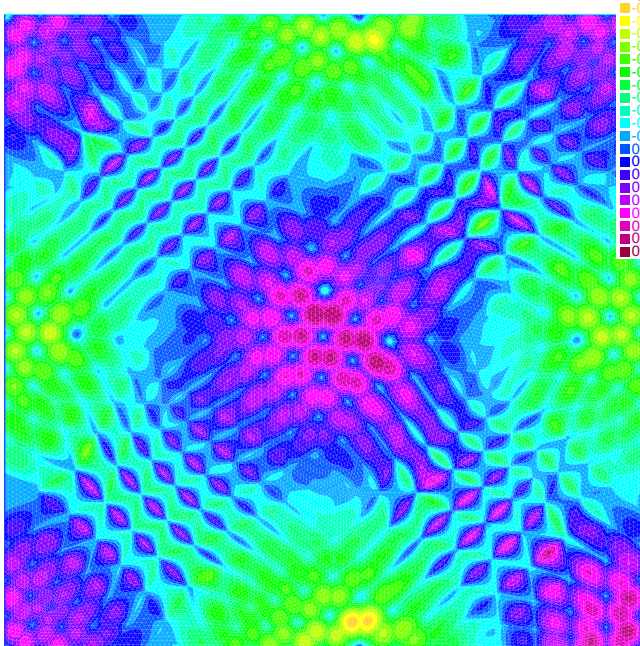
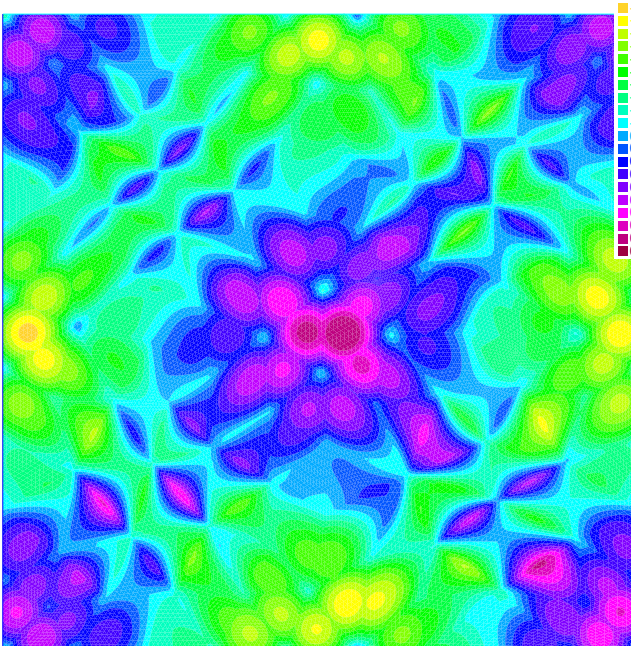
$\mathcal{T}_h$



$u_h \in \mathcal{V}_h^1$



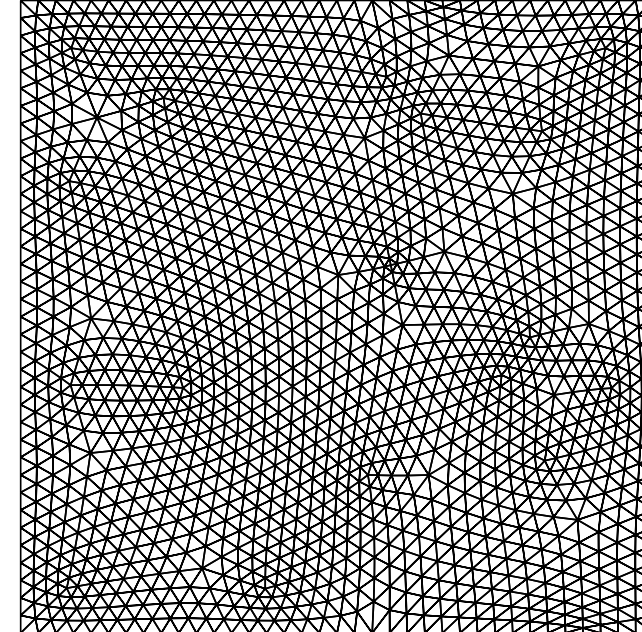
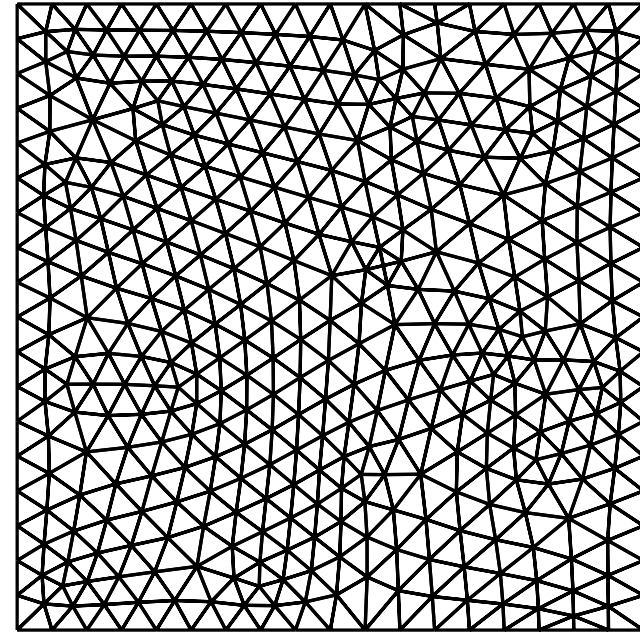
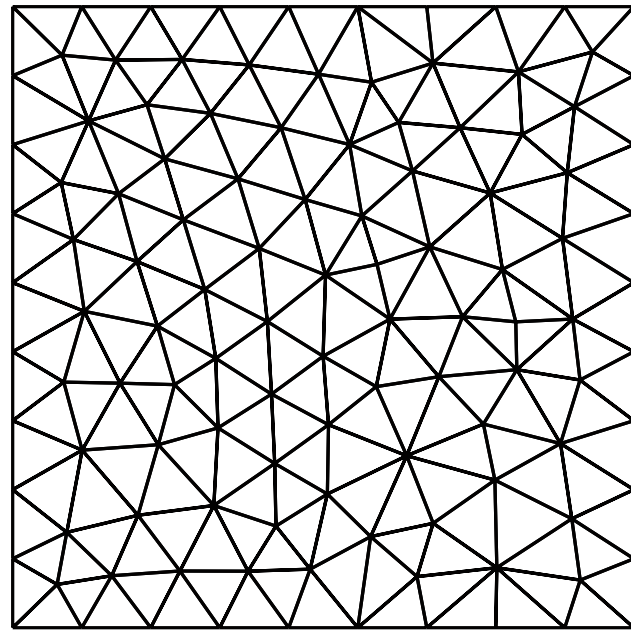
$u - u_h$



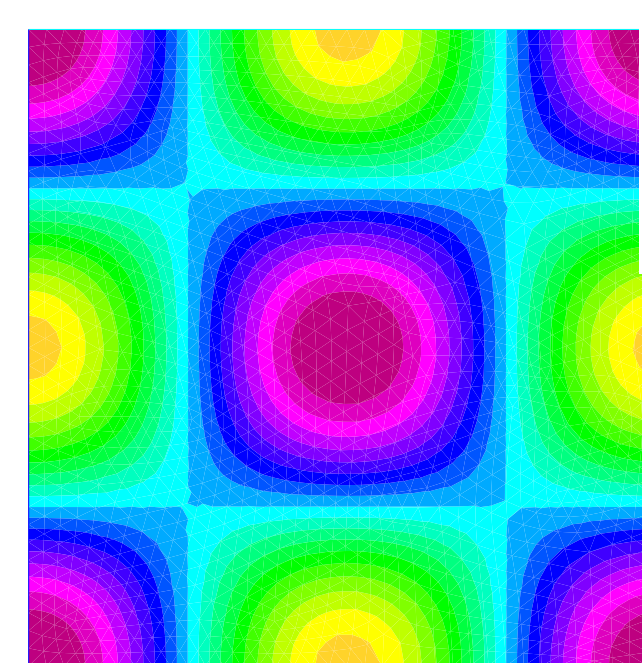
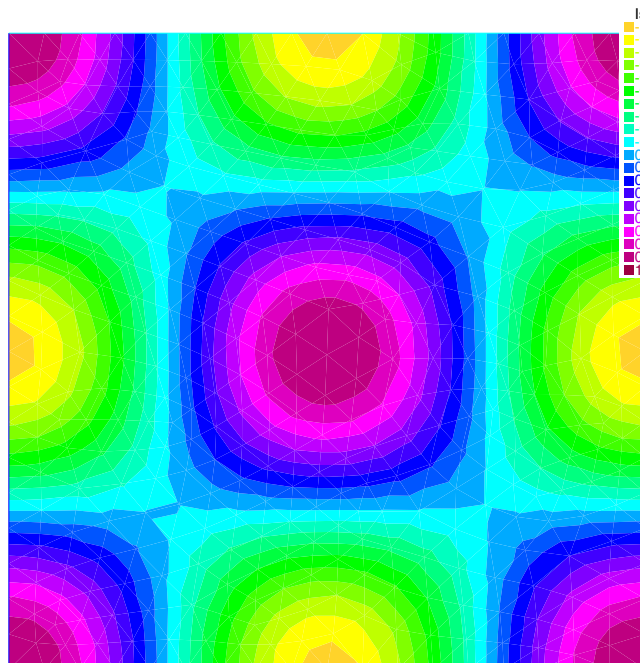
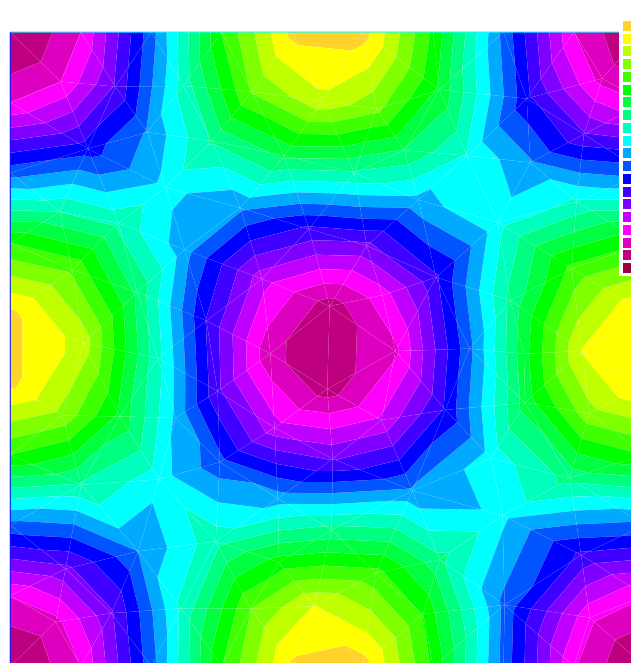
Exemple numérique

- Pour $f(x, y) = (2\pi^2 + 1) \cos(\pi x) \cos(\pi y)$ et $\kappa = 1$

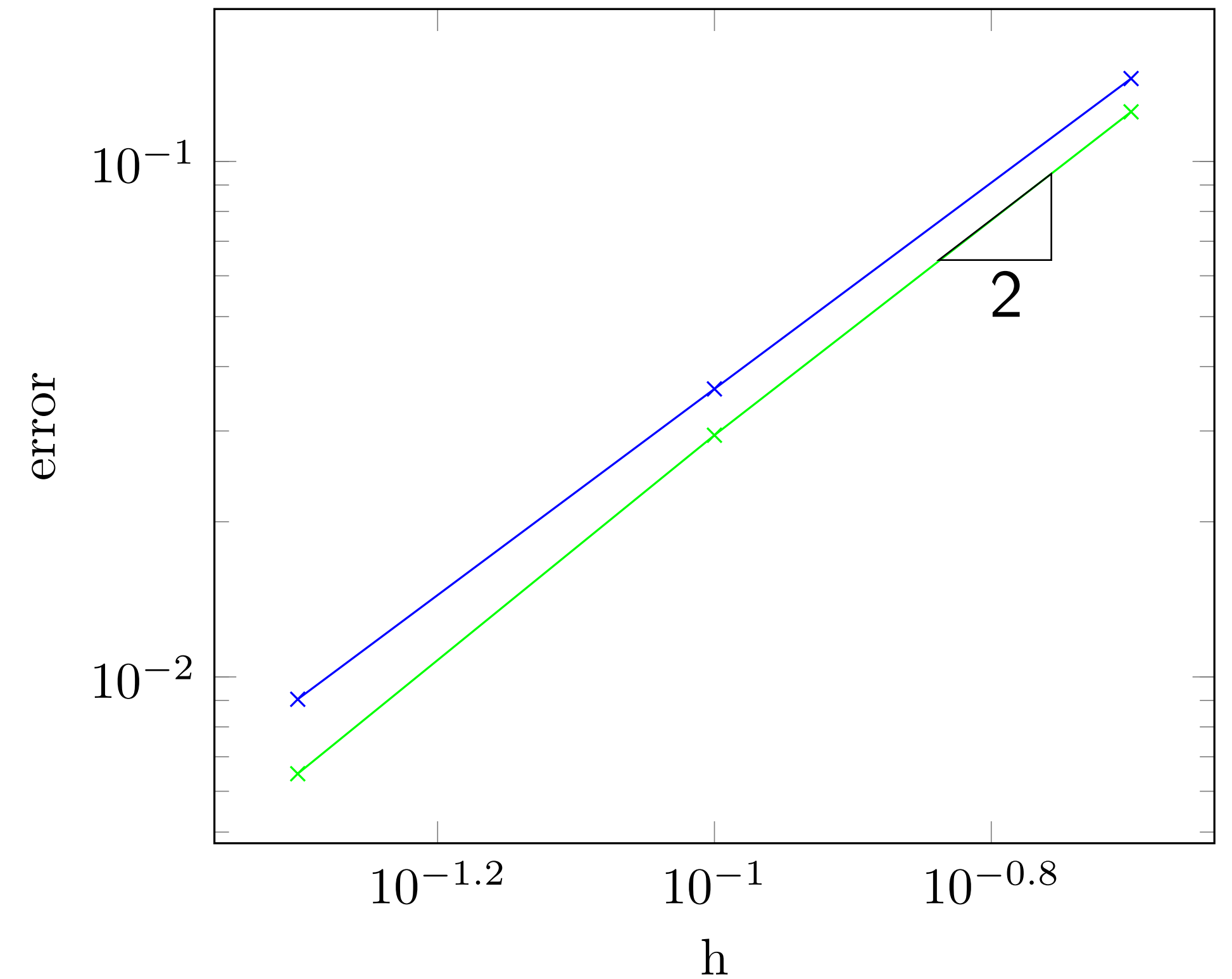
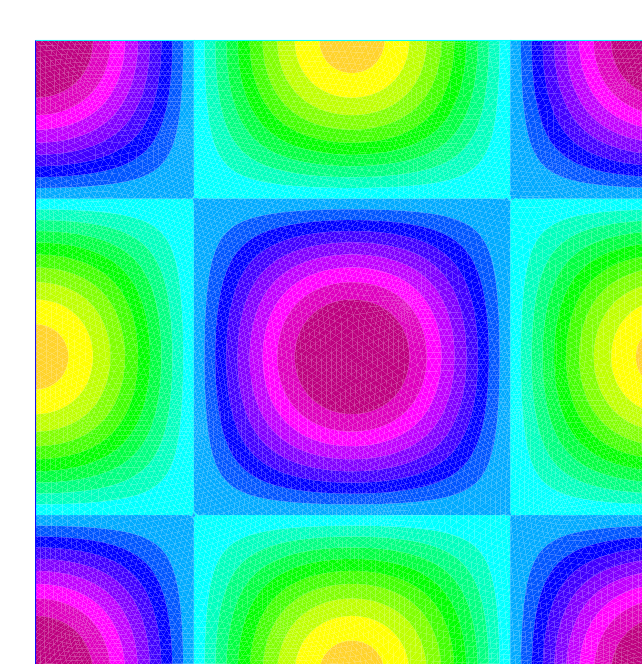
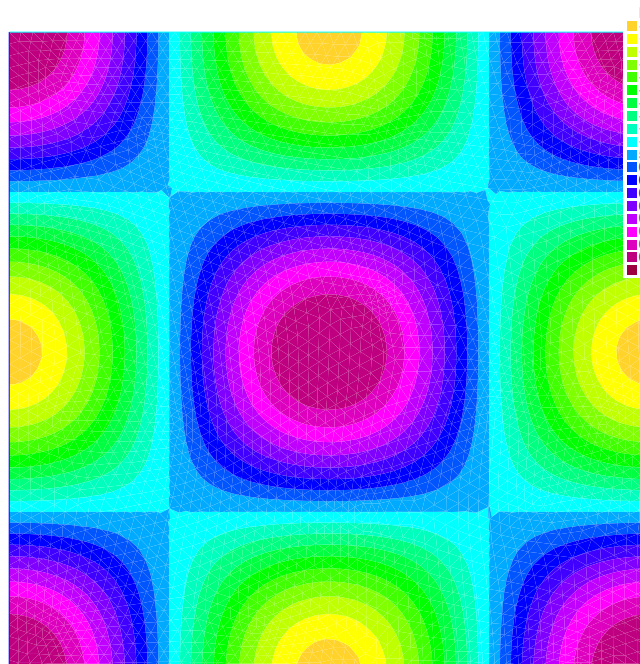
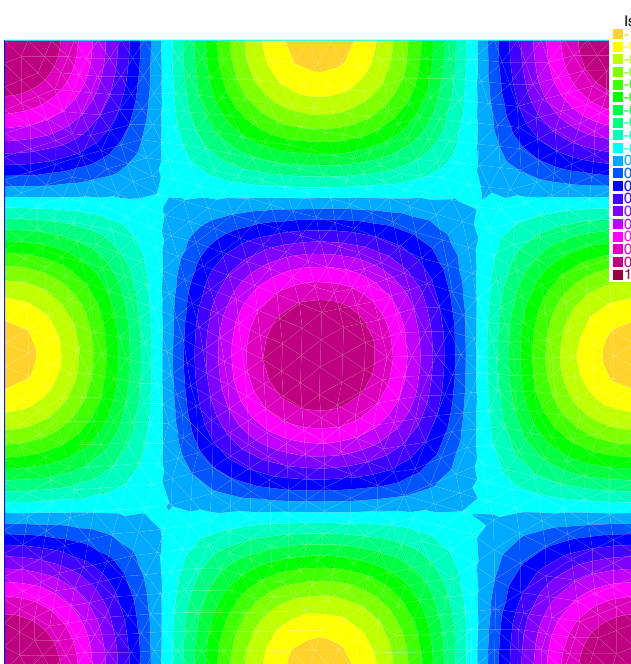
$\mathcal{T}_h$



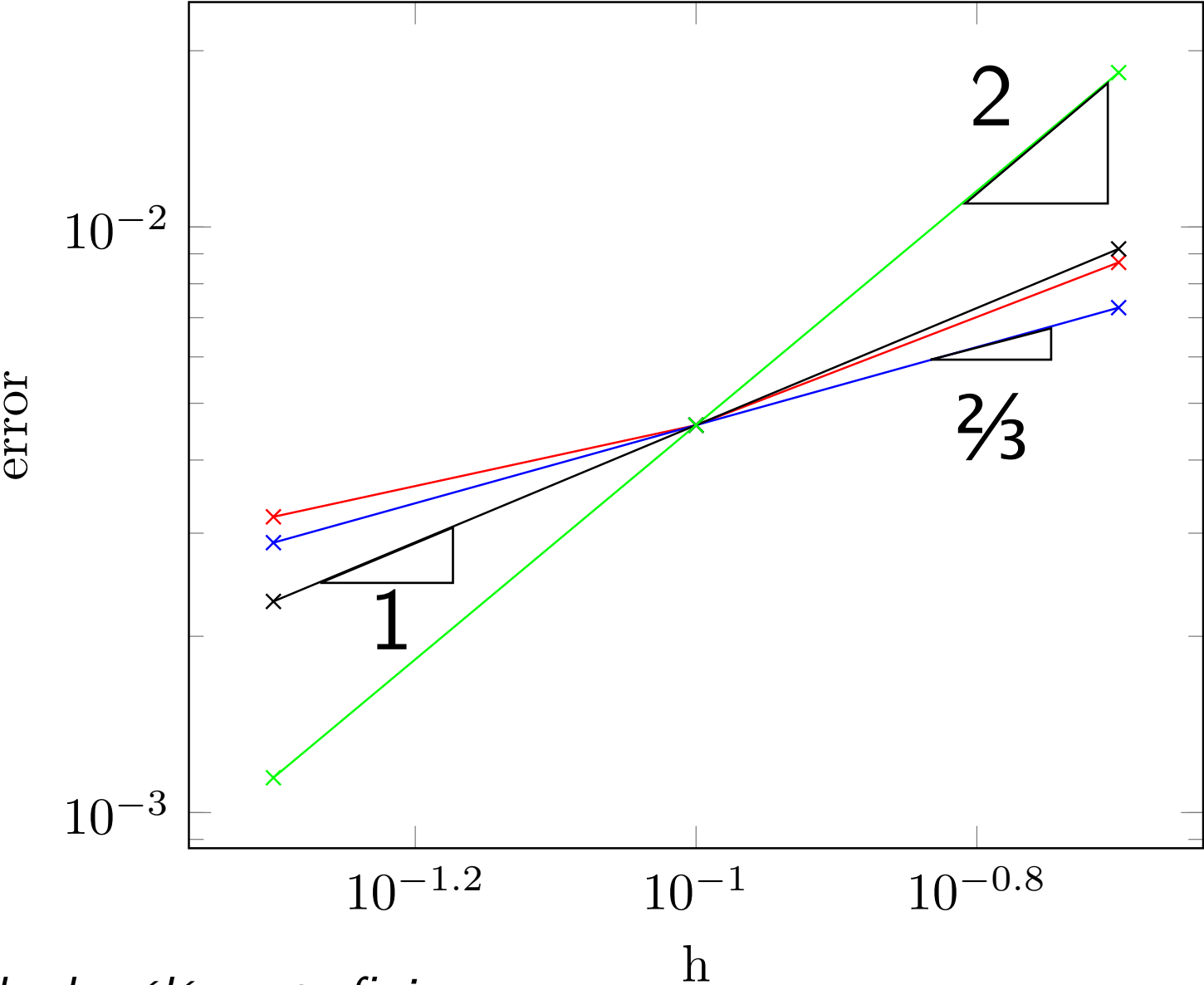
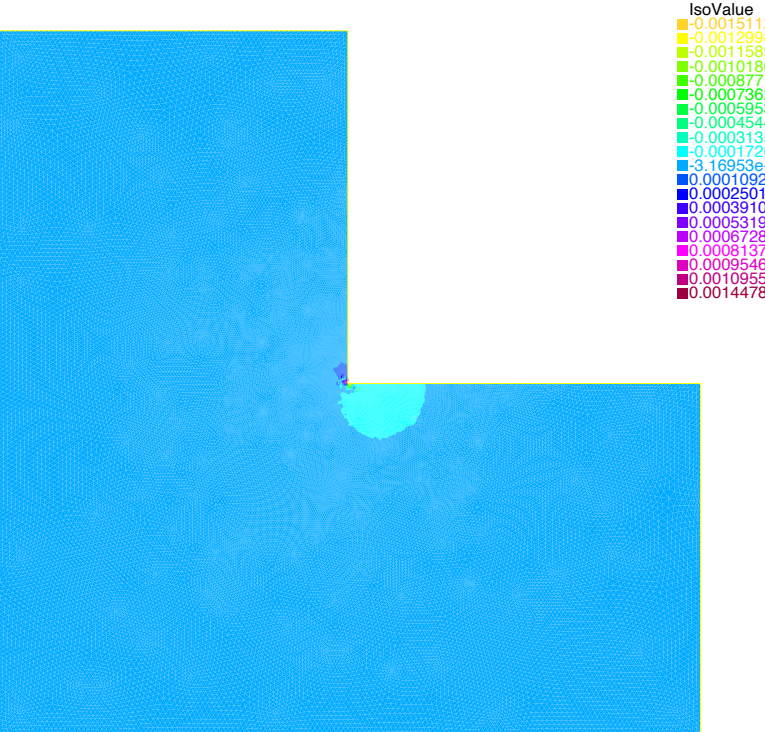
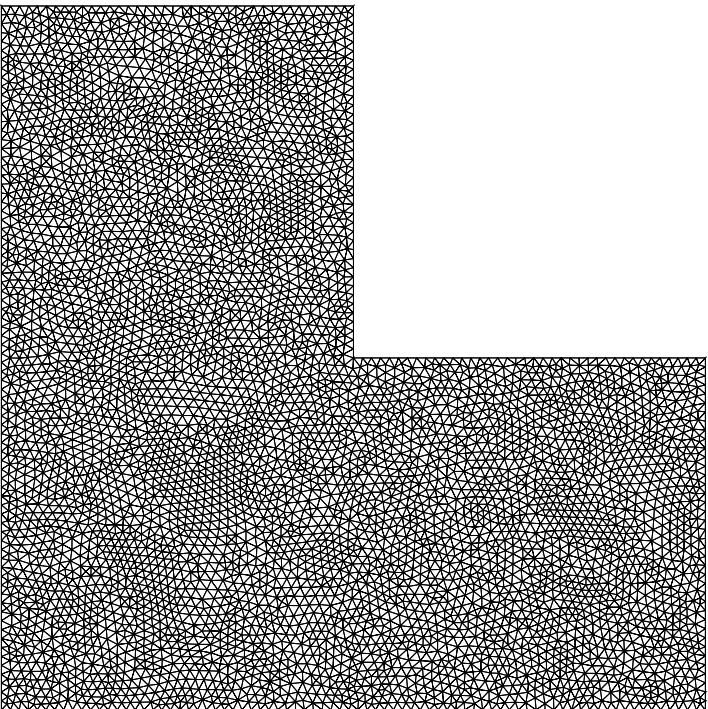
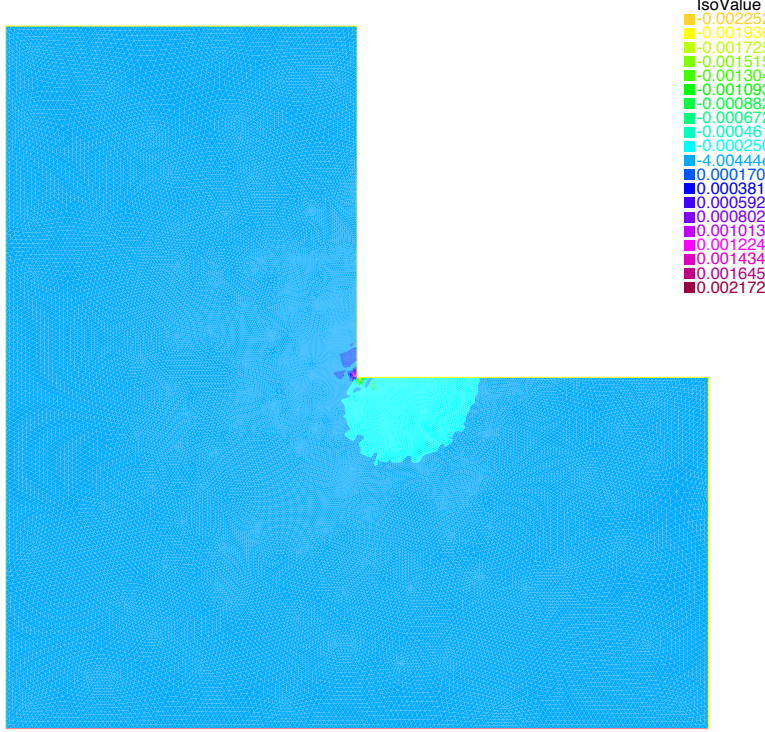
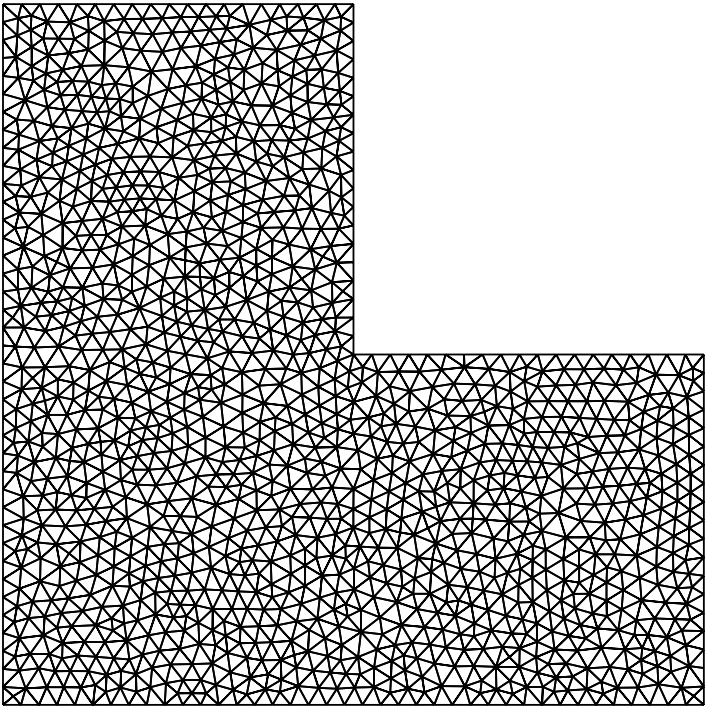
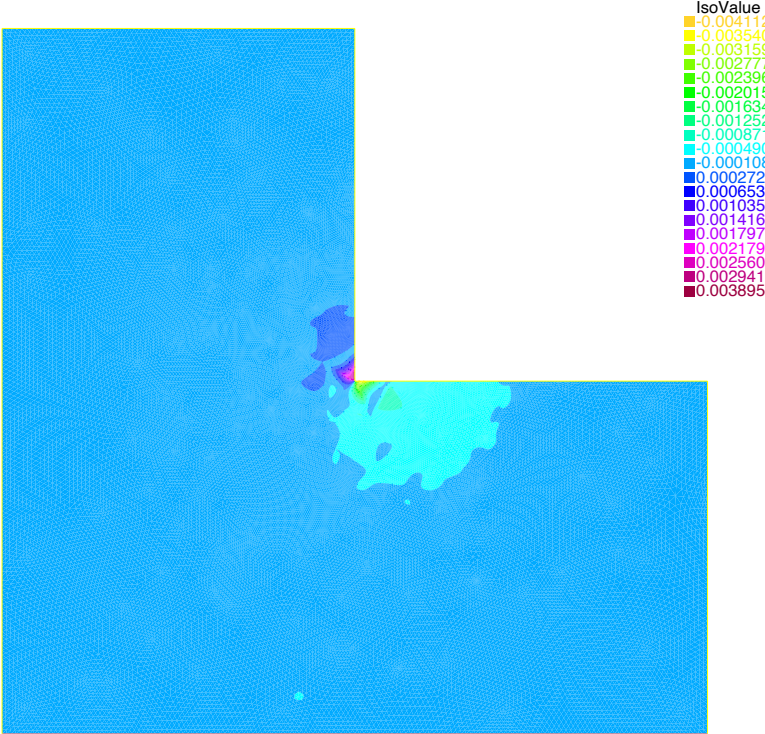
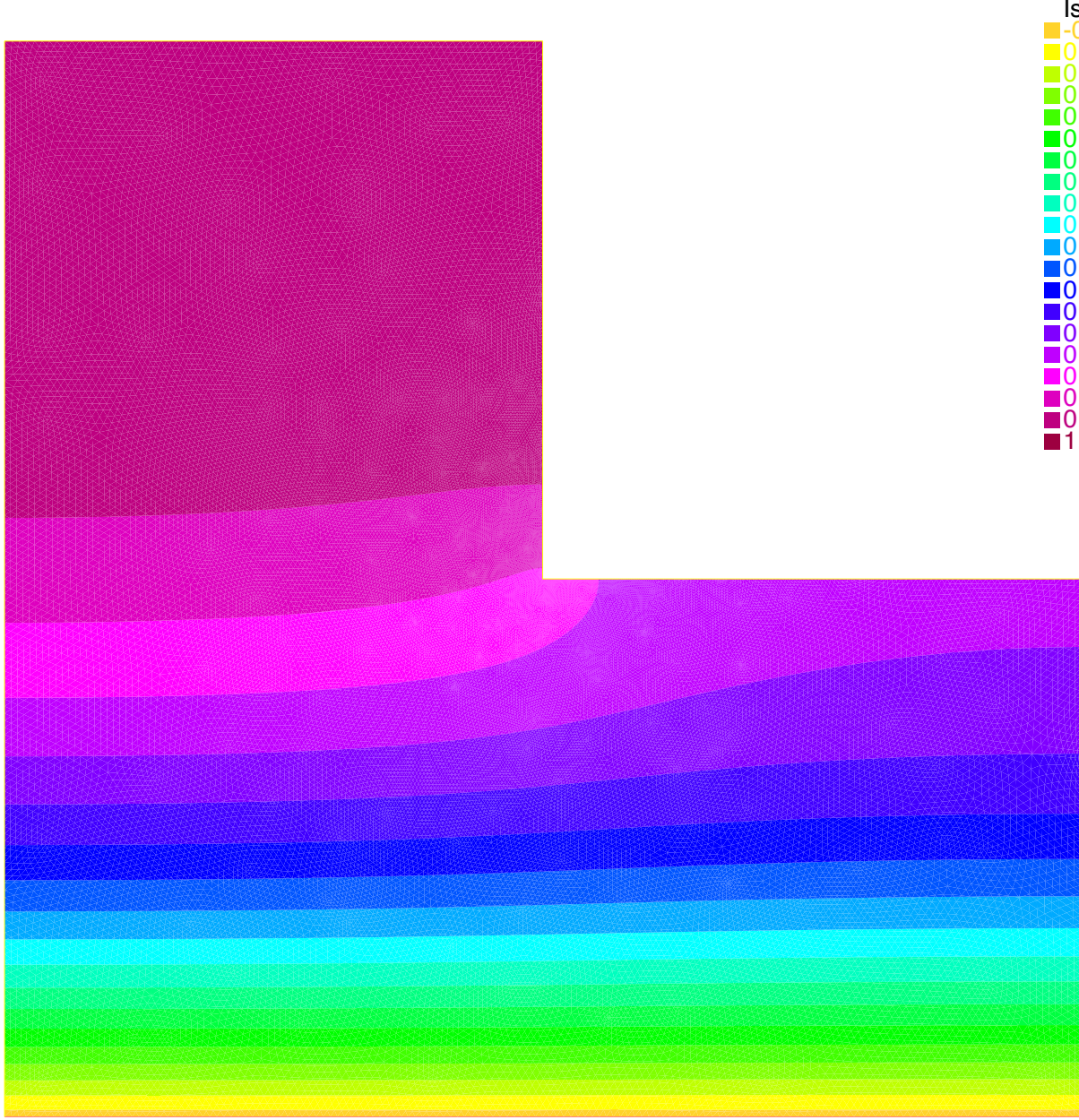
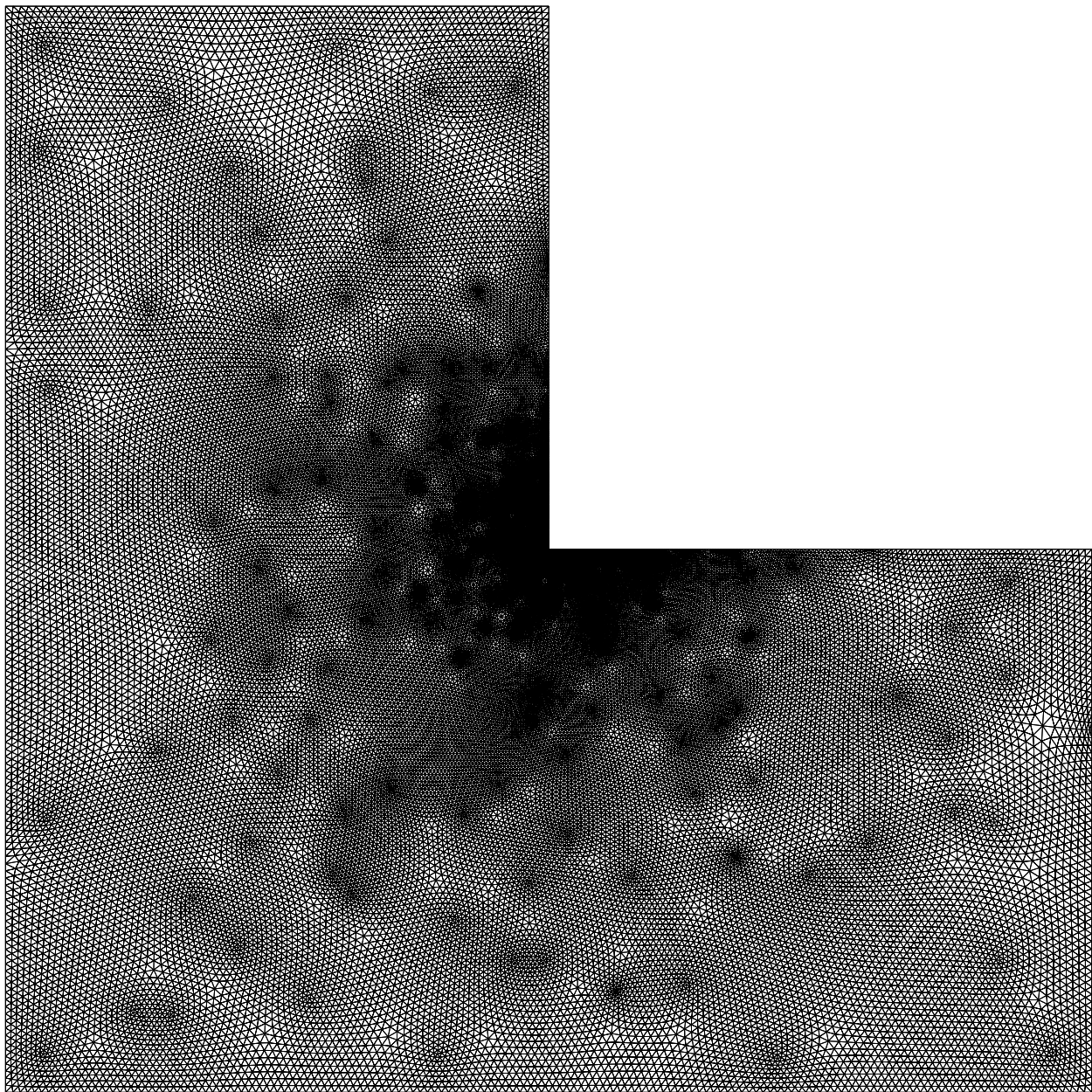
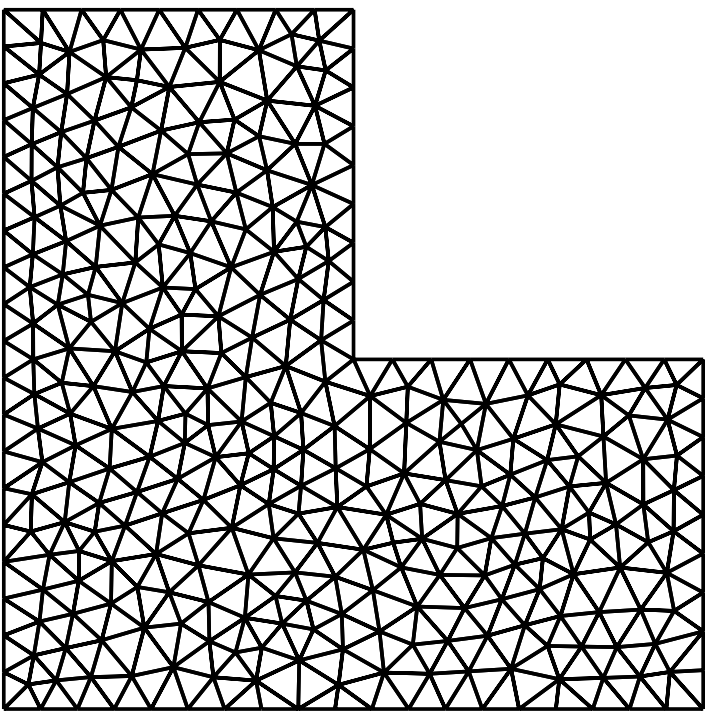
$u_h \in \mathcal{V}_h^1$



$u_h \in \mathcal{V}_h^2$



Un cas où u n'est pas assez régulière



$u_h \in \mathcal{V}_h^1$

$u_h \in \mathcal{V}_h^2$

Séance 6 : Analyse numérique de la méthode des éléments finis

Problème modèle et hypothèses

Convergence de l'approximation interne

Vitesse de convergence

Autres erreurs

Erreur sur la donnée

- Dans la pratique, nous avons plutôt calculé avec des EF P1

$$\forall v_h \in \mathcal{V}_h, \quad a(\tilde{u}_h, v_h) = \ell_h(v_h) \text{ où } \ell_h(v_h) = \int_{\Omega} (\Pi_h^1 f) v \, d\Omega$$

- Par inégalité triangulaire

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} + \|u_h - \tilde{u}_h\|_{H^1(\Omega)}$$

où on a d'après ce qui précède

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \left(\sum_{l=1}^{N_e} |u|_{2,T_l}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\|f - \Pi_h^1 f\|_{L^2(\Omega)} \leq C' h^2 \left(\sum_{l \in \llbracket 1, N_e \rrbracket} |f|_{2,T_l}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

- Par ailleurs

$$\nu \|u_h - \tilde{u}_h\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq a(u_h - \tilde{u}_h, u_h - \tilde{u}_h) = \int_{\Omega} (f - (\Pi_h^1 f))(u_h - \tilde{u}_h) \, d\Omega \leq \|f - (\Pi_h^1 f)\|_{L^2(\Omega)} \|u_h - \tilde{u}_h\|_{L^2(\Omega)}$$

- On en déduit

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \left(\sum_{l=1}^{N_e} |u|_{2,T_l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{C'}{\nu} h^2 \left(\sum_{l=1}^{N_e} |f|_{2,T_l}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C'' h(1+h) \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

- Donc la vitesse de convergence n'est pas modifiée par l'approximation de f

Plus généralement erreur de quadrature

- On considère l'approximation par quadrature

$$\int_{\Omega} \kappa(\underline{x}) \nabla u_h(\underline{x}) \cdot \nabla v_h(\underline{x}) \, d\Omega = \sum_{T_I \in \mathcal{T}_h} \sum_{1 \leq n \leq N_q} \alpha_n' \kappa(\varphi_I(\hat{q}_n)) \nabla u_h(\varphi_I(\hat{q}_n)) \cdot \nabla v_h(\varphi_I(\hat{q}_n))$$

- ce qui revient à analyser l'erreur commise en utilisant des approximation du type

$$\int_{\Omega} (\Pi_h^m \kappa)(\underline{x}) \nabla u_h(\underline{x}) \cdot \nabla v_h(\underline{x}) \, d\Omega$$

- On résout donc en pratique une formulation variationnelle de la forme $\forall v_h \in \mathcal{V}_h, \quad a_h(u_h, v_h) = \ell_h(v_h)$

Lemme de Strang (admis) :

Si les a_h forment une famille stable, i.e.

$$\exists \beta > 0, \quad \forall v_h \in \mathcal{V}, \quad \sup_{w_h \in \mathcal{V}_h} \frac{a_h(v_h, w_h)}{\|w_h\|_{\mathcal{V}}} \geq \beta \|v_h\|_{\mathcal{V}},$$

alors il existe une constante C indépendante de h telle que

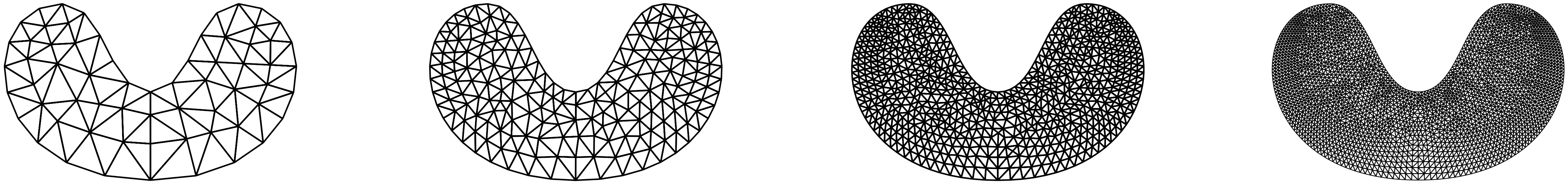
$$\|u - u_h\|_{\mathcal{V}} \leq C \inf_{v_h \in \mathcal{V}_h} \left\{ \|u - v_h\|_{\mathcal{V}} + \sup_{w_h \in \mathcal{V}_h} \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_{\mathcal{V}}} + \sup_{w_h \in \mathcal{V}_h} \frac{|\ell(w_h) - \ell_h(w_h)|}{\|w_h\|_{\mathcal{V}}} \right\}$$

erreur de consistance

Domaine courbe

- On approche un domaine courbe par une séquence de maillages polyédriques telle que

$$\text{dist}(\partial\Omega, \partial\Omega_h) \leq Ch^2$$



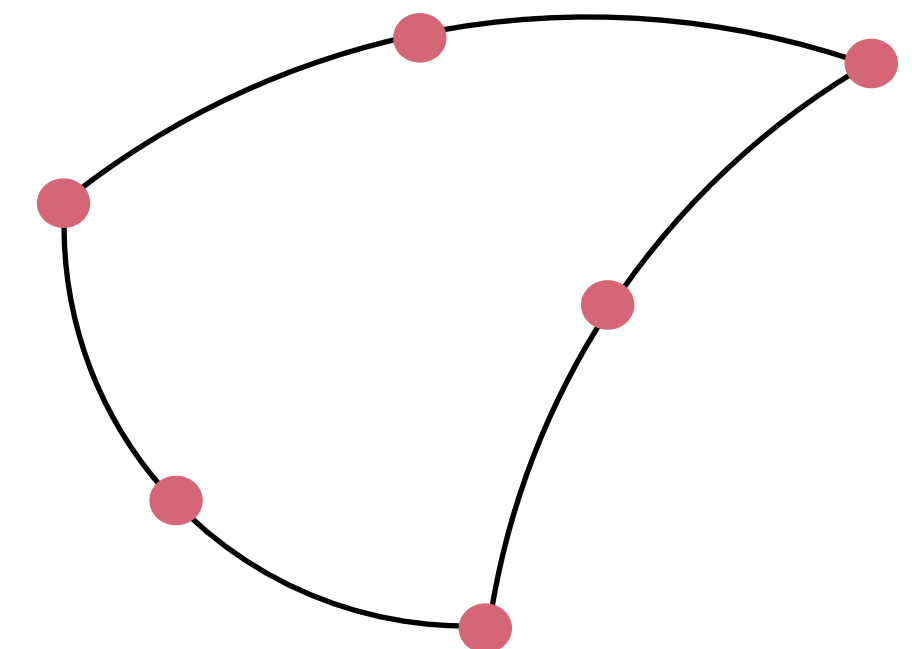
- Dans ce cas nous n'avons plus une approximation interne $\mathcal{V}_h \not\subset \mathcal{V}$
- Mais on arrive tout de même à montrer que si $k = 1$ et $u \in H^2(\Omega)$

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch|u|_{2,\Omega}$$

mais si $k \geq 2$ et $u \in H^{k+1}(\Omega)$

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{\frac{3}{2}}|u|_{k+1,\Omega}$$

- Donc la méthode n'est pas très satisfaisante au delà du $\mathbb{P}_1$.
- Dans le cas général on introduit une description courbe ($\mathbb{P}_k$) de la géométrie.
 - On parle d'éléments finis isoparamétriques



Théorème de Aubin-Nitsche

Lemme d'Aubin Nitsche :

Pour la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$ on a sous les mêmes conditions le résultat de convergence L^2 :

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

- Preuve: On introduit un problème auxiliaire, où on cherche $w \in H^1(\Omega)$ tel que

$$a(v, w) = \int_{\Omega} (u - u_h) v \, d\Omega, \quad v \in H^1(\Omega).$$

- pour lequel on a l'estimation

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = a(u - u_h, w) = a(u - u_h, w - \Pi_h^1 w) \leq M \|w - \Pi_h^1 w\|_{H_0^1(\Omega)} \|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)}$$

- On en déduit, en supposant que $w \in H^2(\Omega)$

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_1 h \|w\|_{H^2(\Omega)} C_2 h \|f\|_{L^2(\Omega)} \text{ et par ailleurs } \|w\|_{H^2(\Omega)} \leq C_3 \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$$

- On obtient donc bien

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Examen la semaine prochaine sans documents

Programme: tout ce qui a été fait jusqu'à présent.

Je réponds aux questions dans mon bureau le vendredi 17 après midi.

Un amphi d'ouverture suivra.
