

# La méthode des éléments finis

Partie 1 : Approximation et discrétisation (suite et fin)  
Partie 2 : convergence de la méthode (début)

Sonia Fliss

# Problème avec une Condition de Neumann homogène

Trouver l'unique solution  $u$  dans  $H^1(\Omega)$  de

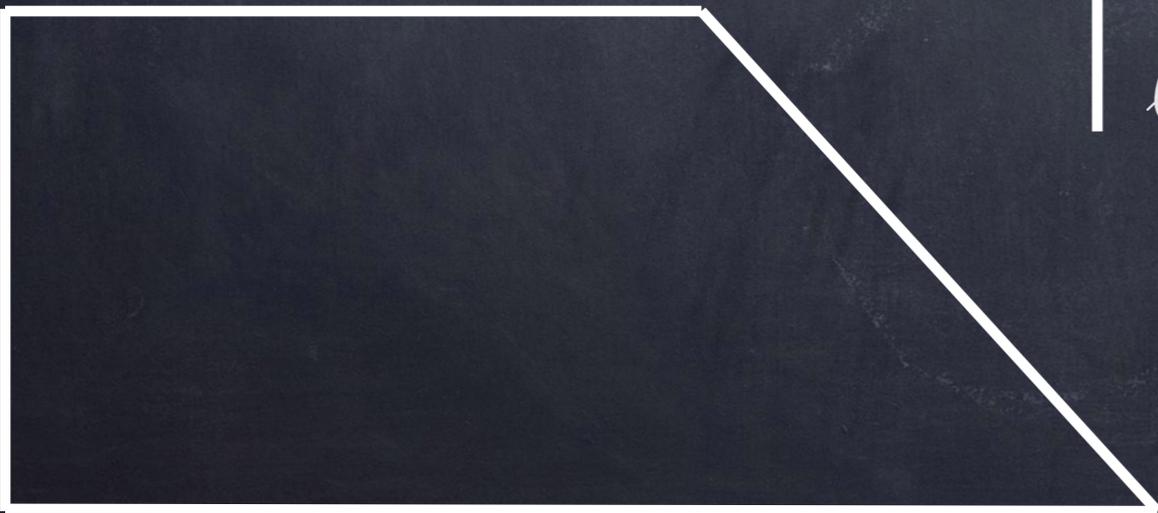
$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Trouver l'unique solution  $u$  dans  $H^1(\Omega)$  de

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad a(u, v) = \ell(v) \quad (\mathcal{P})$$

$$\text{où } \left| \begin{array}{l} a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega \\ \ell(v) = \int_{\Omega} f v \, d\Omega \end{array} \right.$$

$\Omega$



# Problème avec une Condition de Neumann homogène

Soit  $u_h \in V_h^1$  solution de

$$\text{Trouver } u_h \in V_h^1 \text{ telle que } a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in V_h^1 \quad (\text{F.V.}_h)$$

où  $V_h^1 = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), \quad \forall I \in \{1, \dots, N_{\text{tri}}\}, v_h|_{\mathcal{T}_I} \in \mathbb{P}_1\}$

Soit  $(w_i)_{i \in \llbracket 1, N_{\text{som}} \rrbracket}$  la **base** de  $V_h^1$  définie par

$$\forall i, j \in \{1, \dots, N_{\text{som}}\}, \quad w_j(S_i) = \delta_{ij}$$

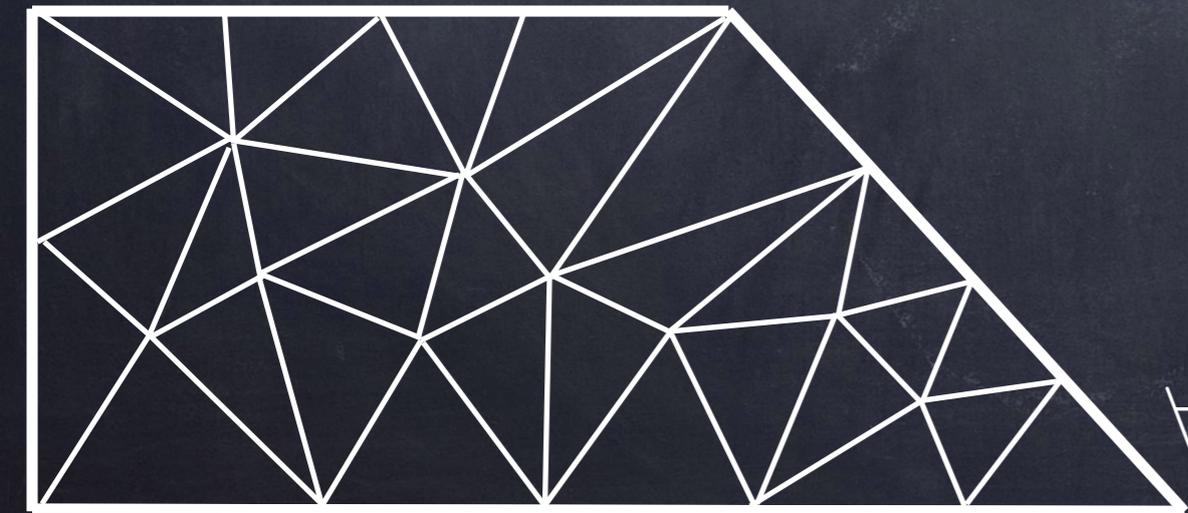
On a montré que

$$u_h \in V_h \text{ solution de (F.V.}_h) \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in \llbracket 1, n_h \rrbracket, \quad a(u_h, w_i) = \ell(w_i)$$

$\Omega$  En utilisant que  $u_h = \sum_{i=1}^{N_{\text{som}}} u_h(S_i) w_i$

$$u_h \in V_h \text{ solution de (F.V.}_h)$$

$$\forall i \in \llbracket 1, N_{\text{som}} \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^{N_{\text{som}}} u_h(S_j) a(w_j, w_i) = \ell(w_i)$$



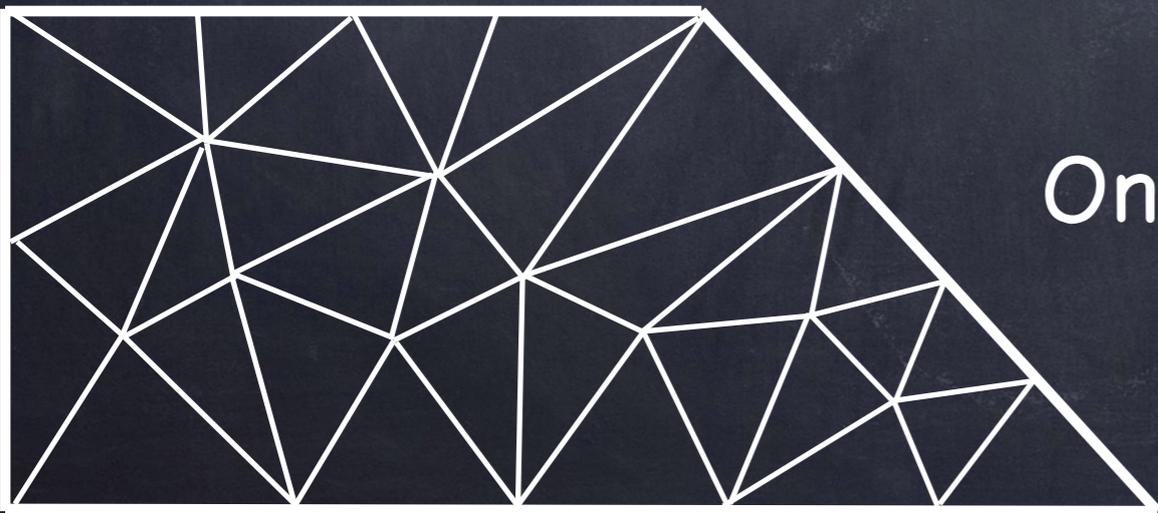
# Systeme matriciel

Trouver l'unique solution  $u_h$  dans  $V_h^1 \subset H^1(\Omega)$  de

$$A U = L \quad (\mathcal{P}_h)$$

où

$$\begin{cases} A = K + M & K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla w_j \cdot \nabla w_i \, d\Omega & M_{ij} = \int_{\Omega} w_j w_i \, d\Omega \\ L_i = \ell(w_i) = \int_{\Omega} f w_i \, d\Omega \\ U_i = u_h(S_i) \end{cases}$$



On en déduit  $u_h = \sum_{i=1}^{N_{\text{som}}} u_h(S_i) w_i$

# Assemblage et résolution

## Calcul des coefficients des matrices $\mathbb{M}$ et $\mathbb{K}$

Assemblage des matrices : boucle sur les triangles, Calcul des matrices élémentaires, Ajout des contributions de chaque triangle dans les matrices.

## Calcul des coefficients du second membre $\mathbb{L}$

Si  $f \in C^0(\bar{\Omega})$  on l'approche par son interpolée  $\pi_h f = \sum_{j=1}^{N_{\text{som}}} f(S_j) w_j$

$$\mathbb{L}_i = \int_{\Omega} f w_i d\Omega \approx \int_{\Omega} \pi_h f w_i d\Omega = \sum_{j=1}^{N_{\text{som}}} f(S_j) \int_{\Omega} w_j w_i d\Omega = (\mathbb{M} \mathbb{F})_i \quad \text{où } \mathbb{F}_i = f(S_i)$$

Calcul de l'unique solution  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N_{\text{som}}}$  de

$$\mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbb{L}$$

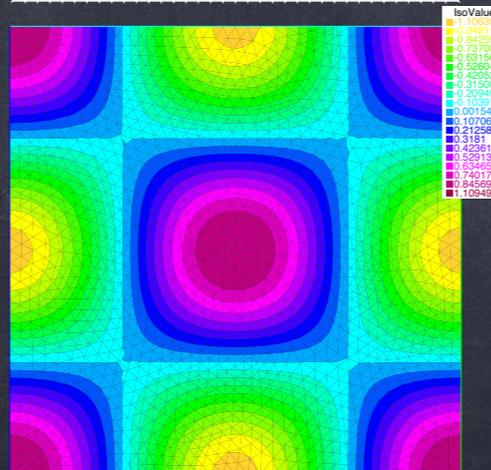
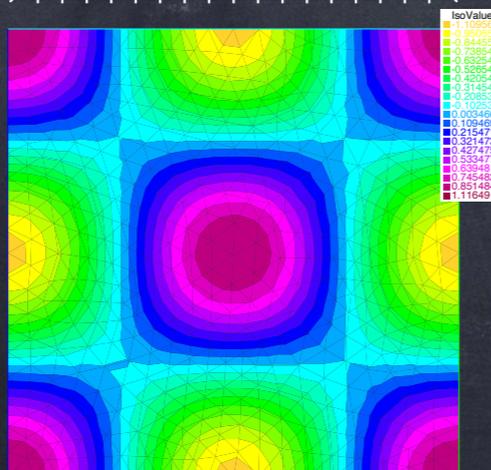
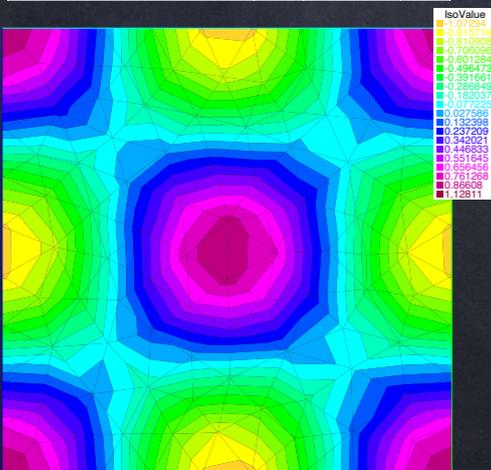
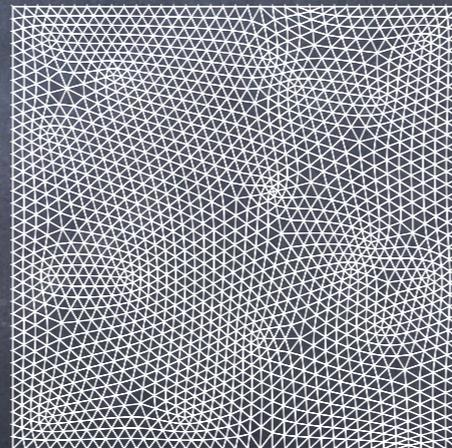
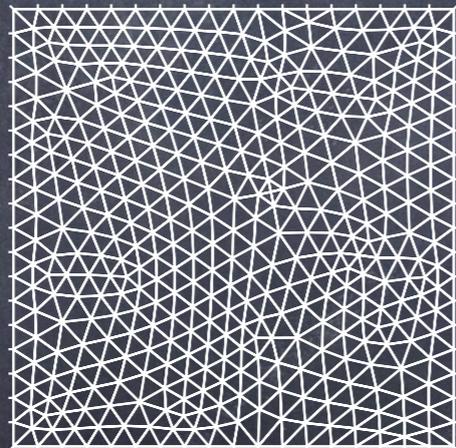
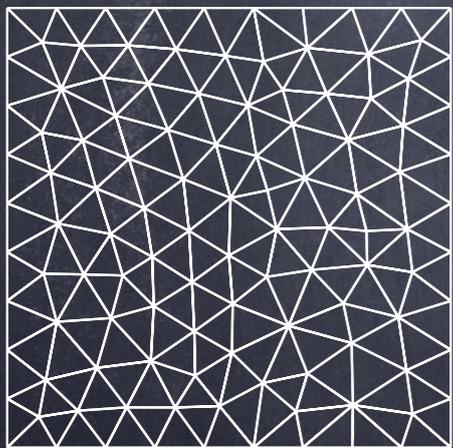
où  $\mathbf{A} = \mathbb{K} + \mathbb{M}$  est inversible.

# Validation

Pour valider le code, on choisit une géométrie simple (un carré) et une fonction  $u$  qu'on souhaite approcher. Attention elle doit vérifier la condition aux limites. On calcule ensuite le terme source associé.

$u(x, y) = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$  est solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{ssi} \quad f(x, y) = (2\pi^2 + 1) \cos(\pi x) \cos(\pi y)$$



La solution calculée semble converger vers  $u$ .

# Validation

Calcul de l'erreur  $L^2$

$$\|u - u_h\|_{L^2} \approx \|\pi_h u - u_h\|_{L^2} = \sqrt{{}^t(\mathbf{U}^{ex} - \mathbf{U})\mathbf{M}(\mathbf{U}^{ex} - \mathbf{U})}$$

Calcul de l'erreur en semi-norme  $H^1$

$$\|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2} \approx \|\nabla \pi_h u - \nabla u_h\|_{L^2} = \sqrt{{}^t(\mathbf{U}^{ex} - \mathbf{U})\mathbf{K}(\mathbf{U}^{ex} - \mathbf{U})}$$

où on a approché  $u$  par son interpolée  $\pi_h u = \sum_{j=1}^{N_{som}} u(S_j)w_j$   
et où  $U_i^{ex} = u(S_i)$  et  $U_i = u_h(S_i)$

On trace en rouge pointillé

$$\log h \mapsto \log \|\pi_h u - u_h\|_{L^2} / \|\pi_h u\|_{L^2}$$

et en bleu

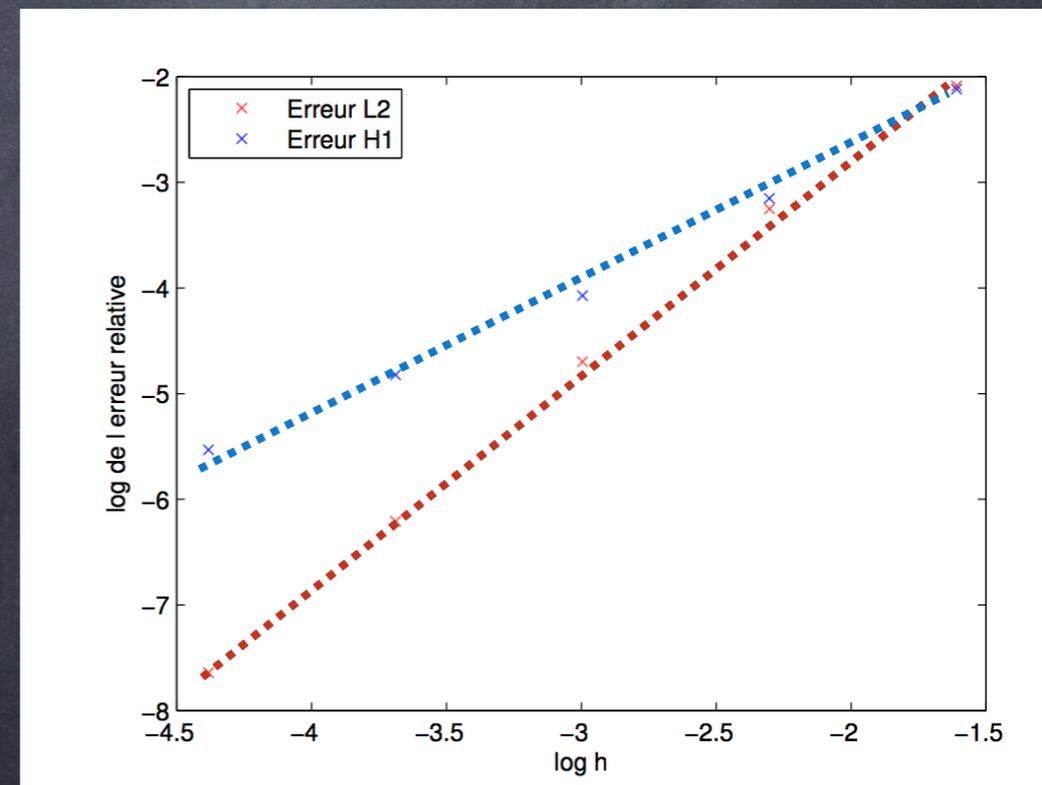
$$\log h \mapsto \log \|\nabla \pi_h u - \nabla u_h\|_{L^2} / \|\nabla \pi_h u\|_{L^2}$$

Une régression linéaire montre que

$$\|\pi_h u - u_h\|_{L^2} \sim h^2$$

$$\|\nabla \pi_h u - \nabla u_h\|_{L^2} \sim h$$

Ceci sera justifié en Amphi 6.



# Programme de la partie 1 de l'amphi

- Conditions de type Fourier non homogènes
- Prise en compte des conditions de Dirichlet homogènes
- Formules de quadrature
- Autres exemples d'éléments finis ...

# Problème avec une Condition de Fourier

Soient  $\lambda \geq 0$ ,  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in L^2(\partial\Omega)$ .

Trouver  $u \in H^1(\Omega)$  telle que

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} + \lambda u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

Trouver  $u \in H^1(\Omega)$  telle que  $\forall v \in H^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} [\nabla u \cdot \nabla v + uv] d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u \gamma_0 v d\Gamma = \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\partial\Omega} g \gamma_0 v d\Gamma$$

$a(u, v)$

$l(v)$



$\Omega$

# Systeme matriciel

Trouver l'unique solution  $u_h$  dans  $V_h^1 \subset H^1(\Omega)$  de

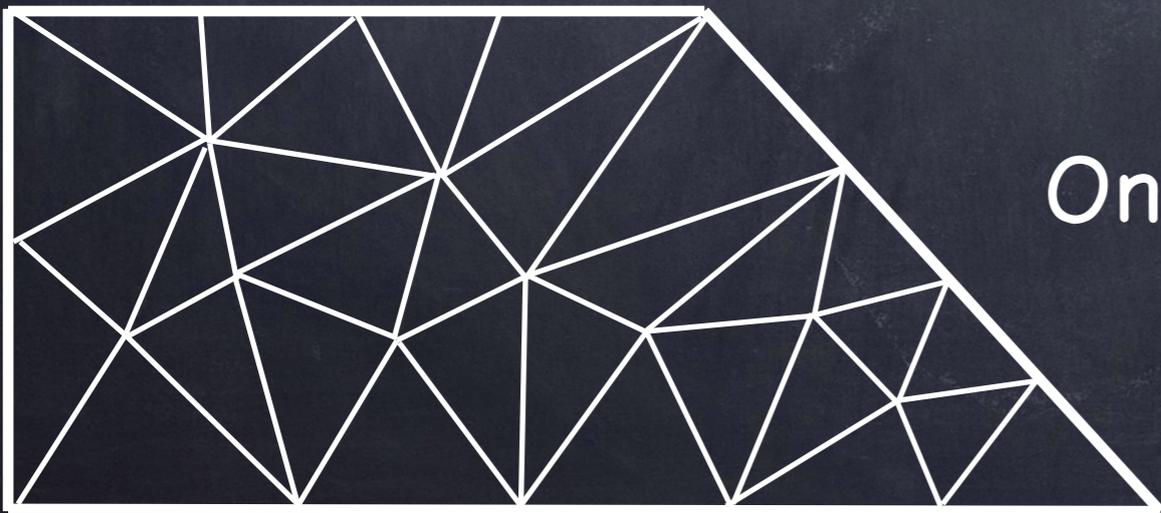
$$A U = L \quad (\mathcal{P}_h)$$

où

$$A = K + M + \lambda S \quad \text{avec} \quad S_{ij} = \int_{\partial\Omega} w_j w_i d\Gamma \quad \text{matrice de masse surfacique}$$
$$L_i = \ell(w_i) = \int_{\Omega} f w_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} g w_i d\Gamma$$
$$U_i = u_h(S_i)$$

$\Omega$

On en déduit  $u_h = \sum_{i=1}^{N_{\text{som}}} u_h(S_i) w_i$





# Assemblage et résolution

Calcul des coefficients des matrices  $\mathbb{M}$ ,  $\mathbb{K}$  et  $\mathbb{S}$

Pour l'assemblage de la matrice  $\mathbb{S}$  : boucle sur les arêtes,  
Calcul des matrices élémentaires, Ajout des contributions de  
chaque arête dans la matrice.

Calcul des coefficients du second membre

$$\mathbb{L}_i = \ell(\mathbf{w}_i) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{w}_i \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \mathbf{w}_i \, d\Gamma$$

Si  $\mathbf{g} \in C^0(\partial\Omega)$  on utilise la fonction  $\pi_h \mathbf{g} \in V_h^1$ ,  $\pi_h \mathbf{g} = \sum_{j, S_j \in \partial\Omega} \mathbf{g}(S_j) \mathbf{w}_j$

Notez que  $\pi_h \mathbf{g}(S_j) = \begin{cases} \mathbf{g}(S_j) & \text{si } S_j \in \partial\Omega \\ 0 & \text{si } S_j \notin \partial\Omega \end{cases}$

$$\int_{\Gamma} \mathbf{g} \mathbf{w}_i \, d\Gamma \approx \int_{\Gamma} \pi_h \mathbf{g} \mathbf{w}_i \, d\Gamma = \sum_{j=1}^{N_{\text{som}}} \pi_h \mathbf{g}(S_j) \int_{\partial\Omega} \mathbf{w}_j \mathbf{w}_i \, d\Gamma = (\mathbb{S} \mathbb{G})_i \quad \text{où } \mathbb{G}_i = \pi_h \mathbf{g}(S_i)$$

Calcul de l'unique solution  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N_{\text{som}}}$  de

$$\mathbb{A} \mathbf{U} = \mathbb{L}$$

# Programme de cet amphi...

- Conditions de type Fourier non homogènes
- Prise en compte des conditions de Dirichlet homogènes
- Formules de quadrature
- Autres exemples d'éléments finis ...

# Condition aux limites de Dirichlet homogène

Problématique

Trouver l'unique solution  $u$  dans  $H^1(\Omega)$  de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

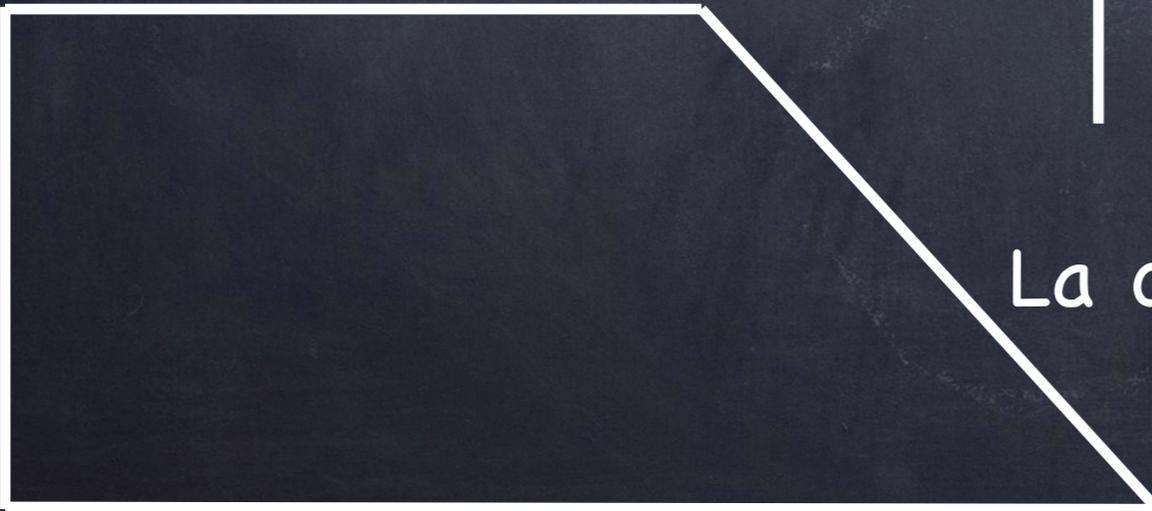
$\Leftrightarrow$

Trouver l'unique solution  $u$  dans  $H_0^1(\Omega)$  de

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \ell(v)$$

$$\text{où } \left| \begin{array}{l} a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega \\ \ell(v) = \int_{\Omega} f v \, d\Omega \end{array} \right.$$

$\Omega$



La condition aux limites est prise en compte  
dans la définition de l'espace :  
condition aux limites essentielle

# Condition aux limites de Dirichlet homogène

Problématique

Trouver l'unique solution  $u$  dans  $H_0^1(\Omega)$  de

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \ell(v)$$

$$\text{où } \left\{ \begin{array}{l} a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega \\ \ell(v) = \int_{\Omega} f v \, d\Omega \end{array} \right.$$

Question : peut on utiliser  $V_h^1$  pour écrire la formulation discrète ?

$$V_h^1 = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), \quad \forall I \in \{1, \dots, N_{\text{tri}}\}, v_h|_I \in \mathbb{P}_1\}$$

**NON** car  $V_h^1 \not\subset H_0^1(\Omega)$

Solution : choisir  $\tilde{V}_h^1 = V_h^1 \cap H_0^1(\Omega)$

# Condition aux limites de Dirichlet

homogène

Construction de l'espace  $\tilde{V}_h^1 = V_h^1 \cap H_0^1(\Omega)$

$$V_h^1 = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), \quad \forall l \in \{1, \dots, N_{\text{tri}}\}, v_h|_{\mathcal{T}_l} \in \mathbb{P}_1\}$$

Fonctions de forme de  $V_h^1$

•  $\forall i, j \in \{1, \dots, N_{\text{som}}\}, \quad w_j(S_i) = \delta_{ij}$

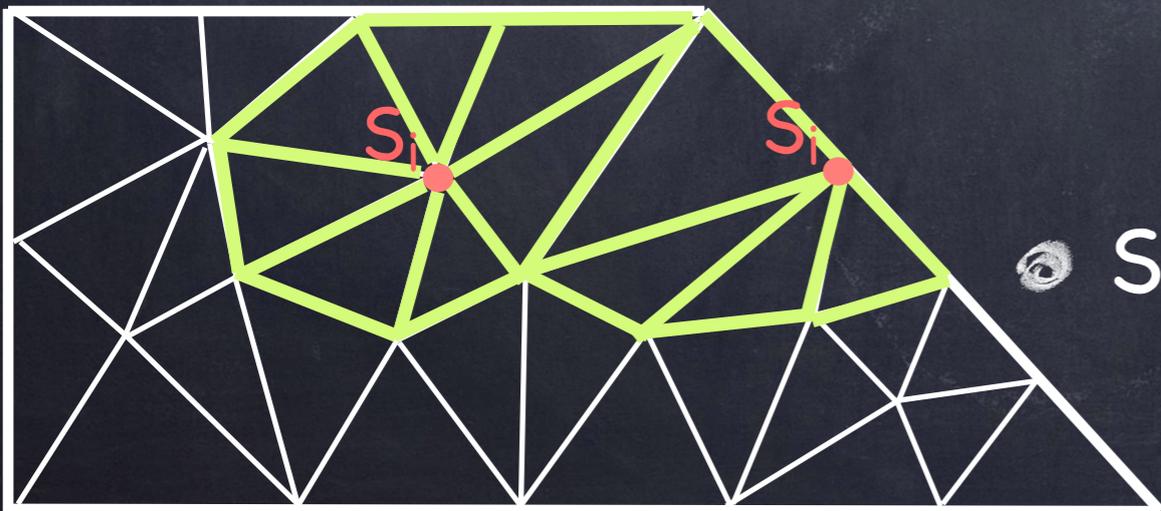
• Support  $w_i = \bigcup_{l, S_i \in \mathcal{T}_l} \mathcal{T}_l$

• Si le noeud  $S_i$  est un noeud intérieur

$$w_i \in \tilde{V}_h^1$$

• Si le noeud  $S_i$  est un noeud du bord

$$w_i \notin \tilde{V}_h^1$$



# Condition aux limites de Dirichlet

homogène

Construction de l'espace  $\tilde{V}_h^1 = V_h^1 \cap H_0^1(\Omega)$

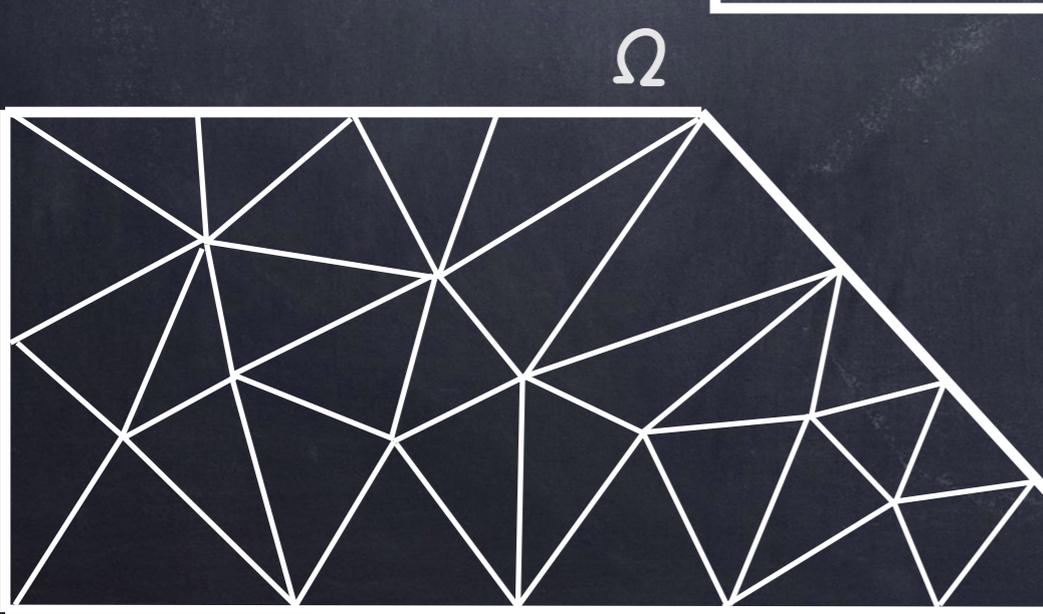
$$\tilde{V}_h^1 = \{v_h \in V_h^1, v_h(S_i) = 0, S_i \in \partial\Omega\}$$

$$= \{v_h \in V_h^1, v_h = \sum_{i, S_i \notin \partial\Omega} v_h(S_i) w_i\}$$

$$= \text{Vect}\{w_i, S_i \notin \partial\Omega\}$$

$$\dim \tilde{V}_h^1 = N^0$$

Comment reconnaître en pratique les noeuds intérieurs de ceux du bord?



Coorneu

Tableau de coordonnées des sommets

$S_1$	$x_1$	$y_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$S_i$	$x_i$	$y_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$S_{N_{\text{som}}}$	$x_{N_{\text{som}}}$	$y_{N_{\text{som}}}$

Refneu

Réf

1
$\vdots$
0
$\vdots$
0

# Condition aux limites de Dirichlet homogène

Application

Trouver l'unique solution  $u_h$  dans  $\tilde{V}_h^1 \subset H_0^1(\Omega)$  de

$$A^0 \mathbf{U} = \mathbb{L}^0 \quad (\mathcal{P}_h)$$

où  $A_{ij}^0 = a(w_j, w_i), S_i, S_j \notin \partial\Omega$  matrice  $N^0 \times N^0$

$$\mathbb{L}_i^0 = \ell(w_i) = \int_{\Omega} f w_i d\Omega$$

$$U_i = u_h(S_i) \quad \text{où on a décomposé } u_h = \sum_{i, S_i \notin \partial\Omega} u_h(S_i) w_i$$

$N^0$  inconnues

$$\dim \tilde{V}_h^1 = N^0$$

# Condition aux limites de Dirichlet homogène

Mise en oeuvre

Calcul des coefficients de la matrice  $A = K + M$  matrice  $N \times N$

Calcul des coefficients du second membre  $L$

Calcul de l'unique solution  $U \in \mathbb{R}^{N_{\text{som}}}$  de

$$AU = L \quad (\mathcal{P}_h)$$

où

$A_{ij} = a(w_j, w_i)$	( est inversible )
$L_i = l(w_i)$	
$U_i = u_h(s_i)$	

solution du problème  
de Neumann

Pseudo-élimination : modifier les termes de la matrice et  
du second membre pour se ramener au problème de  
Dirichlet

# Une illustration où les points du bord apparaissent en premier

Pour comprendre, on suppose que les sommets du bord sont numérotés en premier

$$\begin{pmatrix}
 \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \\
 \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \\
 \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \\
 \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \\
 \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$(a(w_j, w_i))_{s_i \in \partial\Omega, s_j \in \partial\Omega}$  points to  $A_{BB}$   
 $(a(w_j, w_i))_{s_i \notin \partial\Omega, s_j \in \partial\Omega}$  points to  $A_{IB}$   
 $(a(w_j, w_i))_{s_i \in \partial\Omega, s_j \notin \partial\Omega}$  points to  $A_{BI}$   
 $(a(w_j, w_i))_{s_i \notin \partial\Omega, s_j \notin \partial\Omega}$  points to  $A_{II}$   
 $\mathbf{0}_B$  is highlighted in red.

ce qu'il faut résoudre pour le problème de Dirichlet...

$$A_{II}U_I = L_I$$

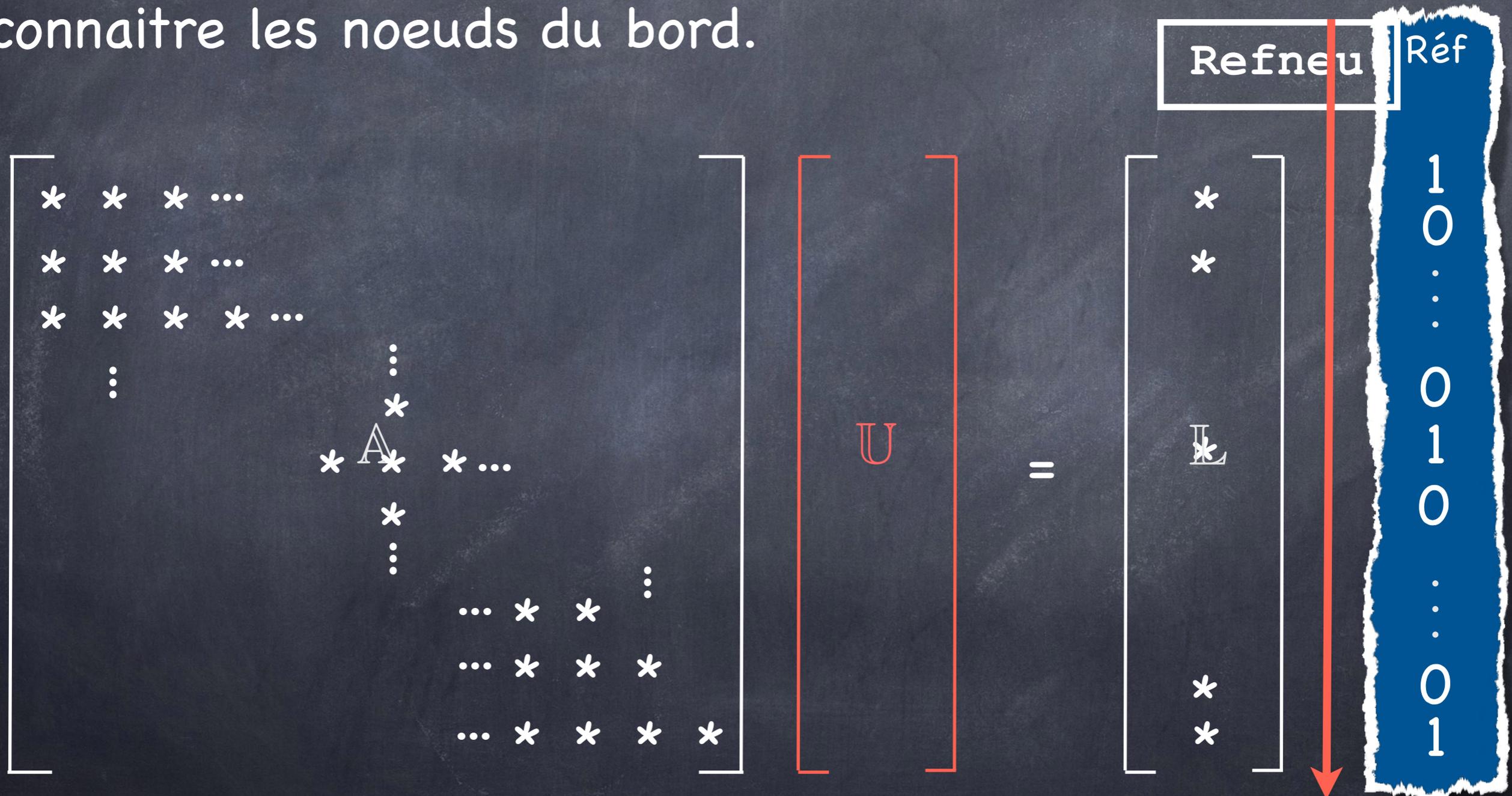
↓ comment changer le système?

$$\begin{pmatrix}
 \text{Id} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & A_{II}
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 U_B \\
 U_I
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 \mathbf{0} \\
 L_I
 \end{pmatrix}$$

# Condition aux limites de Dirichlet homogène

Mise en oeuvre

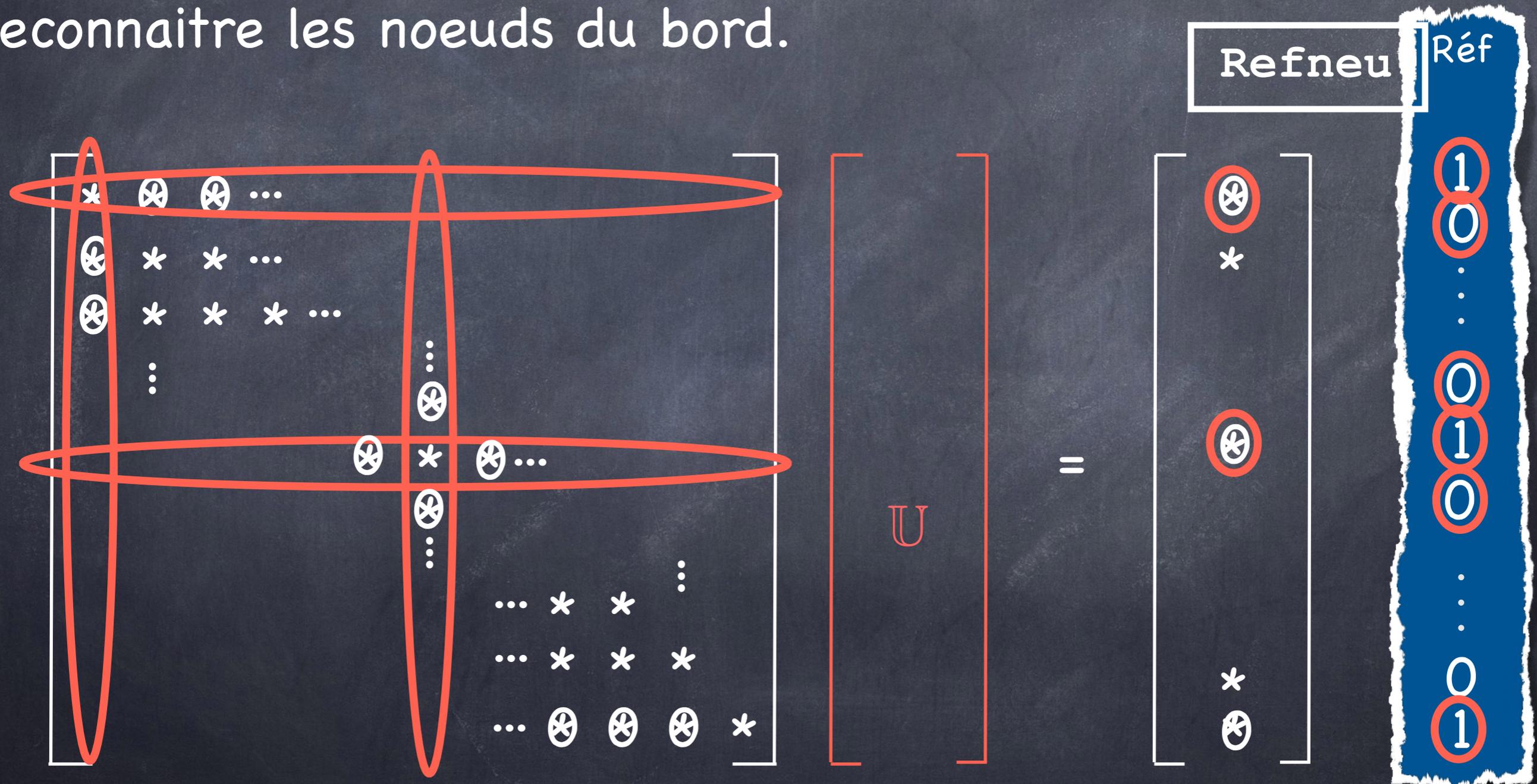
Dans le cas général on utilise le tableau Refneu pour reconnaître les noeuds du bord.



# Condition aux limites de Dirichlet homogène

Mise en oeuvre

Dans le cas général on utilise le tableau Refneu pour reconnaître les noeuds du bord.

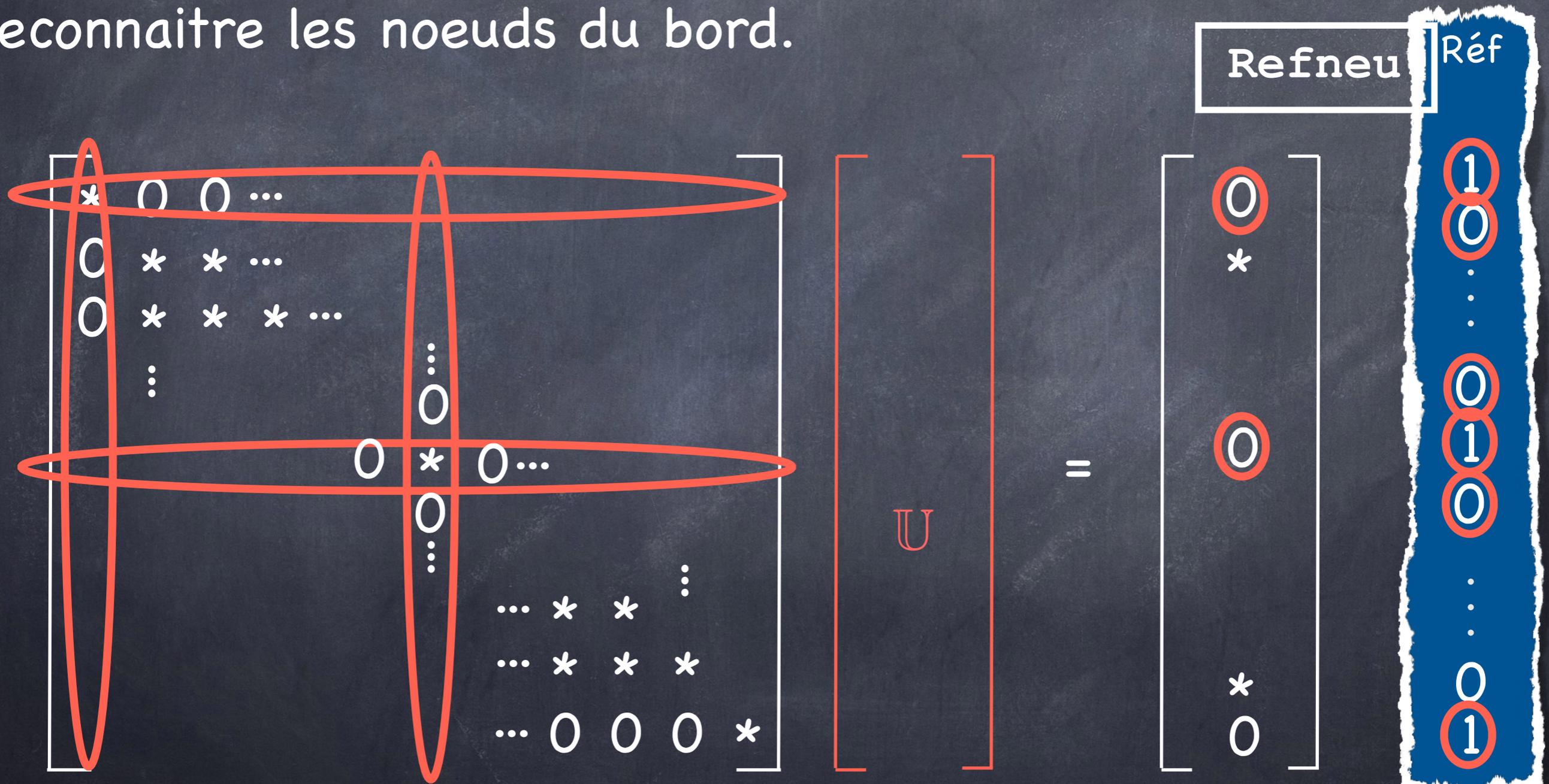


Méthode de pseudo-élimination

# Condition aux limites de Dirichlet homogène

Mise en oeuvre

Dans le cas général on utilise le tableau Refneu pour reconnaître les noeuds du bord.



Méthode de pseudo-élimination

# Condition aux limites de Dirichlet non homogène

Soient  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in C^0(\partial\Omega)$

Trouver  $u \in H^1(\Omega)$  telle que

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u + u = f \quad \text{dans } \Omega \\ u = g \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Trouver  $u \in H^1(\Omega)$  telle que  $u = g$  sur  $\partial\Omega$  et

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

## Formulation discrète

Trouver  $u_h \in V_h^1$  telle que  $u_h = \pi_h g$  sur  $\partial\Omega$  et

$$\forall v_h \in \tilde{V}_h^1 \quad \int_{\Omega} \vec{\nabla} u_h \cdot \vec{\nabla} v_h \, d\Omega + \int_{\Omega} u_h v_h \, d\Omega = \int_{\Omega} f v_h \, d\Omega$$

$$\text{avec } \pi_h g = \sum_{i, S_i \in \partial\Omega} g(S_i) w_i$$

En passant par un relèvement, on pourrait revenir au cas précédent mais on peut aussi écrire...

# Condition aux limites de Dirichlet non homogène

Systeme matriciel

Trouver  $u_h = \sum_i u_h(S_i) w_i$  telle que  $u_h(S_i) = g(S_i)$ ,  $S_i \in \partial\Omega$  et

$$\tilde{A}^0 U = L^0$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}_{ij}^0 = a(w_j, w_i), \quad S_j \in \Omega, S_i \notin \partial\Omega \quad \text{matrice } N^0 \times N \\ L_i^0 = \ell(w_i) = \int_{\Omega} f w_i d\Omega, S_i \notin \partial\Omega \\ U_i = u_h(S_i) \quad N^0 \text{ inconnues} \end{array} \right.$$

# Condition aux limites de Dirichlet non homogène

Mise en oeuvre

Calcul des coefficients de la matrice  $A = K + M$  matrice  $N \times N$

Calcul des coefficients du second membre  $L$

Pour comprendre, on suppose que les sommets du bords sont numérotés en premier

$$\begin{pmatrix} A_{BB} & A_{BI} \\ A_{IB} & A_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_B \\ U_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_B \\ L_I \end{pmatrix}$$

ce qu'il faut résoudre pour le problème de Dirichlet non homogène...

$$A_{IB}U_B + A_{II}U_I = L_I \quad \text{et} \quad U_B = G_B$$

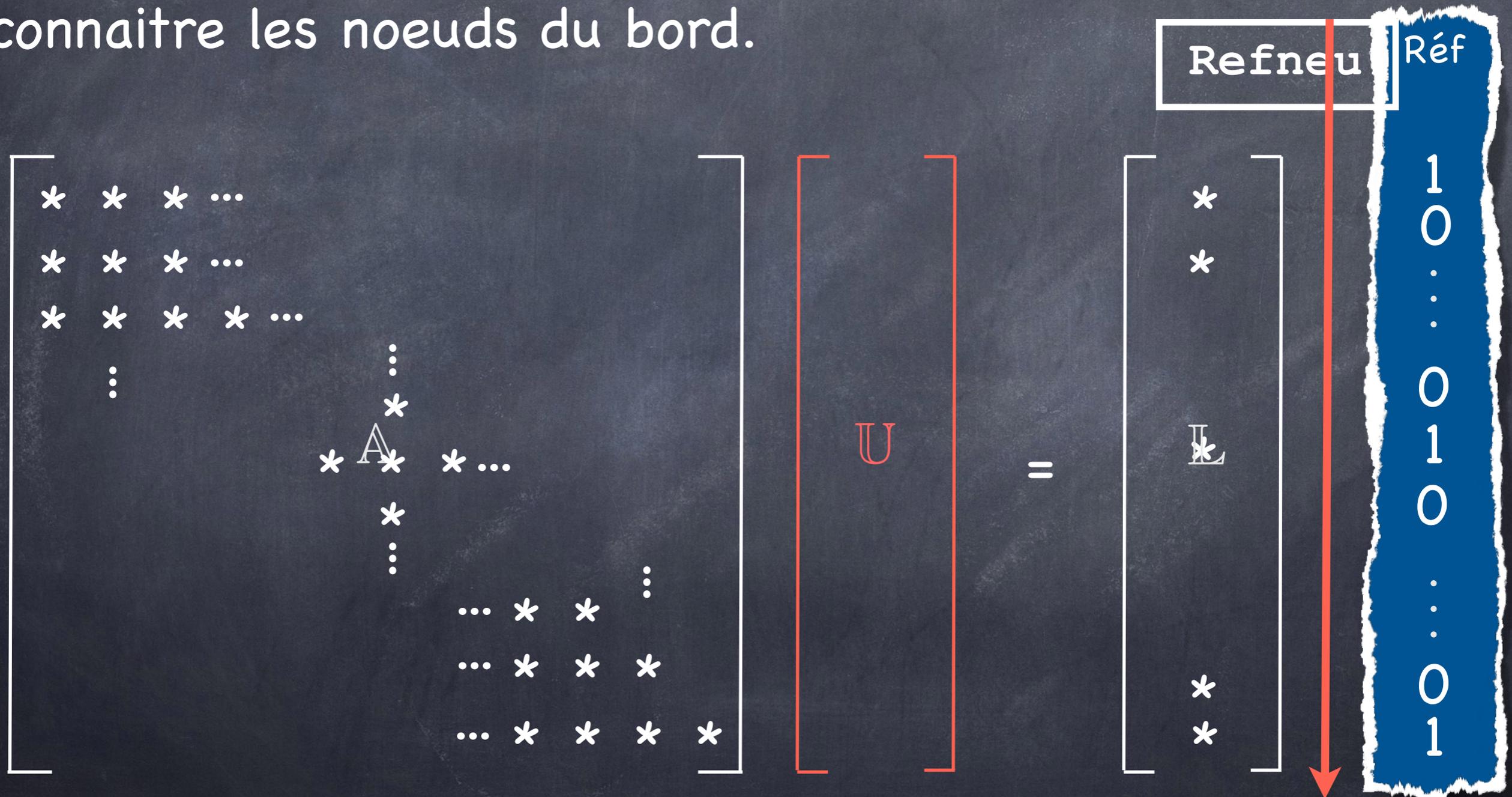
↓ comment changer le système?

$$\begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ A_{IB} & A_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_B \\ U_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_B \\ L_I \end{pmatrix}$$

# Condition aux limites de Dirichlet non homogène

Mise en oeuvre

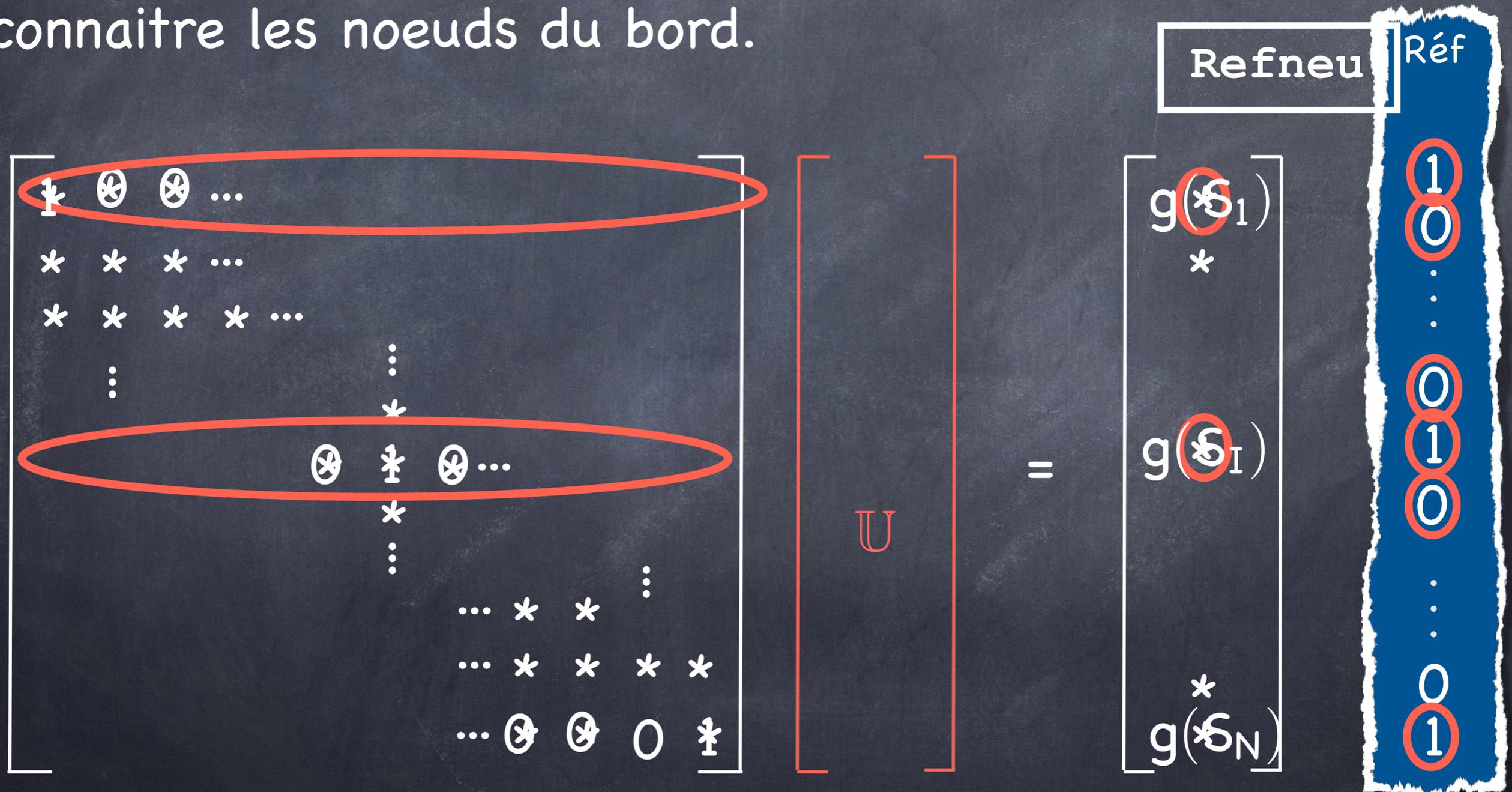
Dans le cas général on utilise le tableau Refneu pour reconnaître les noeuds du bord.



# Condition aux limites de Dirichlet non homogène

Mise en oeuvre

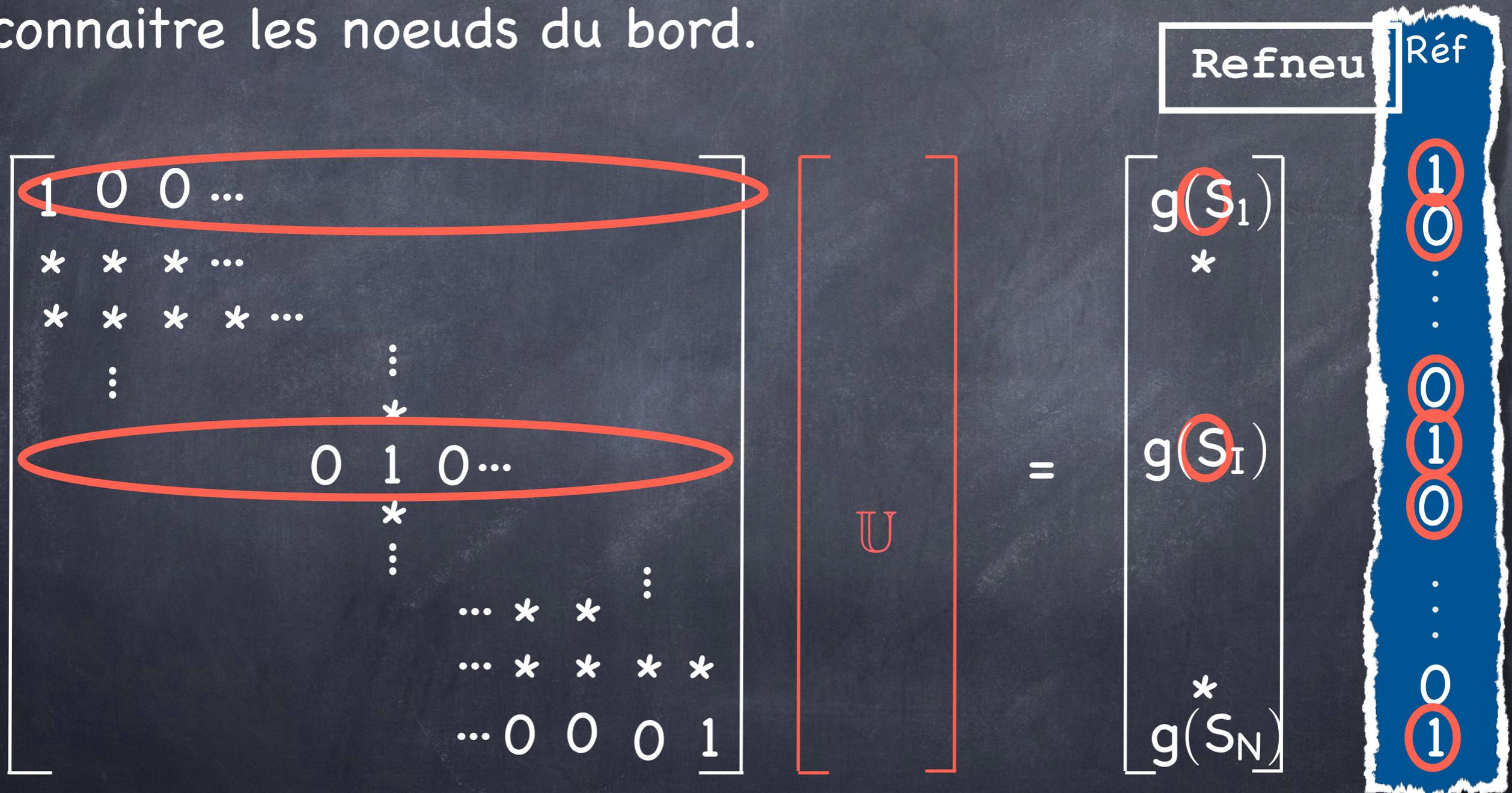
Dans le cas général on utilise le tableau Refneu pour reconnaître les noeuds du bord.



# Condition aux limites de Dirichlet non homogène

Mise en oeuvre

Dans le cas général on utilise le tableau Refneu pour reconnaître les noeuds du bord.



# Programme de cet amphi...

- Conditions de type Fourier non homogènes
- Prise en compte des conditions de Dirichlet homogènes
- Formules de quadrature
- Autres exemples d'éléments finis ...

# Formules de quadrature

Dans la méthode des EF, on doit souvent calculer des intégrales sur des éléments du maillage

$$\int_{\mathcal{T}_1} \varphi \, d\Omega$$

On utilise souvent des formules de calcul de telles intégrales, qui sont exactes pour des polynômes d'un certain degré et approchées en général.

En 1D: ce sont les formule des trapèzes, de Simpson, de Newton Cotes,...

$$\int_{\mathcal{T}_\ell} \varphi \, d\Omega \approx \sum_{k=1}^q \omega_k^\ell \varphi(\mathbf{S}_k^\ell) \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} \mathbf{S}_k^\ell \text{ sont les points de quadrature} \\ \omega_k^\ell \text{ sont les poids de quadrature} \end{array}$$

On dit qu'une formule de quadrature est d'ordre  $K$  quand elle intègre exactement les polynômes de degré  $K$ .

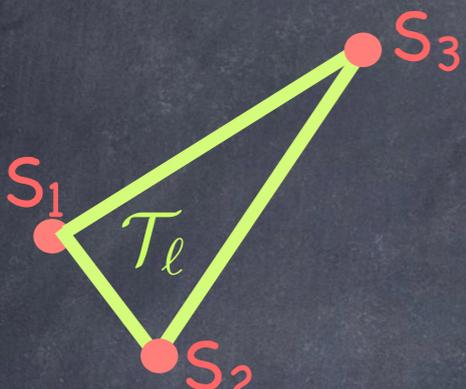
Si la formule de quadrature est d'ordre  $K$  alors il existe  $C > 0$  telle que

$$\forall \varphi \in C^{K+1}(\mathcal{T}_\ell), \quad \left| \int_{\mathcal{T}_\ell} \varphi \, d\Omega - \sum_{k=1}^q \omega_k^\ell \varphi(\mathbf{S}_k^\ell) \right| \leq C |\mathcal{T}_\ell| h_\ell^{K+1}$$

où  $|\mathcal{T}_\ell|$  est l'aire de  $\mathcal{T}_\ell$  et  $h_\ell$  son diamètre.

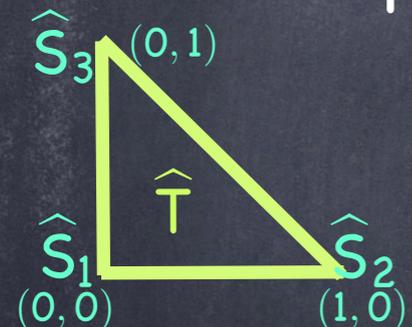
# Formules de quadrature

Quelques exemples pour  $\int_{\mathcal{T}_\ell} \varphi \, d\Omega$



$|\mathcal{T}_\ell| \varphi\left(\frac{S_1 + S_2 + S_3}{3}\right)$  d'ordre 0  
 $\frac{|\mathcal{T}_\ell|}{3} (\varphi(S_1) + \varphi(S_2) + \varphi(S_3))$  d'ordre 1  
 $\frac{|\mathcal{T}_\ell|}{3} \left( \varphi\left(\frac{S_1 + S_2}{2}\right) + \varphi\left(\frac{S_1 + S_3}{2}\right) + \varphi\left(\frac{S_2 + S_3}{2}\right) \right)$  d'ordre 2

D'autres exemples pour  $\int_{\hat{\mathcal{T}}} \varphi \, d\Omega \approx \sum_q \hat{\omega}_q \varphi(\hat{S}_q)$



$\hat{S}_q$	$(1/3, 1/3)$	$(1/5, 1/5)$	$(1/5, 3/5)$	$(3/5, 1/5)$	d'ordre 3
$\hat{\omega}_q$	$-9/32$	$25/96$	$25/96$	$25/96$	

voir le poly pour une formule d'ordre 5.

**Remarques :**

- les formules de quadrature d'ordre élevé sont souvent calculées pour le triangle de référence. Il faut donc passer du triangle courant au triangle de référence.

- ces formules sont indispensables quand on s'intéresse à des problèmes avec coef. variables ou quand on utilise des EF d'ordre élevé...

# Programme de cet amphi...

- Conditions de type Fourier non homogènes
- Prise en compte des conditions de Dirichlet homogènes
- Formules de quadrature
- Autres exemples d'éléments finis ...

# Élément fini de Lagrange $\mathbb{P}_k$ en 2D

$$V_h^k = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), \quad \forall l \in \{1, \dots, N_{\text{tri}}\}, v_h|_{\tau_l} \in \mathbb{P}_k\}$$

où  $\mathbb{P}_k$  espace vectoriel des polynômes de degré  $\leq k$

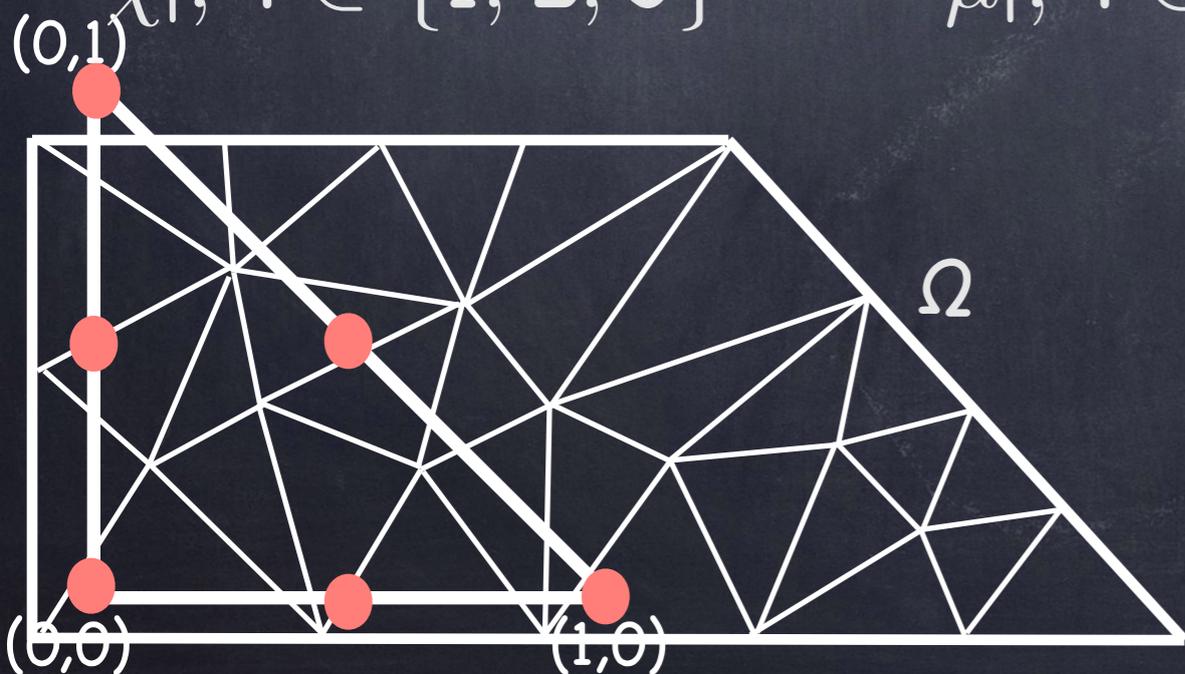
Sur un triangle de référence,

$$\mathbb{P}_2 = \{ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f\}$$

$$S_i, i \in \{1, 2, 3\} \quad M_i, i \in \{1, 2, 3\}$$

Fonctions de base locale associées

$$\chi_i, i \in \{1, 2, 3\} \quad \mu_i, i \in \{1, 2, 3\}$$



# Élément fini de Lagrange $\mathbb{P}_k$ en 2D

$$V_h^k = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), \quad \forall I \in \{1, \dots, N_{\text{tri}}\}, v_h|_{\mathcal{T}_I} \in \mathbb{P}_k\}$$

où  $\mathbb{P}_k$  espace vectoriel des polynômes de degré  $\leq k$

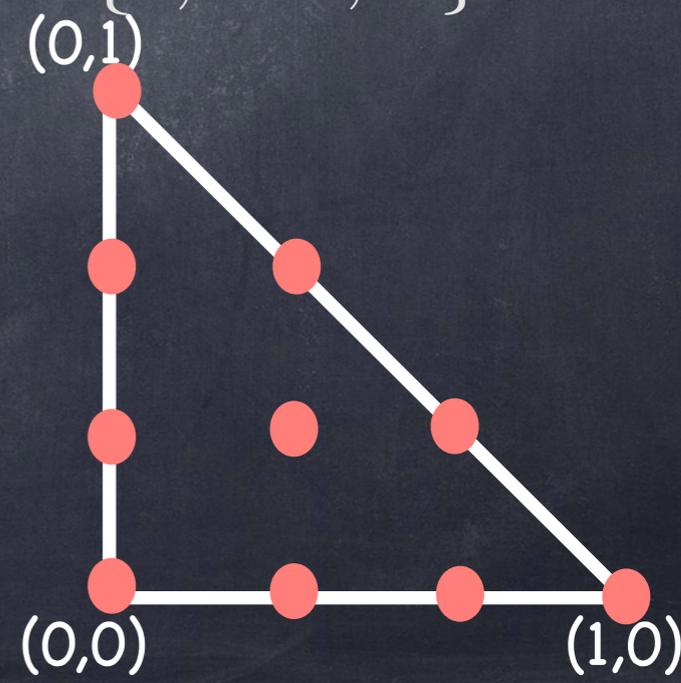
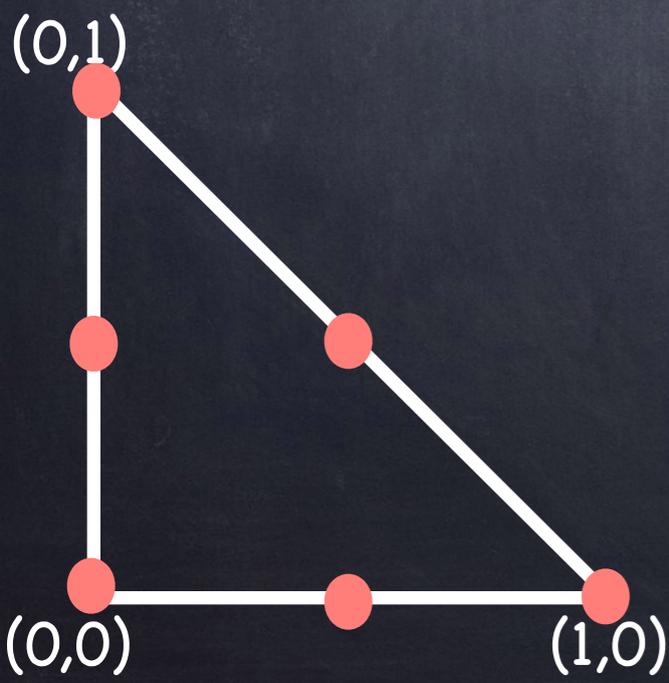
Sur un triangle de référence,

$$\mathbb{P}_3 = \{ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2 + p(x, y), p(x, y) \in \mathbb{P}_2\}$$

$$S_i, i \in \{1, 2, 3\} \quad T_i, i \in \{1, \dots, 6\} \quad M$$

Fonctions de base locale associées

$$\eta_i, i \in \{1, 2, 3\} \quad \gamma_i, i \in \{1, \dots, 6\} \quad \nu$$



# Élément fini de Lagrange $\mathbb{P}_k$ en 2D

$$V_h^k = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), \quad \forall I \in \{1, \dots, N_{\text{tri}}\}, v_h|_{\mathcal{T}_I} \in \mathbb{P}_k\}$$

où  $\mathbb{P}_k$  espace vectoriel des polynômes de degré  $\leq k$

Pour définir une base de  $V_h^k$

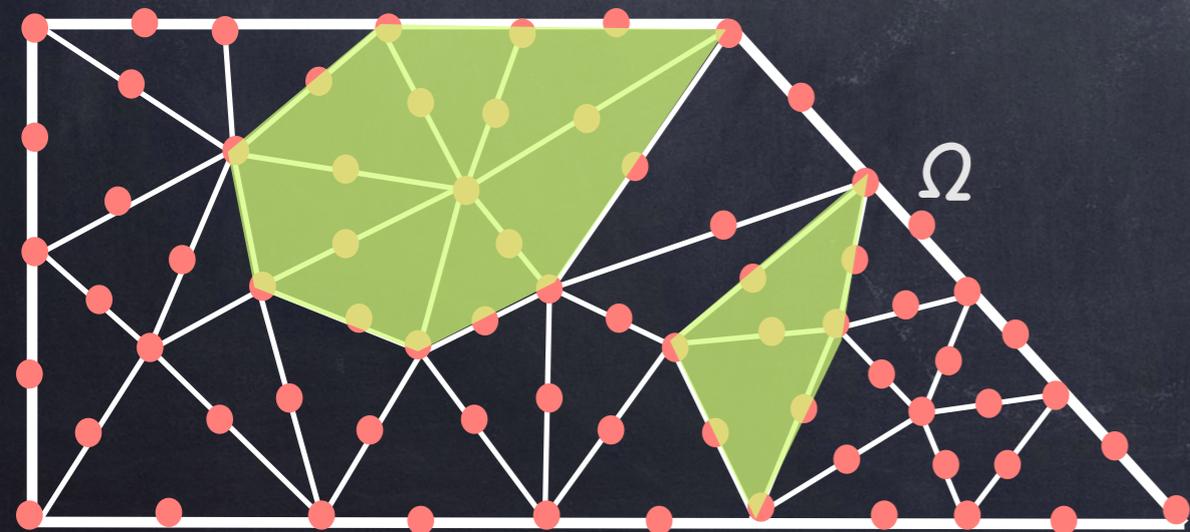
$V_h^2$

Fonctions de base globales

$$w_i(S_j) = \delta_{ij}$$

2 types

$$\dim V_h^2 = N_{\text{som}} + N_{\text{ar}}$$



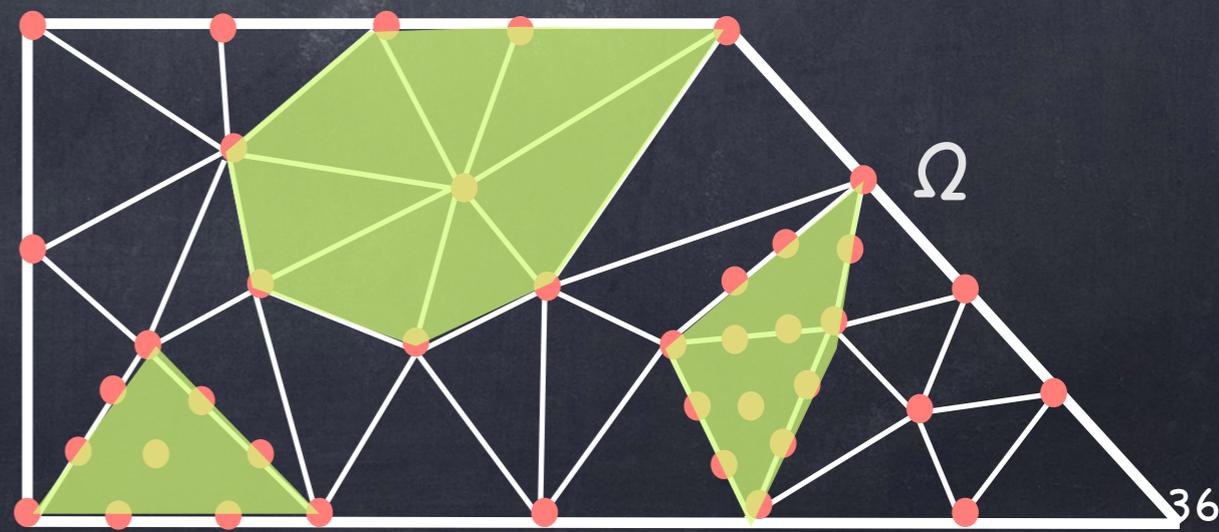
$V_h^3$

Fonctions de base globales

$$w_i(S_j) = \delta_{ij}$$

3 types

$$\dim V_h^3 = N_{\text{som}} + 2N_{\text{ar}} + N_{\text{tri}}$$



# Élément fini de Lagrange $\mathbb{P}_k$ en 2D

$$V_h^k = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), \quad \forall I \in \{1, \dots, N_{\text{tri}}\}, v_h|_{\mathcal{T}_I} \in \mathbb{P}_k\}$$

où  $\mathbb{P}_k$  espace vectoriel des polynômes de degré  $\leq k$

## Application et mise en oeuvre

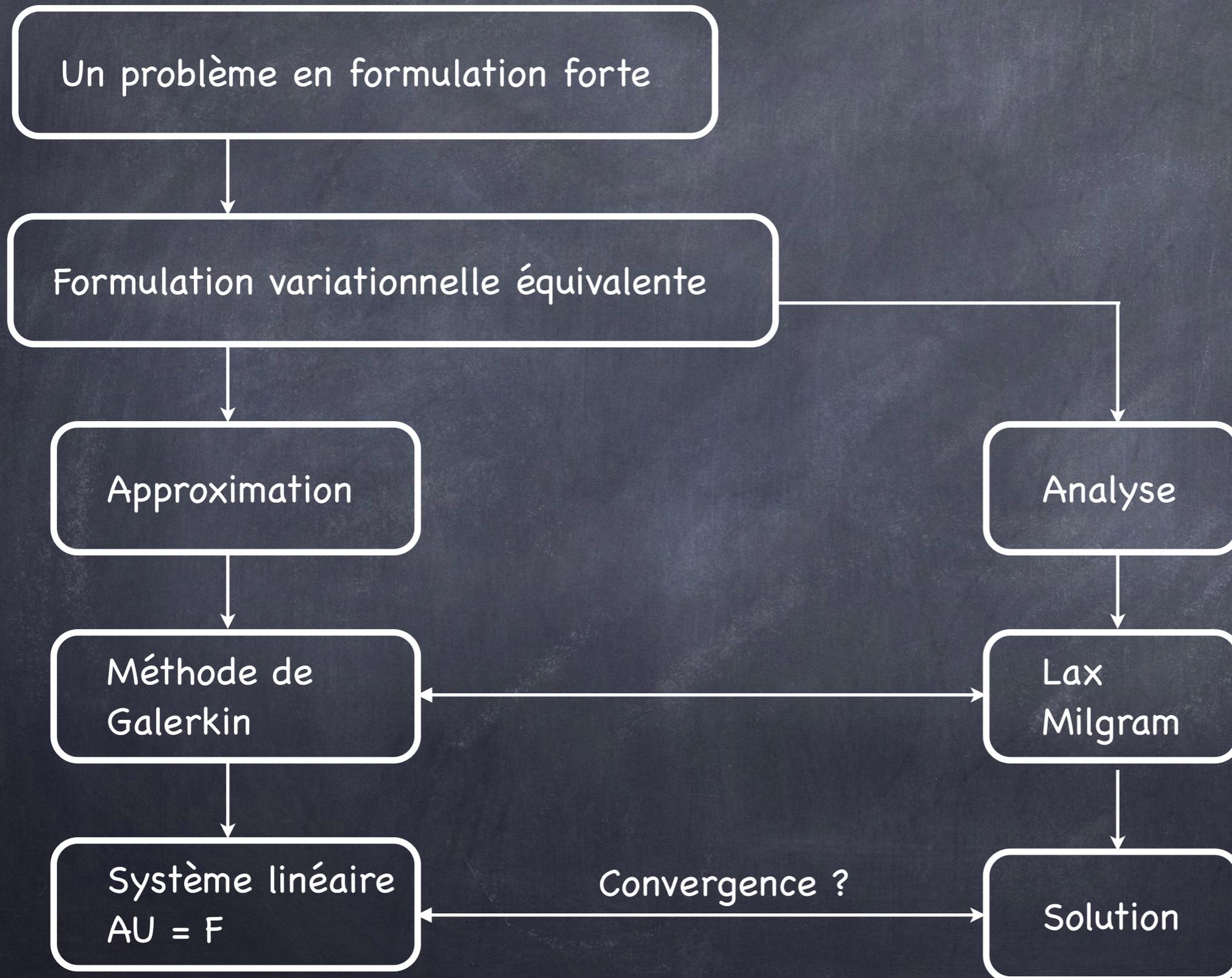
- Algorithme similaire pour l'assemblage des matrices  
les matrices élémentaires sont de plus grande taille
- Les matrices sont creuses  
plus de termes non nuls par ligne
- les calculs sont plus lourds mais l'approximation est a priori meilleure quand  $k$  augmente  
à condition que la solution soit assez régulière

# Programme de la partie 2 de l'amphi

## Convergence de la méthode des EF

- Problème modèle
- Lemme de Céa
- Convergence de l'approximation interne
- On verra la prochaine fois : vitesse de convergence, estimation d'erreur  $H^1$  et  $L^2, \dots$

# Quelques rappels...

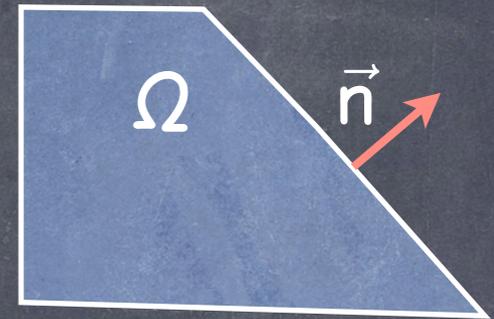


# Problème modèle

Trouver  $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$  telle que (avec  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert polygonal)

$$-\operatorname{div}(\sigma \vec{\nabla} \mathbf{u}) + \mathbf{u} = f \quad \text{dans } \Omega$$

$$\sigma \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$



avec  $f \in L^2(\Omega)$  et  $\sigma \in L^\infty(\Omega)$ , avec  $\sigma(x) \geq \sigma_0 > 0$  p.p. tout  $x \in \Omega$ .

Ce problème est **équivalent** à la formulation variationnelle (voir amphi 2)

Trouver  $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$  telle que

$$\int_{\Omega} \left( \sigma \vec{\nabla} \mathbf{u} \vec{\nabla} \mathbf{v} + \mathbf{u} \mathbf{v} \right) d\Omega = \int_{\Omega} f \mathbf{v} d\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)$$

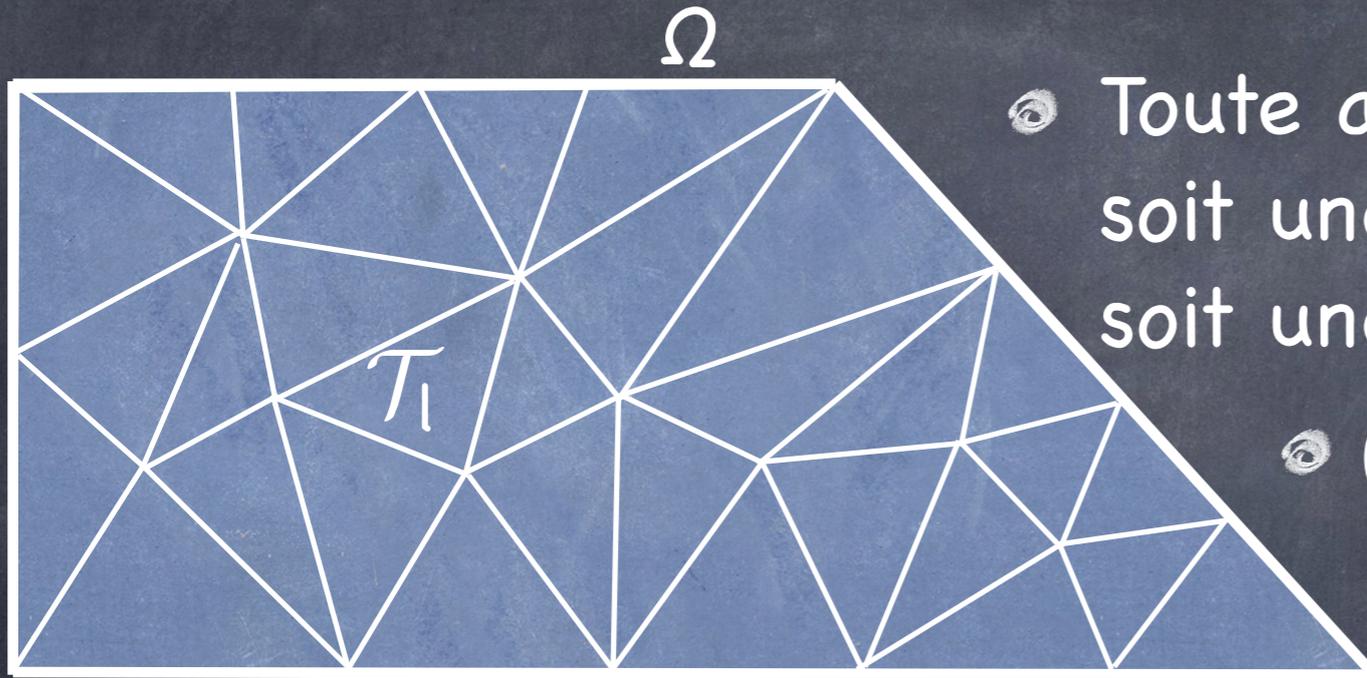
On vérifie que le théorème de Lax-Milgram s'applique (voir amphi 3).

Dans la suite, on note la forme bilinéaire

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \left( \sigma \vec{\nabla} \mathbf{v} \vec{\nabla} \mathbf{w} + \mathbf{v} \mathbf{w} \right) d\Omega$$

# Discrétisation

## Maillage

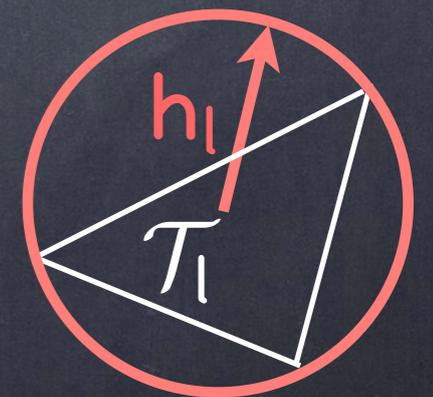


- Toute arête d'un triangle est soit une arête d'un autre triangle, soit une arête portée par la frontière
- $(\overset{\circ}{\mathcal{T}}_l \neq \emptyset)$
- $\overset{\circ}{\mathcal{T}}_l \cap \overset{\circ}{\mathcal{T}}_{l'} = \emptyset$  si  $l \neq l'$
- $\bigcup_l \mathcal{T}_l = \bar{\Omega}$

On notera le pavage de  $\bar{\Omega}$  composé de triangles :  $\mathfrak{T}_h = (\mathcal{T}_l)_{l \in \llbracket 1, N_{\text{tri}} \rrbracket}$

**Pas du maillage  $h$**  (qui sera amené à tendre vers 0)

$h = \max_{1 \leq l \leq N_{\text{tri}}} h_l$  où  $h_l$  est le rayon du plus petit cercle contenant  $\mathcal{T}_l$



On introduit également pour chaque triangle  $\mathcal{T}_l$

$\rho_l$  est le rayon du plus grand cercle inclus dans  $\mathcal{T}_l$



# Discrétisation

## Maillage

### Hypothèse sur les maillages

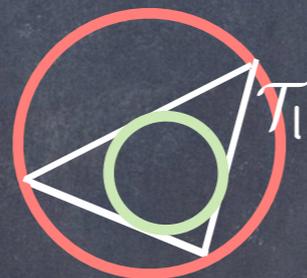
On suppose que la famille de maillage  $(\mathcal{T}_h)_h$  est régulière

$$\exists \delta, \quad \forall \mathcal{T}_h, \quad \forall l, \quad \frac{h_l}{\rho_l} \leq \delta$$

Remarque: en 2D, cette hypothèse est équivalente à la condition angulaire

$$\exists \theta_0 > 0, \quad \forall h > 0, \quad \forall T_\ell \in \mathcal{T}_h, \quad \theta_{T_\ell} \geq \theta_0 \quad (\theta_{T_\ell} \text{ plus petit angle de } T_\ell)$$

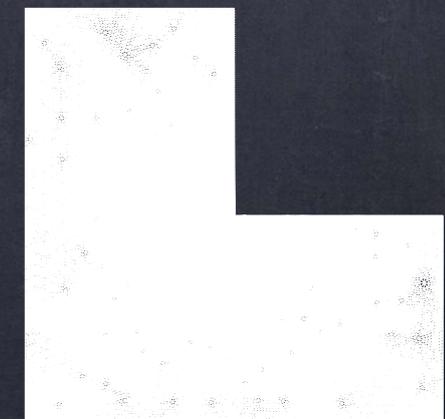
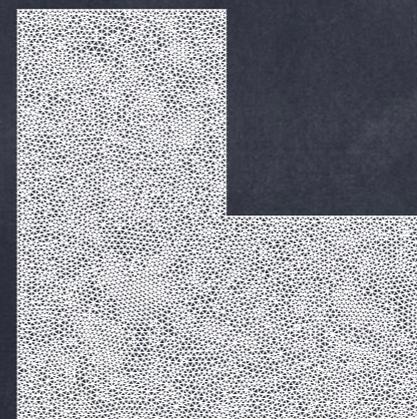
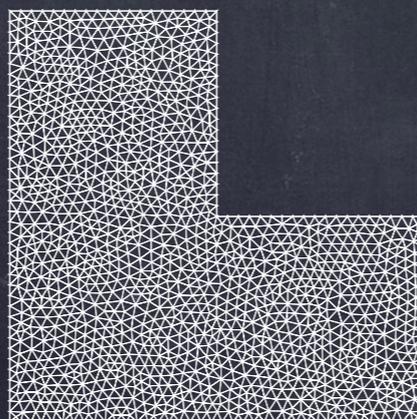
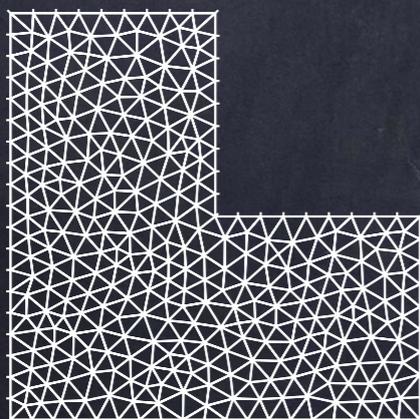
Triangle non aplati



Triangle aplati  $\rightarrow$  dégénéré

• Cette hypothèse est tout aussi importante en pratique que pour l'analyse de convergence.

Exemple:



# Discrétisation

## F.V. discrète et lemme de Céa

Soit  $u \in H^1(\Omega)$  solution de

Trouver  $u \in H^1(\Omega)$  telle que  $a(u, v) = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (\text{F.V.})$

Soit  $u_h \in V_h^k$  solution de

Trouver  $u_h \in V_h^k$  telle que  $a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h \, d\Omega, \quad \forall v_h \in V_h^k \quad (\text{F.V.}_h^k)$

### Lemme de Céa

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M_a}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h^k} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}$$

où  $M_a$  est la constante de continuité et  $\alpha$  celle de coercivité de  $a$ .

Preuve : 1.  $a$  est coercive et  $u - u_h \in H^1(\Omega) \Rightarrow a(u - u_h, u - u_h) \geq \alpha \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2$

2.  $\forall v_h \in V_h^k \subset H^1(\Omega), u_h - v_h \in H^1(\Omega) \Rightarrow a(u, u_h - v_h) = \ell(u_h - v_h)$   
 $u_h - v_h \in V_h^k \Rightarrow a(u_h, u_h - v_h) = \ell(u_h - v_h) \quad \Bigg| \Rightarrow a(u - u_h, u_h - v_h) = 0$

Conclusion:  $\alpha \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) + a(u - u_h, u_h - v_h) = a(u - u_h, u - v_h)$   
 $\leq M_a \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}$

$$\Rightarrow \boxed{\forall v_h \in V_h^k, \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq M_a/\alpha \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}}$$

Rappel  $\exists M_a > 0, \forall v, w \in V, |a(v, w)| \leq M_a \|v\|_V \|w\|_V$  et  $\exists \alpha > 0, \forall v \in V, a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$  43

# Discrétisation

## F.V. discrète et lemme de Céa

### Lemme de Céa

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M_a}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h^k} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}$$

où  $M_a$  est la constante de continuité et  $\alpha$  celle de coercivité de  $a$ .

### Proposition

On suppose qu'il existe un sous espace  $W \subset H^1(\Omega)$  dense dans  $H^1(\Omega)$  et une application  $r_h : W \rightarrow V_h^k$  telle que

$$\forall w \in W, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|w - r_h(w)\|_{H^1(\Omega)} = 0,$$

alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = 0$$

**Preuve** : on va montrer que  $\forall v \in V, \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V = 0$ , puis il suffit d'utiliser le lemme de Céa.

Soient  $v \in V$  et  $\varepsilon > 0$ , comme  $W$  est dense dans  $V$ , on sait que  $\exists w \in W, \|v - w\|_V \leq \varepsilon/2$

Pour ce  $w$ , on sait que  $\lim_{h \rightarrow 0} \|w - r_h(w)\|_V = 0$ , i.e.  $\exists h_0 > 0, \forall h \in ]0, h_0[, \|w - r_h(w)\|_V \leq \varepsilon/2$

Ceci implique que  $\forall h \in ]0, h_0[, \|v - r_h(w)\|_V \leq \|v - w\|_V + \|w - r_h(w)\|_V \leq \varepsilon$

Comme  $r_h(w) \in V_h$ , on a  $\forall h \in ]0, h_0[, \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V \leq \varepsilon, \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V = 0$ ,

# Discrétisation

## Vitesse de convergence

Pour notre problème il suffit de choisir  $W = C^1(\bar{\Omega})$  et d'utiliser ce que nous allons faire la prochaine fois pour la convergence dans  $W$  (avec  $r_h = \Pi_h^k$ ).

Ce résultat est vrai pour toute solution  $u \in H^1(\Omega)$  !

Pouvons nous être plus précis sur cette convergence ?

D'après le lemme de Céa

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M_a}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h^k} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}$$

En étudiant comment se comporte  $\inf_{v_h \in V_h^k} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}$  vis à vis de  $h$  et  $k$  on va déterminer la vitesse de convergence de la méthode!

**Definition : Vitesse de convergence**

On dit que l'approximation converge à l'ordre  $\beta$  ( $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > 0$ ) ssi

$$\exists C > 0, \quad \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^\beta$$

Ce résultat va dépendre de la régularité de  $u$ !

# Séance de tutorat

Prochain cours : le 4 novembre à 8h30. TP2 à 10h  
le lundi 4 novembre de 16h à 18h  
le vendredi 8 novembre après midi

Sonia Fliss  
(bureau 2230)