

# La méthode des éléments finis

Approximation et discrétisation

Sonia Fliss

# Théorème de Lax Milgram

Soit  $u \in V$  solution de

$$\text{Trouver } \underline{u} \in V \text{ telle que } a(u, v) = \ell(v), \quad \underline{\forall v \in V} \quad (\text{F.V.})$$

On suppose dans la suite du cours que

- $(V, \|\cdot\|_V)$  est un **espace de Hilbert**
- $a$  est une forme **bilinéaire** sur  $V \times V$  qui est
  - **continue**  $\exists M_a > 0, \forall v, w \in V, |a(v, w)| \leq M_a \|v\|_V \|w\|_V$
  - **coercive**  $\exists \alpha > 0, \forall v \in V, a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$
- $\ell$  est une forme **linéaire** sur  $V$  **continue**  
 $\exists M_\ell > 0, \forall v \in V, |\ell(v)| \leq M_\ell \|v\|_V$

Il existe **alors** une unique solution  $u$  dans  $V$  de (F.V.), de plus cette solution  $u$  dépend continument des données  $\|u\|_V \leq M_\ell / \alpha$

# Introduction

Soit  $u \in V$  solution de

$$\text{Trouver } u \in V \text{ telle que } a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in V \quad (\text{F.V.})$$

## Remarque :

- $V$  étant un espace de dimension infinie, il est difficile de résoudre (F.V.) directement.

## Idées pour la résolution:

1. On "remplace"  $V$  par un espace de dimension finie  $V_h$ , avec  $h > 0$  (qui va varier et tendre vers 0).
2. On montre que (F.V) posé sur  $V_h$  se ramène à la simple résolution d'un système linéaire. On appelle  $u_h \in V_h$  la solution.
3. On choisit  $V_h$  pour que  $\lim_{h \rightarrow 0} \dim V_h = +\infty$  et on espère que

$$u_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} u$$

voir Amphi 6

On supposera dans ce cours que  $V_h \subset V$

(approximation variationnelle interne ou Méthode de Galerkin)

# Méthode de Galerkin

Soit  $u \in V$  solution de

$$\text{Trouver } u \in V \text{ telle que } a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in V \quad (\text{F.V.})$$

1. On "remplace"  $V$  par un espace de dimension finie  $V_h \subset V$

Soit  $u_h \in V_h$  solution de

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que } a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (\text{F.V.}_h)$$

•  $(V_h, \|\cdot\|_V)$  est un **espace de Hilbert** (en tant que sous-espace fermé de  $V$ )

•  $a$  est une forme **bilinéaire** sur  $V_h \times V_h$  qui est

• **continue**  $\forall v_h, w_h \in V_h, \quad |a(v_h, w_h)| \leq M_a \|v_h\|_V \|w_h\|_V$

• **coercive**  $\forall v_h \in V_h, \quad a(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|_V^2$

•  $\ell$  est une forme **linéaire** sur  $V_h$  **continue**  $\forall v_h \in V_h, \quad |\ell(v_h)| \leq M_\ell \|v_h\|_V$

Remarque : aucune des constantes ne dépend de  $h$  (car  $V_h \subset V$ ).

Il existe **alors** une unique solution  $u_h \in V_h$  de (F.V.<sub>h</sub>), qui dépend continument des données  $\|u_h\|_V \leq M_\ell / \alpha$

# Méthode de Galerkin

Soit  $u_h \in V_h$  solution de

Trouver  $u_h \in V_h$  telle que  $a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (\text{F.V.}_h)$

2. Le problème (F.V.<sub>h</sub>) se ramène à la simple résolution d'un **ystème linéaire**.

Soit  $(w_1, \dots, w_{n_h})$  une base de  $V_h$  ( $\dim V_h = n_h$ )

## Lemme

$u_h \in V_h$  solution de (F.V.<sub>h</sub>)  $\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n_h \rrbracket, \quad a(u_h, w_i) = \ell(w_i)$

Preuve  $\Rightarrow a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$  pour tout  $v_h$  dans  $V_h$  donc en particulier pour  $v_h = w_i$

$\Leftarrow$  Comme  $a$  et  $\ell$  sont linéaires, si  $\forall i \in \llbracket 1, n_h \rrbracket, \quad a(u_h, w_i) = \ell(w_i)$   
pour tout  $v_h \in V_h, v_h = \sum_{1 \leq i \leq n_h} v_i w_i \Rightarrow a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$

# Méthode de Galerkin

Soit  $u_h \in V_h$  solution de

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que } a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (\text{F.V.}_h)$$

2. Le problème (F.V.<sub>h</sub>) se ramène à la simple résolution d'un **ystème linéaire**.

Soit  $(w_1, \dots, w_{n_h})$  une base de  $V_h$  ( $\dim V_h = n_h$ )

## Lemme

$$u_h \in V_h \text{ solution de (F.V.}_h) \iff \forall i \in [1, n_h], \quad a(u_h, w_i) = \ell(w_i)$$

En décomposant  $u_h$  dans cette base  $u_h = \sum_{1 \leq j \leq n_h} u_j w_j$

$$u_h \in V_h \text{ solution de (F.V.}_h) \iff \forall i \in [1, n_h], \quad \sum_{1 \leq j \leq n_h} u_j a(w_j, w_i) = \ell(w_i)$$

ce qui s'écrit sous la forme d'un système linéaire

## Proposition

$$(\text{F.V.}_h) \iff \text{Trouver } U \in \mathbb{R}^{n_h} \text{ telle que } AU = L \quad (\text{F.V.}_h)$$

$$\text{où } \forall i, j \in [1, n_h], \quad A_{ij} = a(w_j, w_i), \quad U_i = u_i \text{ et } L_i = \ell(w_i)$$

# Méthode de Galerkin

Soit  $u_h \in V_h$  solution de

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que } a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (\text{F.V.}_h)$$

2. Le problème (F.V.<sub>h</sub>) se ramène à la simple résolution d'un **ystème linéaire**.

Soit  $(w_1, \dots, w_{n_h})$  une base de  $V_h$  ( $\dim V_h = n_h$ )

## Proposition

$$(\text{F.V.}_h) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Trouver } U \in \mathbb{R}^{n_h} \text{ telle que } AU = L \quad (\text{F.V.}_h)$$

$$\text{où } \forall i, j \in [1, n_h], \quad A_{ij} = a(w_j, w_i), \quad U_i = u_i \text{ et } L_i = \ell(w_i)$$

## Proposition

La matrice  $A$  est définie positive et donc inversible.

Preuve : c'est la coercivité de la forme bilinéaire  $a$  qui entraîne le caractère défini positif

$$\text{de la matrice } A : \forall V \in \mathbb{R}^{n_h}, \quad {}^t V A V = a(v_h, v_h) \quad \text{où } v_h = \sum_{1 \leq i \leq n_h} V_i w_i$$

$$\geq \alpha \|v_h\|_V^2 \quad \text{car } a \text{ est coercive}$$

$$\geq \alpha \|V\|^2 \quad \text{pour une certaine norme de } \mathbb{R}^{n_h}$$

$A$  est définie positive, donc injective, donc inversible.

# Méthode de Galerkin

Soit  $u_h \in V_h$  solution de

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que } a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (\text{F.V.}_h)$$

2. Le problème (F.V.<sub>h</sub>) se ramène à la simple résolution d'un **ystème linéaire**.

Soit  $(w_1, \dots, w_{n_h})$  une base de  $V_h$  ( $\dim V_h = n_h$ )

## Proposition

$$(\text{F.V.}_h) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Trouver } U \in \mathbb{R}^{n_h} \text{ telle que } AU = L \quad (\text{F.V.}_h)$$

$$\text{où } \forall i, j \in [1, n_h], \quad A_{ij} = a(w_j, w_i), \quad U_i = u_i \text{ et } L_i = \ell(w_i)$$

## Proposition

La matrice  $A$  est définie positive et donc inversible.

La solution de (F.V.<sub>h</sub>) existe et unique. Elle est donnée par

$$U = A^{-1}L$$

On vient de redémontrer l'existence et l'unicité de la solution de (F.V.<sub>h</sub>)

$$u_h = \sum_{1 \leq j \leq n_h} U_j w_j$$

# Méthode de Galerkin

Soit  $u \in V$  solution de

Trouver  $u \in V$  telle que  $a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in V \quad (\text{F.V.})$

Soit  $u_h \in V_h$  solution de

Trouver  $u_h \in V_h$  telle que  $a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (\text{F.V.}_h)$

Dans la suite du cours, nous allons choisir un espace  $V_h \subset V$  tel que

- le système linéaire n'est **pas difficile** ou **couteux** à résoudre;  
(cet amphi et l'amphi 5)
- on a bien **convergence** de la méthode;  
(voir l'amphi 6)
- la vitesse de convergence est d'**ordre le plus élevé** possible.  
(voir l'amphi 6)

On verra qu'il y a toujours un **compromis** à trouver entre les coûts de calcul (stockage et temps de calcul) et la vitesse de convergence.

# Méthode de Galerkin

Il existe deux exemples fondamentaux :

## Méthode spectrale

l'espace de dimension finie est construit à partir de fonctions propres du problème (voir le cours MS04)

C'est une des méthodes les plus utilisées en Mécanique (les phénomènes d'ondes et vibrations par exemple). Elle est peu pratique quand les fonctions propres ne peuvent pas être déterminées explicitement (milieux à coefficients variables, géométrie compliquée,...)

## Méthode des éléments finis

l'espace de dimension finie est construit à partir de fonctions localisées, construites à partir d'un maillage

C'est une des méthodes les plus efficaces et populaires pour discrétiser des problèmes aux limites. Elle est utilisée dans un grand nombre de codes industriels.

# La méthode des éléments finis : le principe

C'est de construire des espaces d'approximations des espaces usuels  $H^1(\Omega)$ ,  $H_0^1(\Omega)$ ,  $H^2(\Omega)$ , ... dont la définition est basée sur un **maillage** du domaine  $\Omega$ .

## Definition : Maillage

C'est un pavage de l'espace en **volumes élémentaires** (triangles, tétraèdres, quadrilatères, parallélogrammes,...)

Dans ce contexte,  $h$  correspond à la **taille maximale des mailles** qui composent le maillage et une base de  $V_h$  sera constituée de fonctions dont le **support est localisé** sur une ou plusieurs mailles.

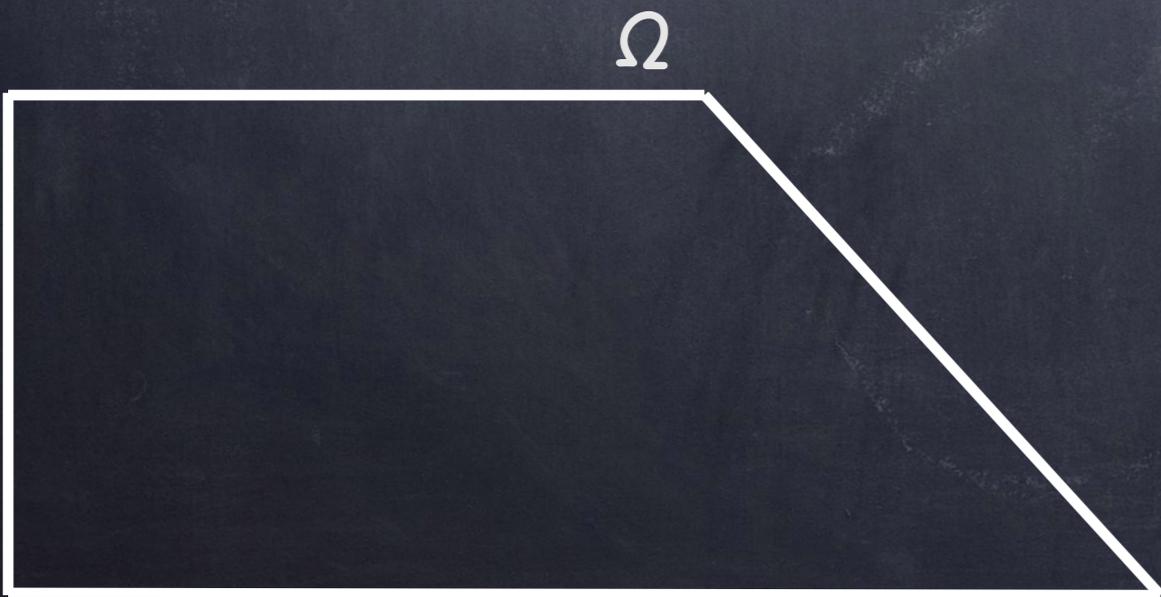
- quand  $h$  tendra vers 0,  $V_h$  deviendra de plus en plus "gros";
- la matrice  $\mathbb{A}$  va être "**creuse**" (i.e. avec beaucoup de 0) ce qui limitera le coût de calcul.

# Un exemple d'application en 2D

Trouver l'unique solution  $\mathbf{u}$  dans  $H^1(\Omega)$  de

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On suppose pour simplifier que le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est un ouvert polygonal.



# Un exemple d'application en 2D

Trouver l'unique solution  $u$  dans  $H^1(\Omega)$  de

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad a(u, v) = \ell(v) \quad (\mathcal{P})$$

$$\text{où } \left\{ \begin{array}{l} a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega \\ \ell(v) = \int_{\Omega} f v \, d\Omega \end{array} \right.$$

$\Omega$



# Un exemple d'application en 2D

Trouver l'unique solution  $u_h$  dans  $V_h$  de

$$A U = L \quad (\mathcal{P}_h)$$

où  $A = K + M$

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla w_j \cdot \nabla w_i \, d\Omega$$

matrice de rigidité

$$M_{ij} = \int_{\Omega} w_j w_i \, d\Omega$$

matrice de masse

$$L_i = \ell(w_i) = \int_{\Omega} f w_i \, d\Omega$$

$$U_i = u_i$$

où on a décomposé

$$u_h = \sum_{j=1}^{n_h} u_j w_j$$

$\Omega$

$(w_1, \dots, w_{n_h})$  une base de  $V_h$

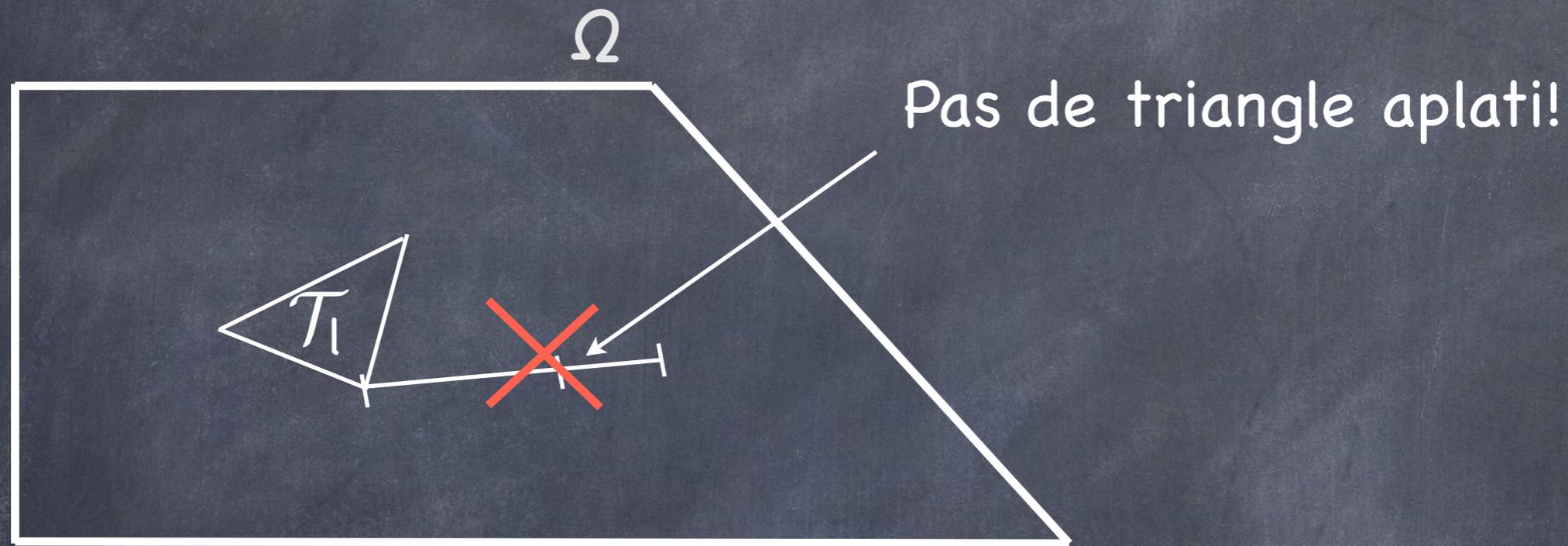
$$\dim A = n_h$$

# Programme de cet amphi...

- Maillage : description et structure
- Elements finis de lagrange  $\mathbb{P}^1$ 
  - Définition et Propriétés
  - Fonctions de base et coordonnées barycentriques
  - Calcul des matrices élémentaires
    - Utilisation des coordonnées barycentriques
    - Passage à l'élément fini de référence
- Assemblage et résolution

# Maillage : description et structure

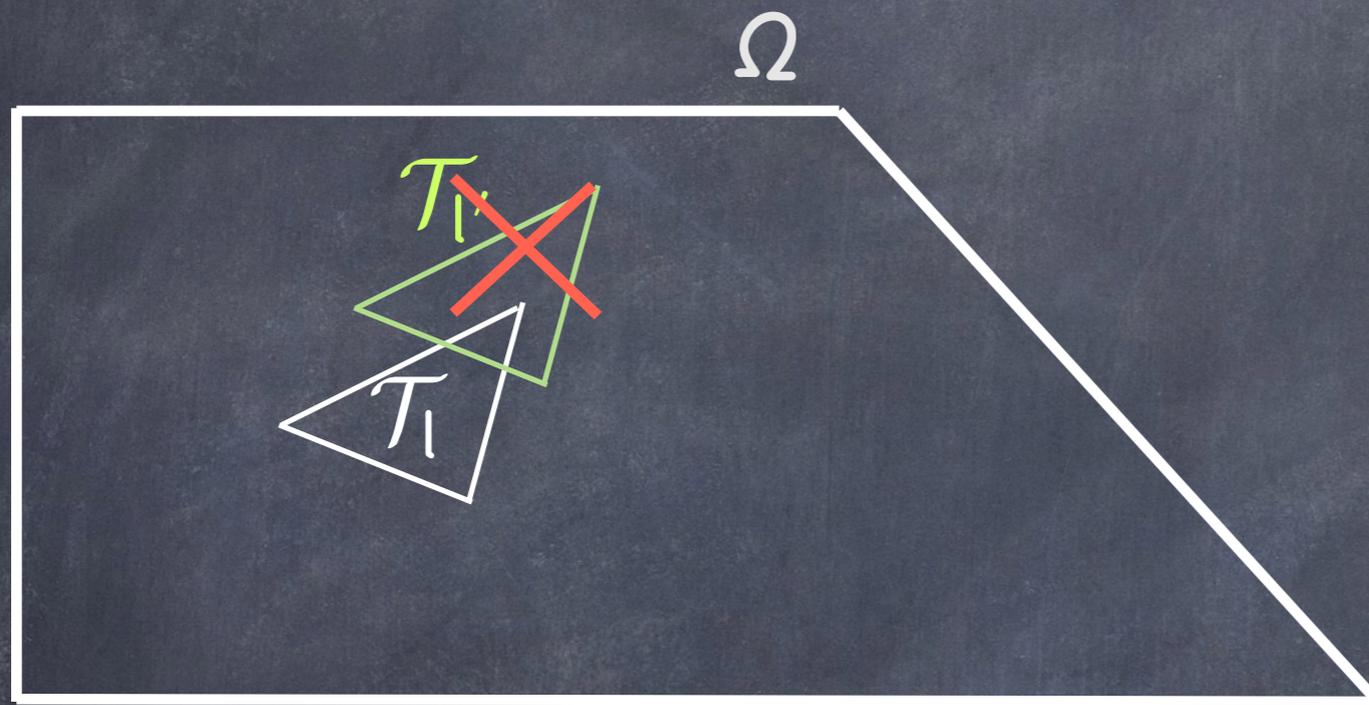
## Éléments finis triangulaires



- Tout triangle  $T_1$  est d'intérieur non vide ( $\overset{\circ}{T}_1 \neq \emptyset$ )

# Maillage : description et structure

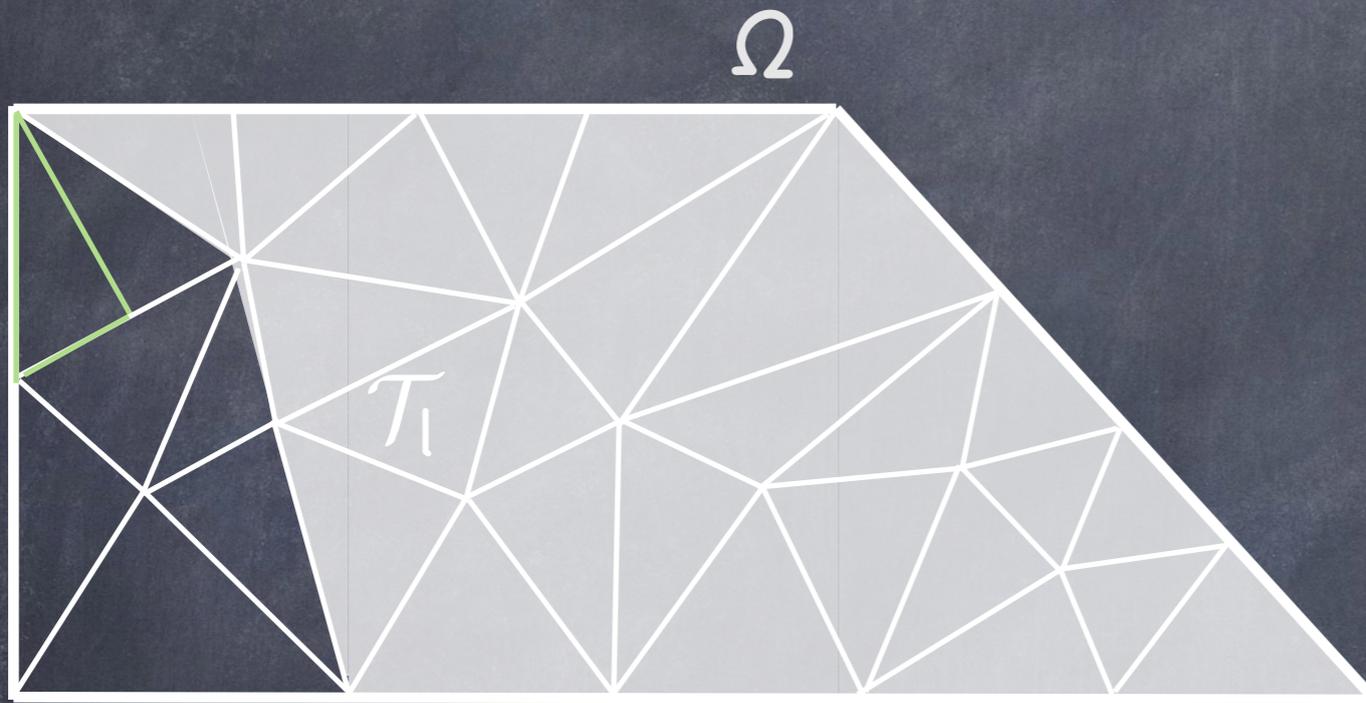
## Éléments finis triangulaires



- Tout triangle  $\mathcal{T}_l$  est d'intérieur non vide ( $\overset{\circ}{\mathcal{T}}_l \neq \emptyset$ )
- $\overset{\circ}{\mathcal{T}}_l \cap \overset{\circ}{\mathcal{T}}_{l'} = \emptyset$  si  $l \neq l'$

# Maillage : description et structure

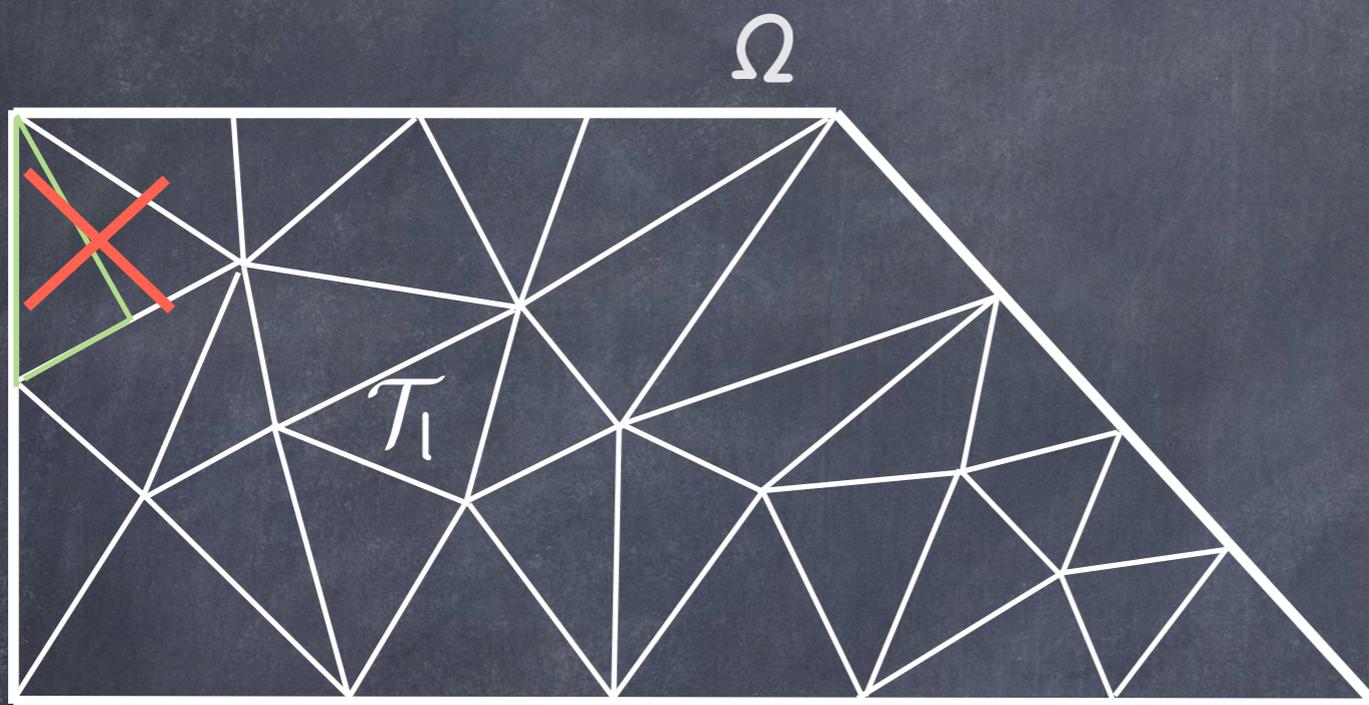
## Éléments finis triangulaires



- Tout triangle  $\mathcal{T}_l$  est d'intérieur non vide ( $\overset{\circ}{\mathcal{T}}_l \neq \emptyset$ )
- $\overset{\circ}{\mathcal{T}}_l \cap \overset{\circ}{\mathcal{T}}_{l'} = \emptyset$  si  $l \neq l'$
- $\bigcup_l \mathcal{T}_l = \overline{\Omega}$

# Maillage : description et structure

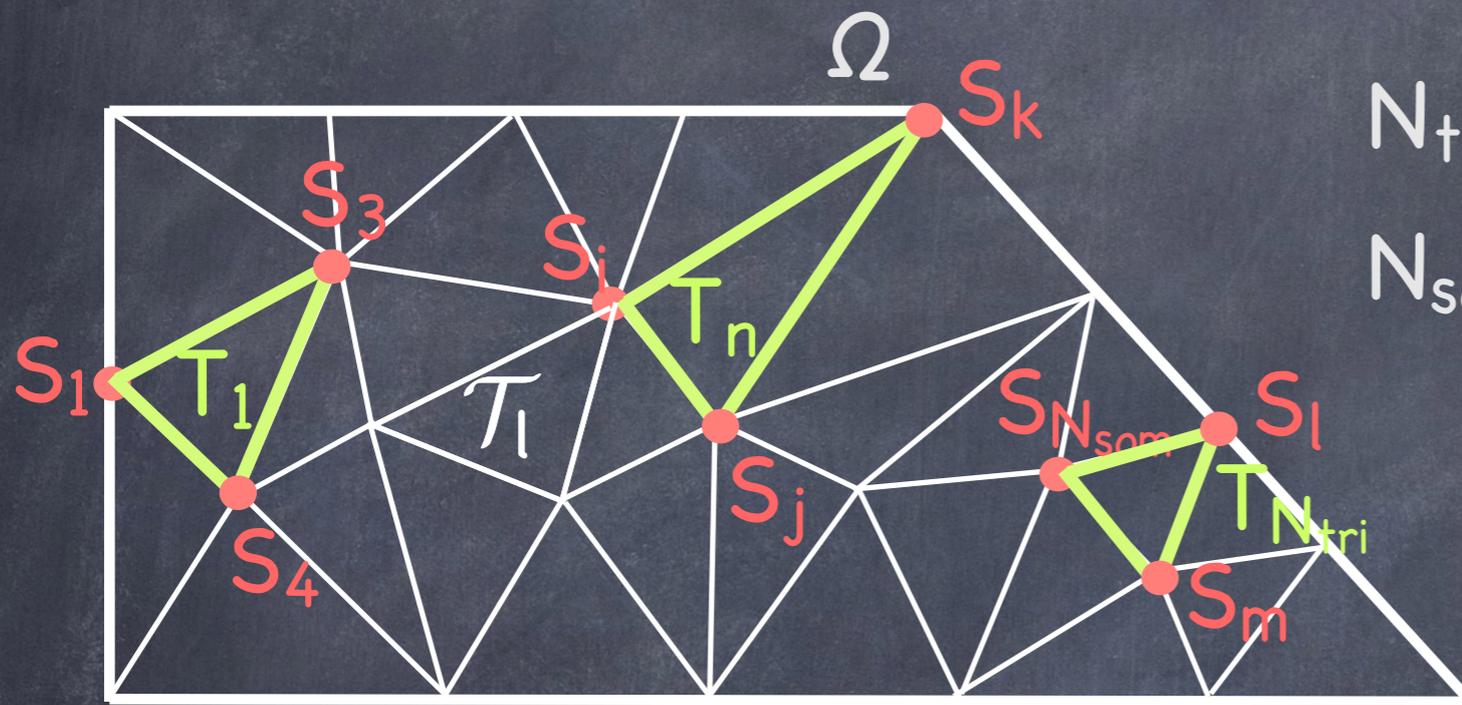
## Éléments finis triangulaires



- Tout triangle  $\mathcal{T}_l$  est d'intérieur non vide ( $\overset{\circ}{\mathcal{T}}_l \neq \emptyset$ )
- $\overset{\circ}{\mathcal{T}}_l \cap \overset{\circ}{\mathcal{T}}_{l'} = \emptyset$  si  $l \neq l'$
- $\bigcup_l \mathcal{T}_l = \overline{\Omega}$
- Toute arête d'un triangle est soit une arête d'un autre triangle, soit une arête portée par la frontière

# Maillage : description et structure

## Éléments finis triangulaires



$N_{\text{tri}}$  le nombre de triangles

$N_{\text{som}}$  le nombre de sommets

$(S_i)_{1 \leq i \leq N_{\text{som}}}$  est l'ensemble des sommets des triangles :  
on les appelle **noeuds** du maillage.

**Pas du maillage  $h$**  (qui sera amené à tendre vers 0)

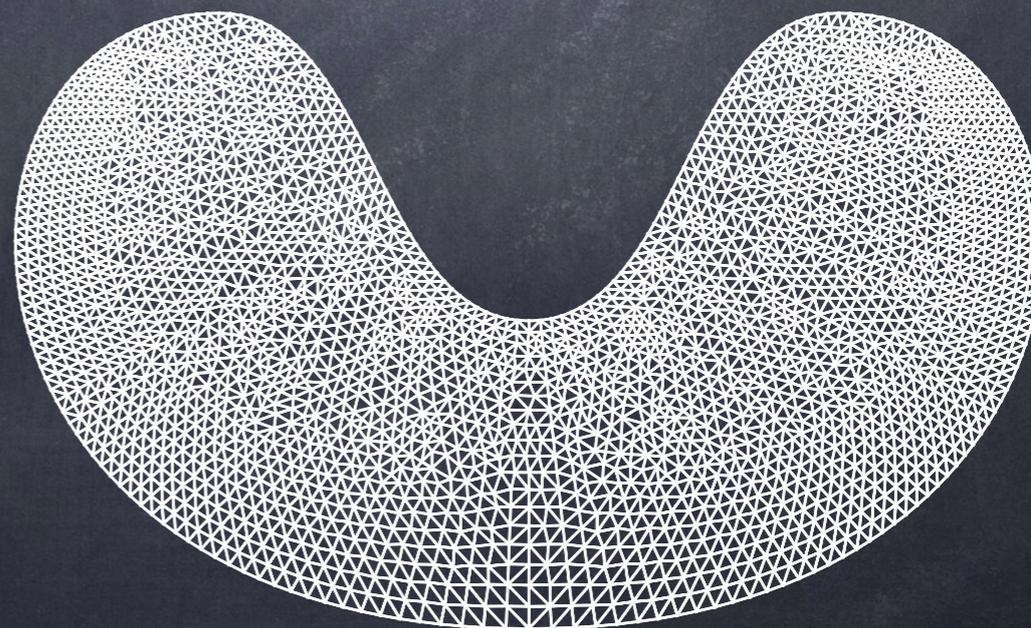
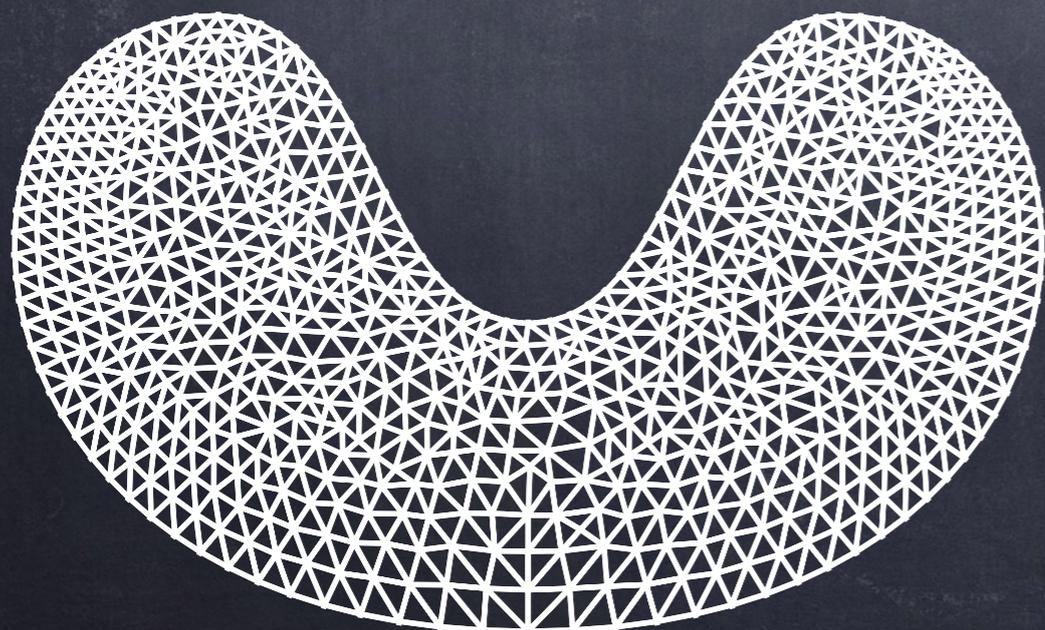
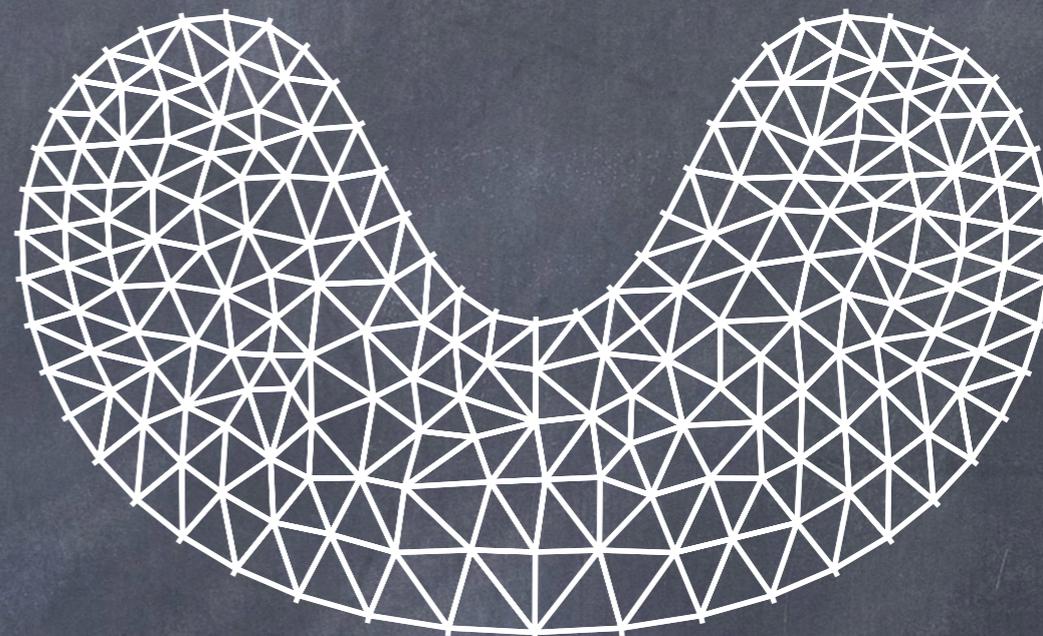
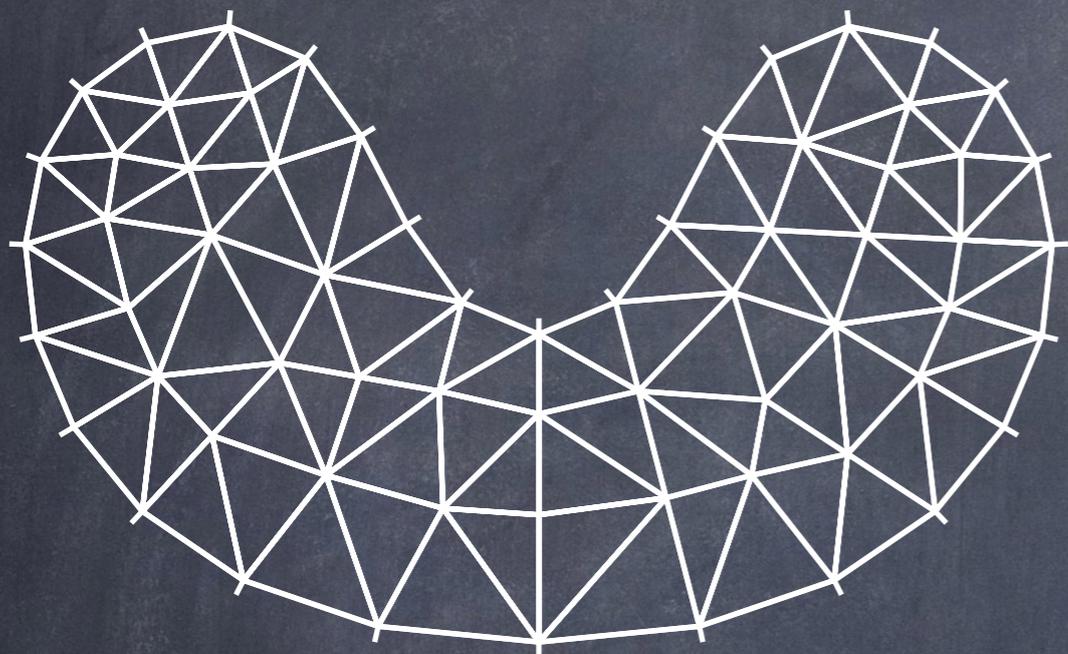
$h = \max_{1 \leq l \leq N_{\text{tri}}} h_l$  où  $h_l$  est le rayon du plus petit cercle contenant  $T_l$

$\pi h_l^2$  est une borne supérieure de l'aire de  $T_l$

donc  $h \rightarrow 0 \Rightarrow 1 \leq l \leq N_{\text{tri}} \quad h_l \rightarrow 0$   
 $\Rightarrow N_{\text{tri}} \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad N_{\text{som}} \rightarrow +\infty$

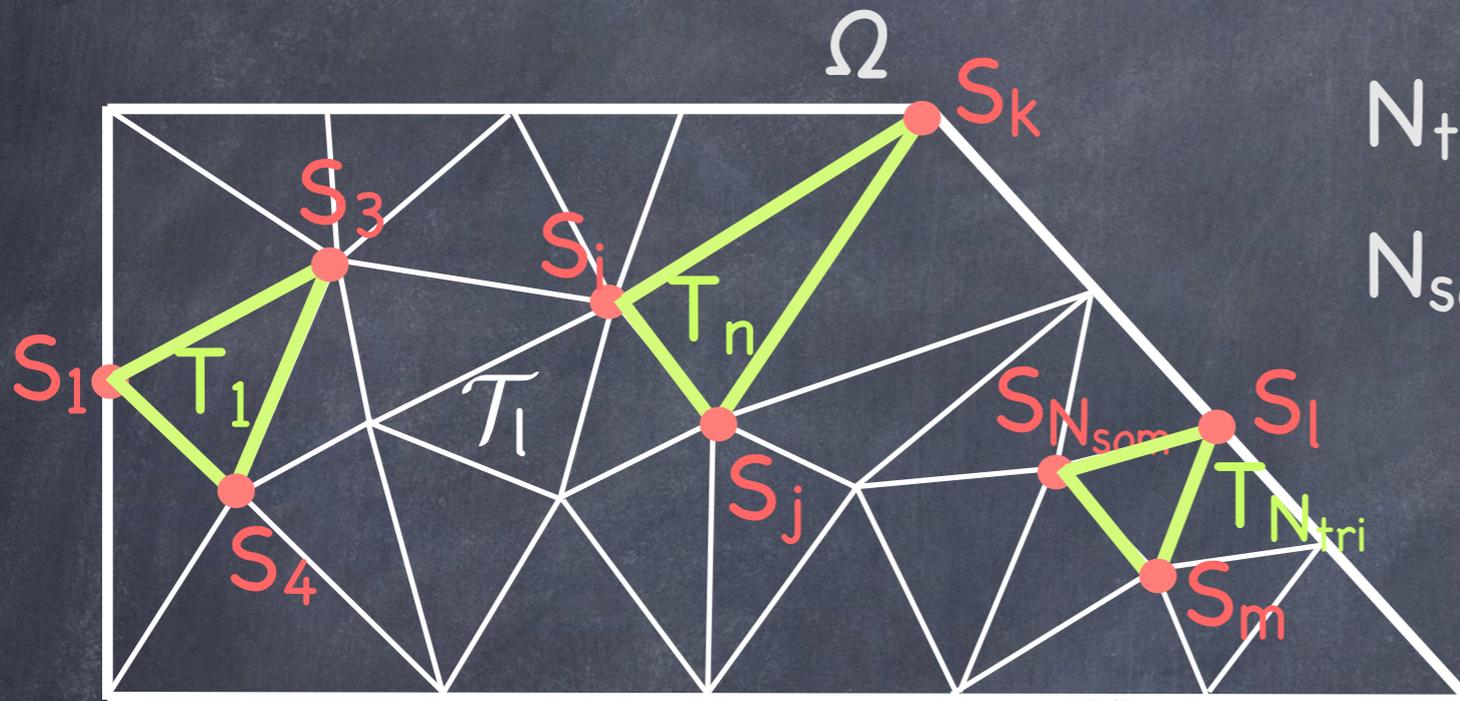


# Quelques exemples de maillages



# Maillage : description et structure

## Éléments finis triangulaires



$N_{tri}$  le nombre de triangles

$N_{som}$  le nombre de sommets

Dans ce cours, nous utilisons le logiciel gmsh pour construire les maillages.

### Coorneu

Tableau de coordonnées des sommets

|               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|
| $S_1$         | $x_1$         | $y_1$         |
| $\vdots$      | $\vdots$      | $\vdots$      |
| $S_i$         | $x_i$         | $y_i$         |
| $\vdots$      | $\vdots$      | $\vdots$      |
| $S_{N_{som}}$ | $x_{N_{som}}$ | $y_{N_{som}}$ |

### Refneu

Réf

|          |
|----------|
| 1        |
| $\vdots$ |
| 0        |
| $\vdots$ |
| 0        |

### Numtri

Tableau de composition des triangles

|               |           |          |          |
|---------------|-----------|----------|----------|
| $T_1$         | 1         | 3        | 4        |
| $\vdots$      | $\vdots$  | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $T_n$         | $i$       | $j$      | $k$      |
| $\vdots$      | $\vdots$  | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $T_{N_{tri}}$ | $N_{som}$ | $l$      | $m$      |

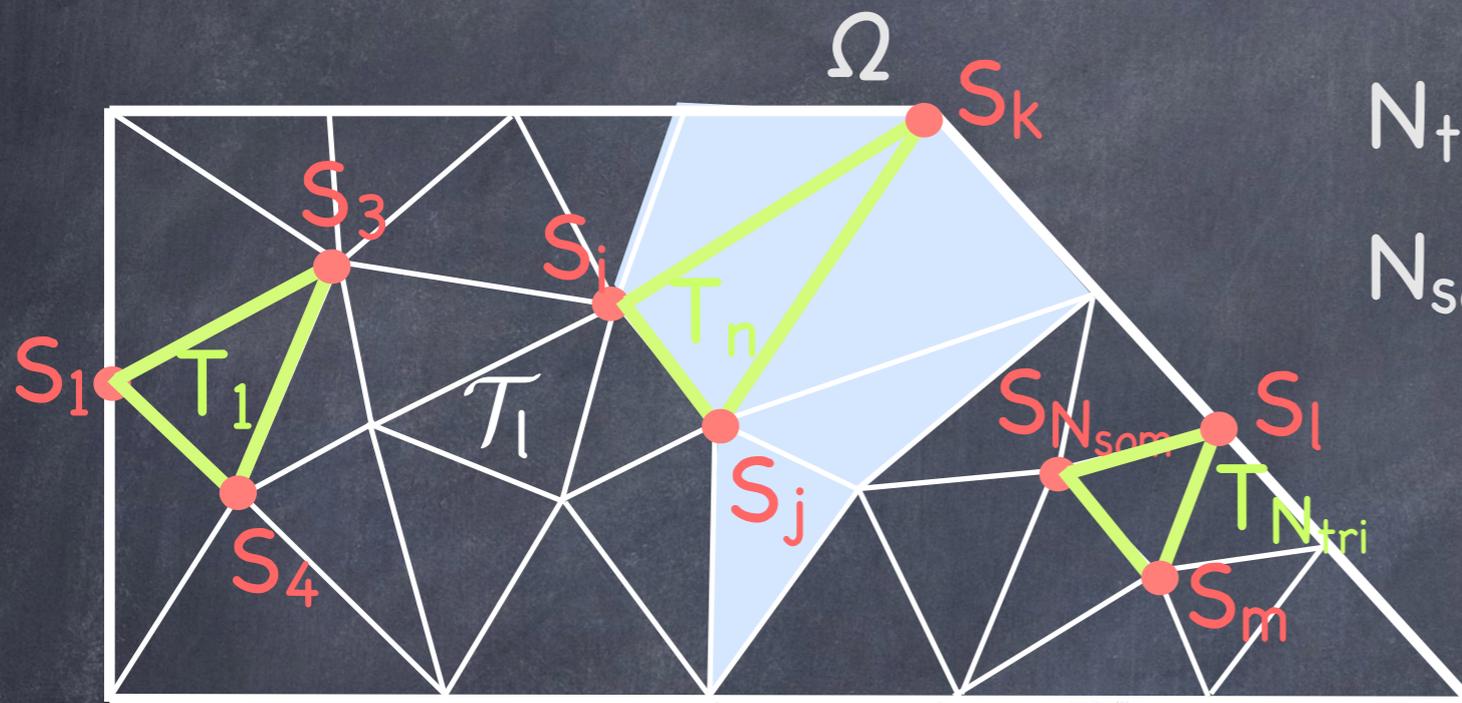
### Reftri

Réf

|          |
|----------|
| 1        |
| $\vdots$ |
| 1        |
| $\vdots$ |
| 1        |

# Maillage : description et structure

## Éléments finis triangulaires



$N_{tri}$  le nombre de triangles

$N_{som}$  le nombre de sommets

### Coorneu

Tableau de coordonnées des sommets

|               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|
| $S_1$         | $x_1$         | $y_1$         |
| $\vdots$      | $\vdots$      | $\vdots$      |
| $S_i$         | $x_i$         | $y_i$         |
| $\vdots$      | $\vdots$      | $\vdots$      |
| $S_{N_{som}}$ | $x_{N_{som}}$ | $y_{N_{som}}$ |

### Refneu

Réf

1  
 $\vdots$   
 0  
 $\vdots$   
 0

### Numtri

Tableau de composition des triangles

|               |           |          |          |
|---------------|-----------|----------|----------|
| $T_1$         | 1         | 3        | 4        |
| $\vdots$      | $\vdots$  | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $T_n$         | $i$       | $j$      | $k$      |
| $\vdots$      | $\vdots$  | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $T_{N_{tri}}$ | $N_{som}$ | $l$      | $m$      |

### Reftri

Réf

1  
 $\vdots$   
 2  
 $\vdots$   
 1

# Programme de cet amphi...

- Maillage : description et structure
- Elements finis de lagrange  $\mathbb{P}^1$ 
  - Définition et Propriétés
  - Fonctions de base et coordonnées barycentriques
  - Matrice élémentaire
    - Utilisation des coordonnées barycentriques
    - Passage à l'élément fini de référence
- Assemblage et résolution

# Éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}^1$

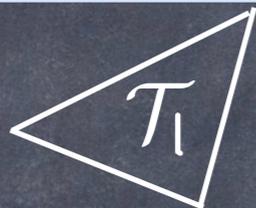
## Définition et Propriétés

### Definition

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), \quad \forall l \in \{1, \dots, N_{\text{tri}}\}, v_h|_{\mathcal{T}_l} \in \mathbb{P}_1\}$$

où  $\mathbb{P}^1$  est l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 1.

### Remarque :



Sur chaque triangle  $\mathcal{T}_l$ ,  $v_h \in V_h$  est affine :

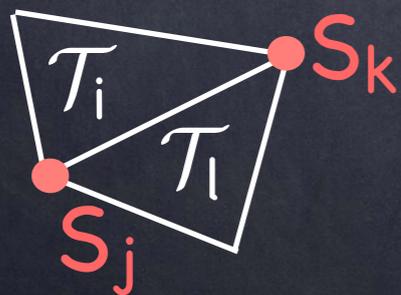
$$\forall (x, y) \in \mathcal{T}_l, v_h(x, y) = a_l x + b_l y + c_l$$

Pour connaître  $v_h$  sur un triangle  $\mathcal{T}_l$ , il suffit de la connaître en **3 points non alignés** (par exemple aux sommets du triangle).

### Proposition

$$V_h \subset H^1(\Omega)$$

### Preuve :



Soit  $v_h \in V_h$ , on a  $\forall l \in \{1, \dots, N_{\text{tri}}\}, v_h|_{\mathcal{T}_l} \in C^1(\bar{\mathcal{T}}_l) \subset H^1(\mathcal{T}_l)$ .

Soit  $\mathcal{Q} = \mathcal{T}_l \cup \mathcal{T}_i$ , pour que  $v_h|_{\mathcal{Q}} \in H^1(\mathcal{Q})$ , il faut et il suffit que  $v_h$  soit continue à l'interface  $[S_j, S_k]$  (voir l'exercice 2 du TD1), ce qui est le cas.

Ainsi  $v_h$  étant  $H^1$  sur chaque triangle et continue aux interfaces de chaque triangle, elle est dans  $H^1(\Omega)$  ( $\bar{\Omega} = \bigcup_l \mathcal{T}_l$ ).

# Éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}^1$

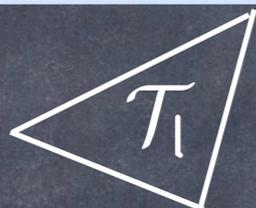
## Définition et Propriétés

### Definition

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), \quad \forall l \in \{1, \dots, N_{\text{tri}}\}, v_h|_{\mathcal{T}_l} \in \mathbb{P}_1\}$$

où  $\mathbb{P}^1$  est l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 1.

### Remarque :



Sur chaque triangle  $\mathcal{T}_l$ ,  $v_h \in V_h$  est affine :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{T}_l, v_h(x, y) = a_l x + b_l y + c_l$$

Pour connaître  $v_h$  sur un triangle  $\mathcal{T}_l$ , il suffit de la connaître en **3 points non alignés** (par exemple aux sommets du triangle).

### Lemme

$$\forall v_h, w_h \in V_h, \quad v_h = w_h \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in \llbracket 1, N_{\text{som}} \rrbracket, \quad v_h(S_i) = w_h(S_i)$$

Preuve :  $\Rightarrow \forall (x, y) \in \Omega, v_h(x, y) = w_h(x, y)$  c'est vrai en particulier pour  $(x, y) = S_i$

$\Leftarrow$  si  $\forall i \in \llbracket 1, N_{\text{som}} \rrbracket, v_h(S_i) = w_h(S_i)$  alors  $\forall l \in \llbracket 1, N_{\text{tri}} \rrbracket, v_h|_{\mathcal{T}_l} = w_h|_{\mathcal{T}_l}$  (car elles sont affines et déterminées de manière unique par leurs valeurs en 3 points non alignés)

Comme  $\bar{\Omega} = \bigcup \mathcal{T}_l$ , elles sont égales sur tout le domaine.

Remarque : Pour déterminer de manière unique  $v_h \in V_h$ , il suffit de connaître sa valeur aux noeuds du maillage  $(S_i)_{1 \leq i \leq N_{\text{som}}}$ .

# Éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}^1$

## Fonctions de base

### Definition

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), \quad \forall l \in \{1, \dots, N_{\text{tri}}\}, v_h|_{\mathcal{T}_l} \in \mathbb{P}_1\}$$

où  $\mathbb{P}^1$  est l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 1.

### Proposition

$V_h$  est un espace vectoriel de dimension  $N_{\text{som}}$  dont une base est donnée par les fonctions  $w_i$ , pour  $1 \leq i \leq N_{\text{som}}$ , définies par

$$w_i \in C^0(\bar{\Omega}), \quad \forall l \in \llbracket 1, N_{\text{tri}} \rrbracket, w_i|_{\mathcal{T}_l} \in \mathbb{P}_1, \quad w_i(S_j) = \delta_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq N_{\text{som}}$$

Preuve : •  $w_i \in V_h$  par définition

•  $(w_i)_{1 \leq i \leq N_{\text{som}}}$  est une famille **libre** :

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{som}}} \alpha_i w_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \bar{\Omega} \Rightarrow \text{pour } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = S_j, j \in \llbracket 1, N_{\text{som}} \rrbracket \quad \sum_{i=1}^{N_{\text{som}}} \alpha_i w_i(S_j) = 0$$
$$\Rightarrow \text{pour tout } j \in \llbracket 1, N_{\text{som}} \rrbracket, \alpha_j = 0$$

•  $(w_i)_{1 \leq i \leq N_{\text{som}}}$  est une famille **génératrice** :

$$\forall v_h \in \text{vect}(w_i)_{1 \leq i \leq N_{\text{som}}} \quad v_h = \sum_{i=1}^{N_{\text{som}}} \alpha_i w_i \Rightarrow \forall j \in \llbracket 1, N_{\text{som}} \rrbracket, \alpha_j = v_h(S_j)$$

$\forall v_h \in V_h$   $v_h$  et  $\sum_{i=1}^{N_{\text{som}}} v_h(S_i) w_i$  sont égales sur  $\bar{\Omega}$  (car elles sont égales en chaque noeud  $S_i$ )

•  $V_h$  est donc nécessairement un espace vectoriel de dimension  $N_{\text{som}}$

# Éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}^1$

## Fonctions de base

### Definition

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), \quad \forall l \in \{1, \dots, N_{\text{tri}}\}, v_h|_{\mathcal{T}_l} \in \mathbb{P}_1\}$$

où  $\mathbb{P}^1$  est l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 1.

### Proposition

$V_h$  est un espace vectoriel de dimension  $N_{\text{som}}$  dont une base est donnée par les fonctions  $w_i$ , pour  $1 \leq i \leq N_{\text{som}}$ , définies par

$$w_i \in C^0(\bar{\Omega}), \quad \forall l \in \llbracket 1, N_{\text{tri}} \rrbracket, w_i|_{\mathcal{T}_l} \in \mathbb{P}_1, \quad w_i(S_j) = \delta_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq N_{\text{som}}$$

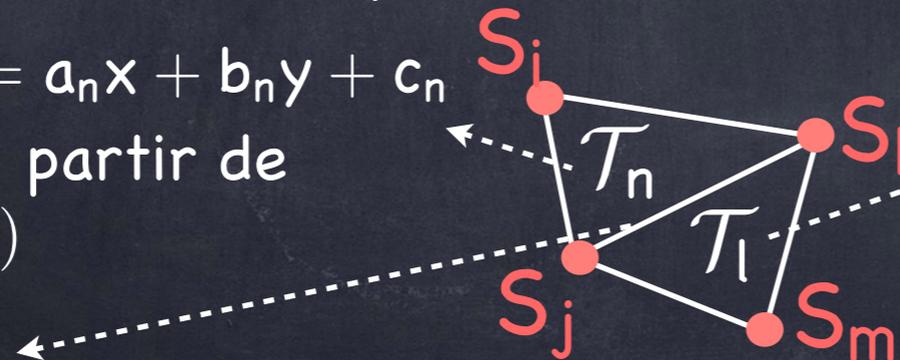
### Corollaire

$$\forall v_h \in V_h, \quad v_h = \sum_{i=1}^{N_{\text{som}}} v_h(S_i) w_i$$

**Remarque :** Définie ainsi,  $v_h$  est bien dans  $C^0(\bar{\Omega})$

$\forall (x, y) \in \mathcal{T}_n, v_h(x, y) = a_n x + b_n y + c_n$   
 $a_n, b_n, c_n$  déterminé à partir de  
 $v_h(S_j), v_h(S_k),$  et  $v_h(S_i)$

$\forall (x, y) \in \mathcal{T}_l, v_h(x, y) = a_l x + b_l y + c_l$   
 $a_l, b_l, c_l$  déterminé à partir de  
 $v_h(S_j), v_h(S_k),$  et  $v_h(S_m)$



$v_h|_{\mathcal{T}_n} = v_h|_{\mathcal{T}_l}$  sur  $[S_j, S_k]$  car elles sont affines "1D" sur  $[S_j, S_k]$  et sont égales en  $S_j$  et  $S_k$ .

# Éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}^1$

## Fonctions de base

### Définition

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), \quad \forall l \in \{1, \dots, N_{\text{tri}}\}, v_h|_{\mathcal{T}_l} \in \mathbb{P}_1\}$$

où  $\mathbb{P}^1$  est l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 1.

### Proposition

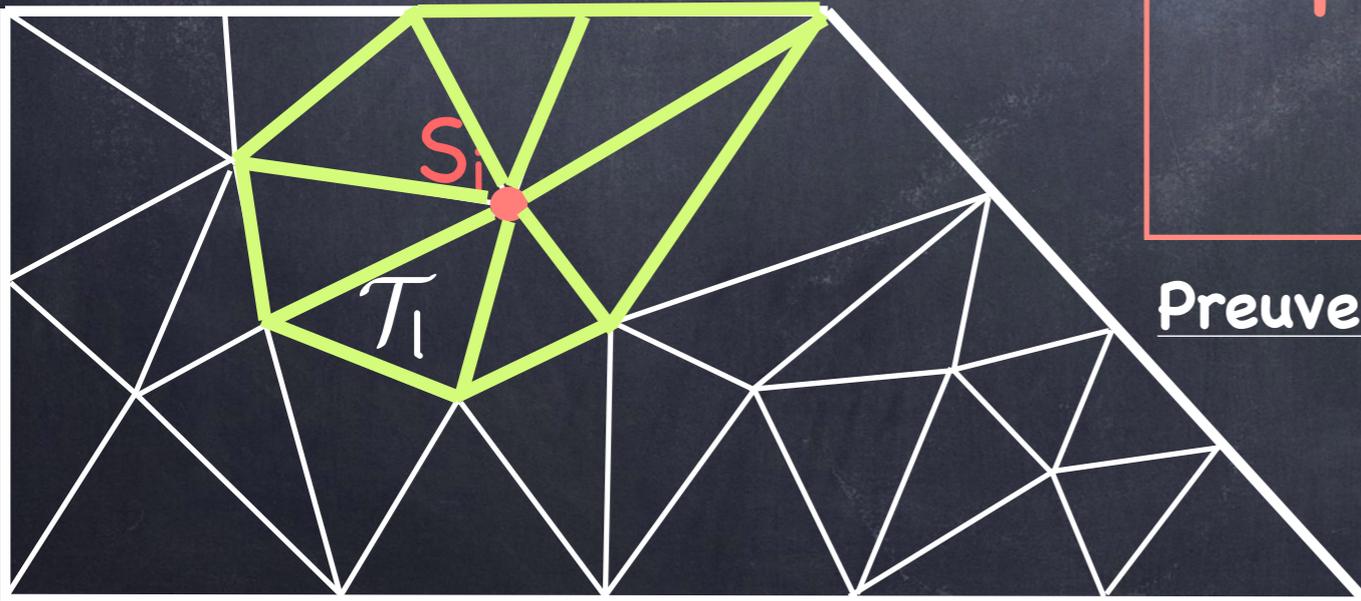
$V_h$  est un espace vectoriel de dimension  $N_{\text{som}}$  dont une base est donnée par les fonctions  $w_i$ , pour  $1 \leq i \leq N_{\text{som}}$ , définies par

$$w_i \in C^0(\bar{\Omega}), \quad \forall l \in \llbracket 1, N_{\text{tri}} \rrbracket, w_i|_{\mathcal{T}_l} \in \mathbb{P}_1, \quad w_i(S_j) = \delta_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq N_{\text{som}}$$

### Proposition

$$\text{Support } w_i = \bigcup_{l, S_i \in \mathcal{T}_l} \mathcal{T}_l$$

Preuve : Soit  $l, S_i \notin \mathcal{T}_l \quad \forall j, S_j \in \mathcal{T}_l \Rightarrow w_i(S_j) = 0$   
ce qui implique que  $w_i|_{\mathcal{T}_l} = 0$  (la seule fonction affine sur un triangle, nulle aux sommets est la fonction nulle!)



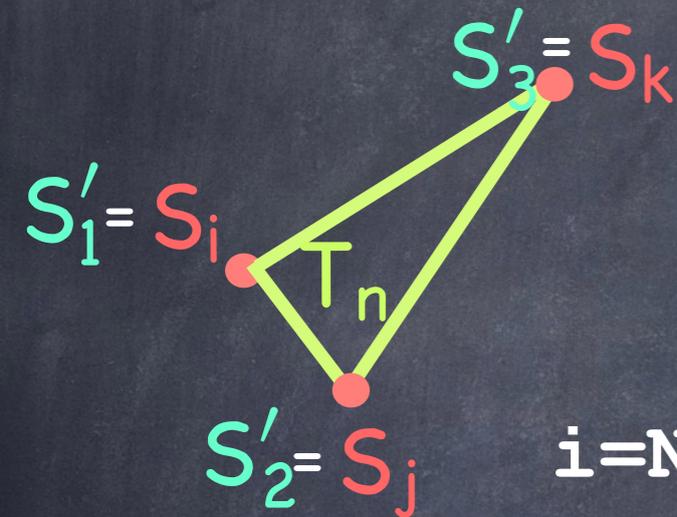
Les fonctions  $w_i$  sont appelées **fonctions de forme**.

# Éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}^1$

Coordonnées barycentriques

Caractérisation des  $w_i$  sur chaque triangle

- Définition d'une numérotation locale
- Correspondance entre numérotation des sommets globale et locale



$$i = \text{Numtri}(n, 1)$$

$$j = \text{Numtri}(n, 2)$$

$$k = \text{Numtri}(n, 3)$$

Tableau de composition des triangles

|                      |                  |     |     |
|----------------------|------------------|-----|-----|
| $T_1$                | 1                | 3   | 4   |
|                      | ⋮                | ⋮   | ⋮   |
| $T_n$                | $i$              | $j$ | $k$ |
|                      | ⋮                | ⋮   | ⋮   |
| $T_{N_{\text{tri}}}$ | $N_{\text{som}}$ | $l$ | $m$ |

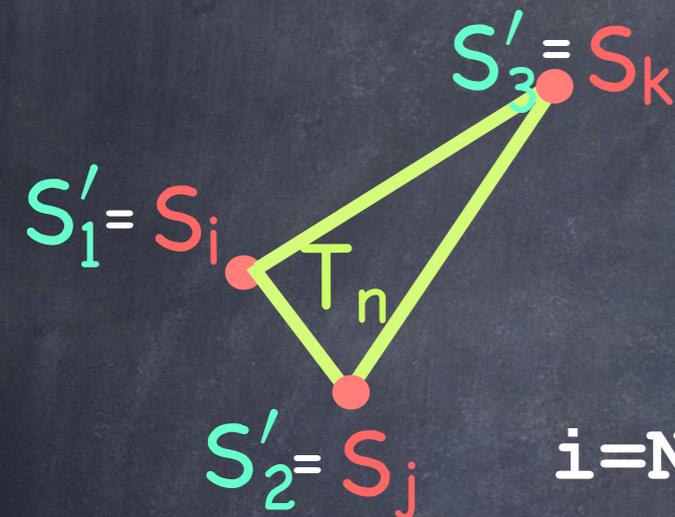
Numtri

# Éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}^1$

Coordonnées barycentriques

Caractérisation des  $w_i$  sur chaque triangle

- Définition d'une numérotation locale
- Correspondance entre numérotation des sommets globale et locale



$$i = \text{Numtri}(n, 1) \quad j = \text{Numtri}(n, 2) \quad k = \text{Numtri}(n, 3)$$

## Proposition

$w_i|_{\mathcal{T}_n}$ ,  $w_j|_{\mathcal{T}_n}$ ,  $w_k|_{\mathcal{T}_n}$  sont les coordonnées barycentriques associées respectivement aux points  $S'_1 = S_i$ ,  $S'_2 = S_j$ ,  $S'_3 = S_k$ .

**Rappel** :  $\forall I \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\lambda_I : M \in \mathcal{T}_n \rightarrow \lambda_I(M) \in [0, 1]$  telles que

$$\left| \begin{array}{l} \forall M \in \mathcal{T}_n, \quad \overrightarrow{OM} = \lambda_1(M)\overrightarrow{OS'_1} + \lambda_2(M)\overrightarrow{OS'_2} + \lambda_3(M)\overrightarrow{OS'_3} \\ \forall M \in \mathcal{T}_n, \quad \lambda_1(M) + \lambda_2(M) + \lambda_3(M) = 1 \end{array} \right.$$

Preuve : les fonctions  $\lambda_i$  sont des fonctions affines sur  $\mathcal{T}_n$  telles que

$$\forall I, J \in \{1, 2, 3\}, \lambda_I(S'_J) = \delta_{IJ}$$

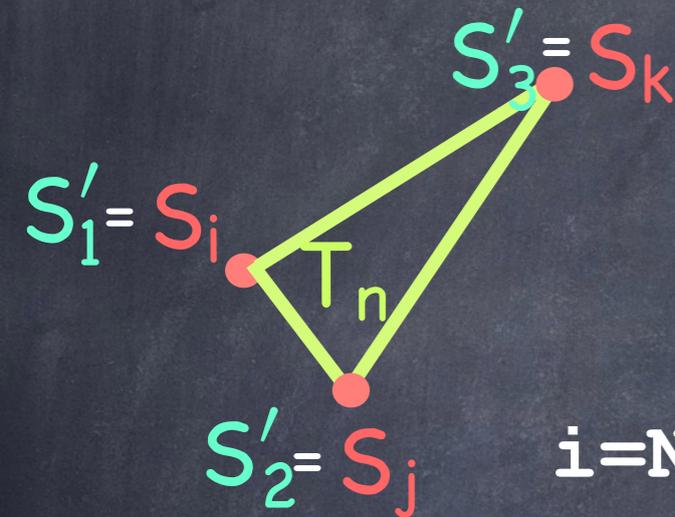
# Éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}^1$

Coordonnées barycentriques

Caractérisation des  $w_i$  sur chaque triangle

- Définition d'une numérotation locale

- Correspondance entre numérotation des sommets globale et locale



$$i = \text{Numtri}(n, 1) \quad j = \text{Numtri}(n, 2) \quad k = \text{Numtri}(n, 3)$$

- Fonctions de base locales  $\lambda_1 = w_i|_{\mathcal{T}_n}$   $\lambda_2 = w_j|_{\mathcal{T}_n}$   $\lambda_3 = w_k|_{\mathcal{T}_n}$

où  $\forall I \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\lambda_I : M \in \mathcal{T}_n \rightarrow \lambda_I(M) \in [0, 1]$  telles que

$$\left| \begin{array}{l} \forall M \in \mathcal{T}_n, \quad \overrightarrow{OM} = \lambda_1(M) \overrightarrow{OS'_1} + \lambda_2(M) \overrightarrow{OS'_2} + \lambda_3(M) \overrightarrow{OS'_3} \\ \forall M \in \mathcal{T}_n, \quad \lambda_1(M) + \lambda_2(M) + \lambda_3(M) = 1 \end{array} \right.$$

Calcul des fonctions  $\lambda_i$ : pour tout  $M = (x, y) \in \mathcal{T}_n$

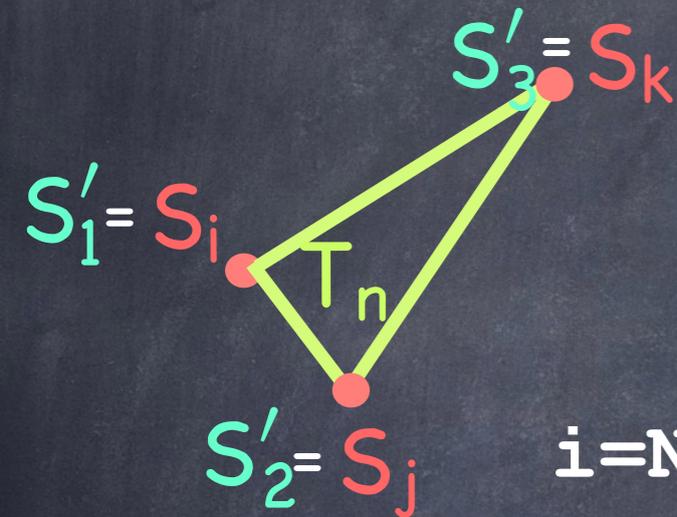
$$\left| \begin{array}{l} x_1 \lambda_1(x, y) + x_2 \lambda_2(x, y) + x_3 \lambda_3(x, y) = x \\ y_1 \lambda_1(x, y) + y_2 \lambda_2(x, y) + y_3 \lambda_3(x, y) = y \\ \lambda_1(x, y) + \lambda_2(x, y) + \lambda_3(x, y) = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \lambda_1(x, y) = \frac{(y_2 - y_3)(x - x_3) - (x_2 - x_3)(y - y_3)}{(x_2 - x_3)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_3)} \\ \lambda_2(x, y) = \frac{(y_3 - y_1)(x - x_1) - (x_3 - x_1)(y - y_1)}{(x_2 - x_3)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_3)} \\ \lambda_3(x, y) = \frac{(y_1 - y_2)(x - x_2) - (x_1 - x_2)(y - y_2)}{(x_2 - x_3)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_3)} \end{array} \right.$$

# Éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}^1$

Coordonnées barycentriques

Caractérisation des  $w_i$  sur chaque triangle

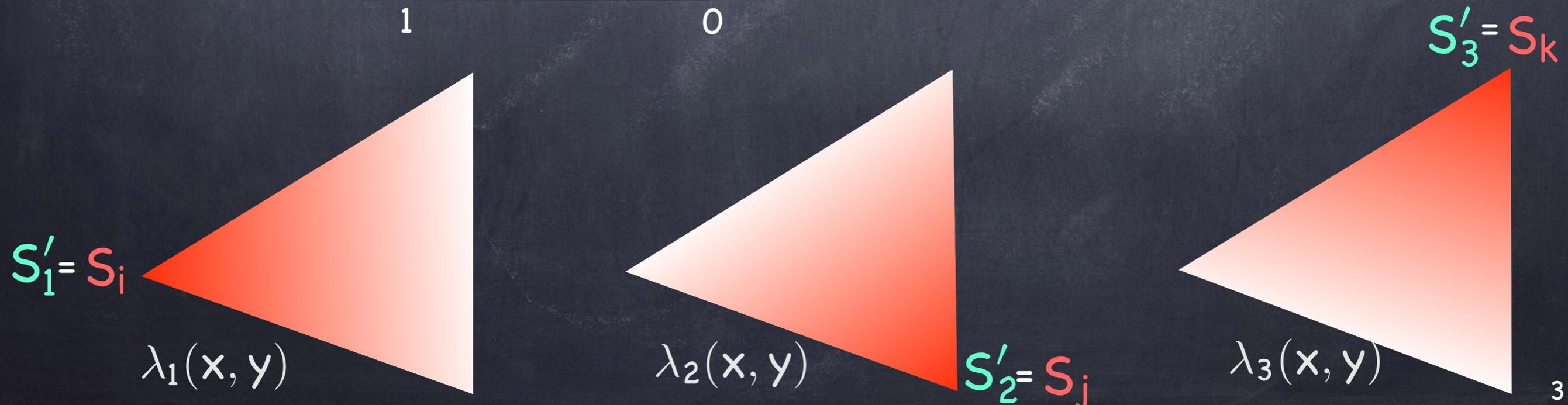
- Définition d'une numérotation locale
- Correspondance entre numérotation des sommets globale et locale



$$i = \text{Numtri}(n, 1) \quad j = \text{Numtri}(n, 2) \quad k = \text{Numtri}(n, 3)$$

- Fonctions de base locales  $\lambda_1 = w_i|_{\mathcal{T}_n}$     $\lambda_2 = w_j|_{\mathcal{T}_n}$     $\lambda_3 = w_k|_{\mathcal{T}_n}$

$$\forall I, J \in \{1, 2, 3\}, \lambda_I(S'_J) = \delta_{IJ}$$



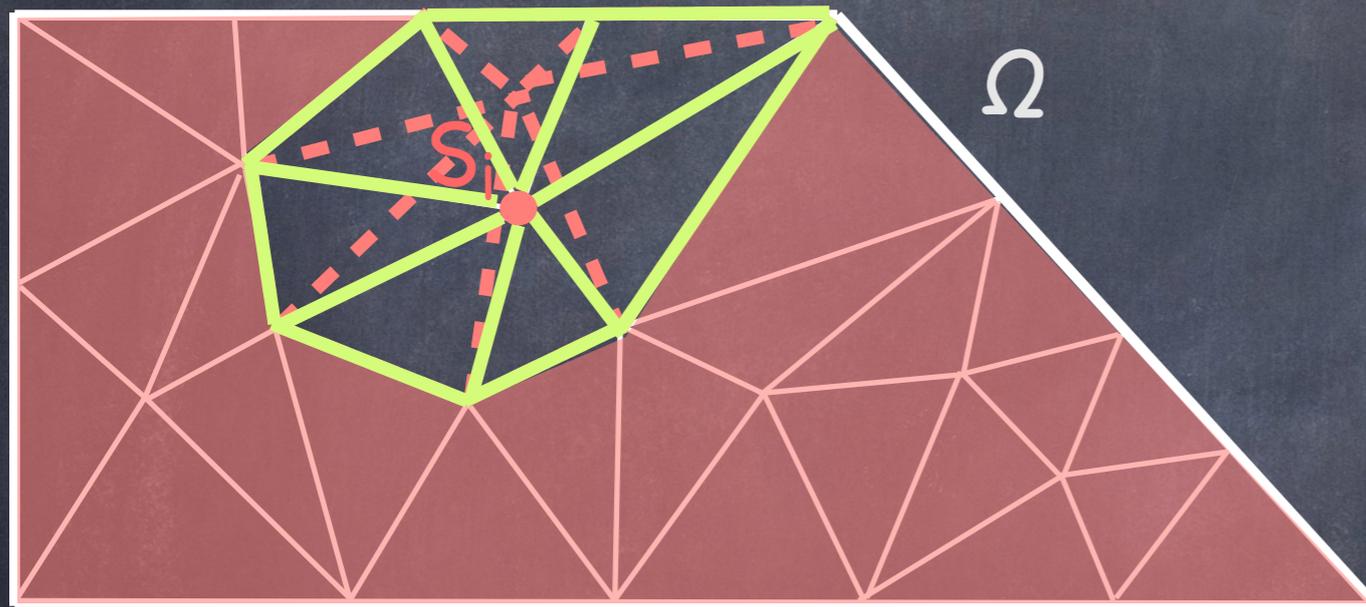
# Éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}^1$

## Résumé

### Définition

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), \quad \forall l \in \{1, \dots, N_{\text{tri}}\}, v_h|_{\mathcal{T}_l} \in \mathbb{P}_1\}$$

où  $\mathbb{P}^1$  est l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 1.



$N_{\text{tri}}$  le nombre de triangles

$N_{\text{som}}$  le nombre de sommets

$$h = \max_l h_l$$

### Propriétés des fonctions de forme

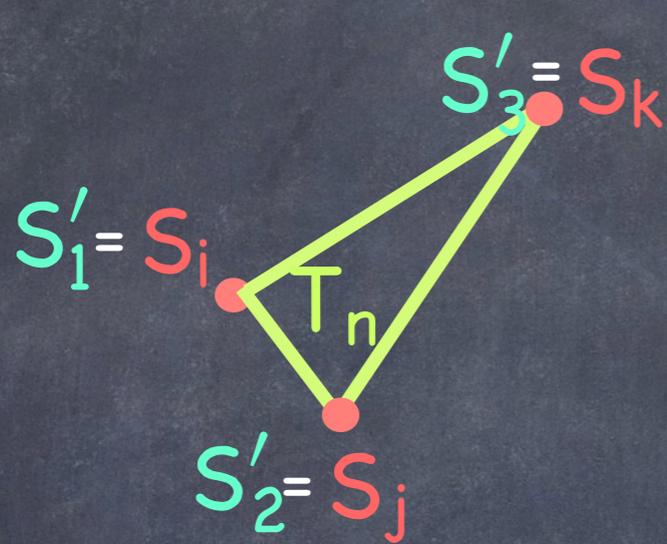
•  $\forall i, j \in \{1, \dots, N_{\text{som}}\}, w_j(S_i) = \delta_{ij}$

• Support  $w_i = \bigcup_{l, S_i \in \mathcal{T}_l} \mathcal{T}_l$

• La restriction de  $w_i$  sur chaque triangle est une coordonnée barycentrique

# Éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}^1$

## Matrices élémentaires



$$M^{\text{elem}} = \begin{bmatrix} \int_{T_n} w_i w_i & \int_{T_n} w_i w_j & \int_{T_n} w_i w_k \\ \int_{T_n} w_j w_i & \int_{T_n} w_j w_j & \int_{T_n} w_j w_k \\ \int_{T_n} w_k w_i & \int_{T_n} w_k w_j & \int_{T_n} w_k w_k \end{bmatrix}$$

$$K^{\text{elem}} = \begin{bmatrix} \int_{T_n} \nabla w_i \cdot \nabla w_i & \int_{T_n} \nabla w_i \cdot \nabla w_j & \int_{T_n} \nabla w_i \cdot \nabla w_k \\ \int_{T_n} \nabla w_j \cdot \nabla w_i & \int_{T_n} \nabla w_j \cdot \nabla w_j & \int_{T_n} \nabla w_j \cdot \nabla w_k \\ \int_{T_n} \nabla w_k \cdot \nabla w_i & \int_{T_n} \nabla w_k \cdot \nabla w_j & \int_{T_n} \nabla w_k \cdot \nabla w_k \end{bmatrix}$$

Trouver l'unique solution  $u_h$  dans  $V_h$  de

$$A U = L$$

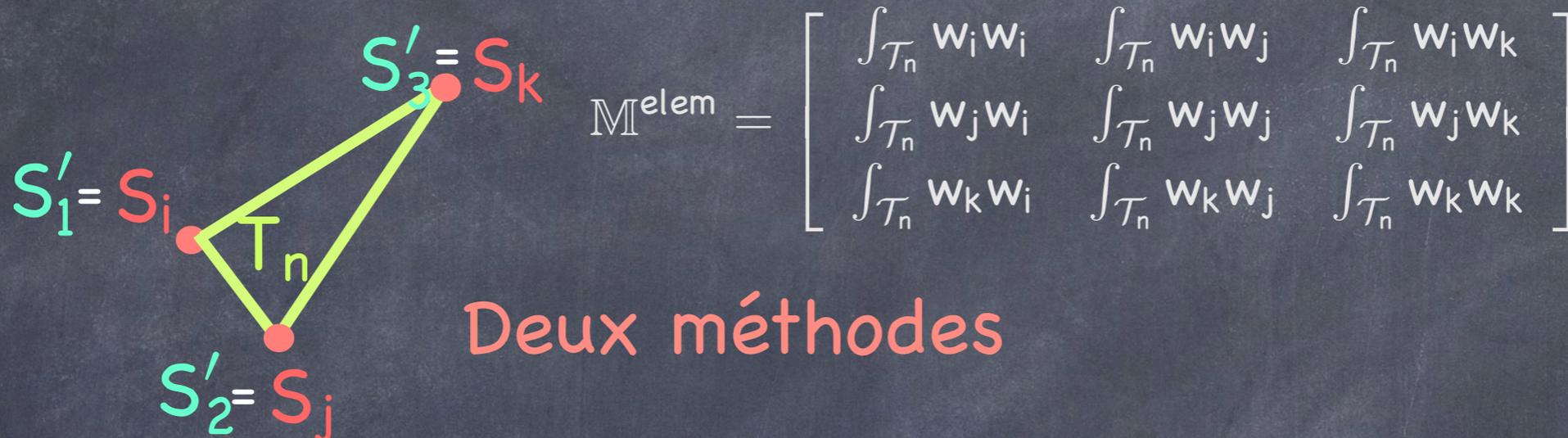
où  $A = K + M$  avec  $K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla w_j \cdot \nabla w_i d\Omega$  et  $M_{ij} = \int_{\Omega} w_j w_i d\Omega$

$$L_i = \ell(w_i) = \int_{\Omega} f w_i d\Omega$$

$U_i = u_i$  où on a décomposé  $u_h = \sum_{j=1}^{n_h} u_j w_j$

# Éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}^1$

## Matrices élémentaires



Deux méthodes

Via les coordonnées barycentriques

$$M^{\text{elem}} = \begin{bmatrix} \int_{T_n} \lambda_1 \lambda_1 & \int_{T_n} \lambda_1 \lambda_2 & \int_{T_n} \lambda_1 \lambda_3 \\ \int_{T_n} \lambda_2 \lambda_1 & \int_{T_n} \lambda_2 \lambda_2 & \int_{T_n} \lambda_2 \lambda_3 \\ \int_{T_n} \lambda_3 \lambda_1 & \int_{T_n} \lambda_3 \lambda_2 & \int_{T_n} \lambda_3 \lambda_3 \end{bmatrix}$$

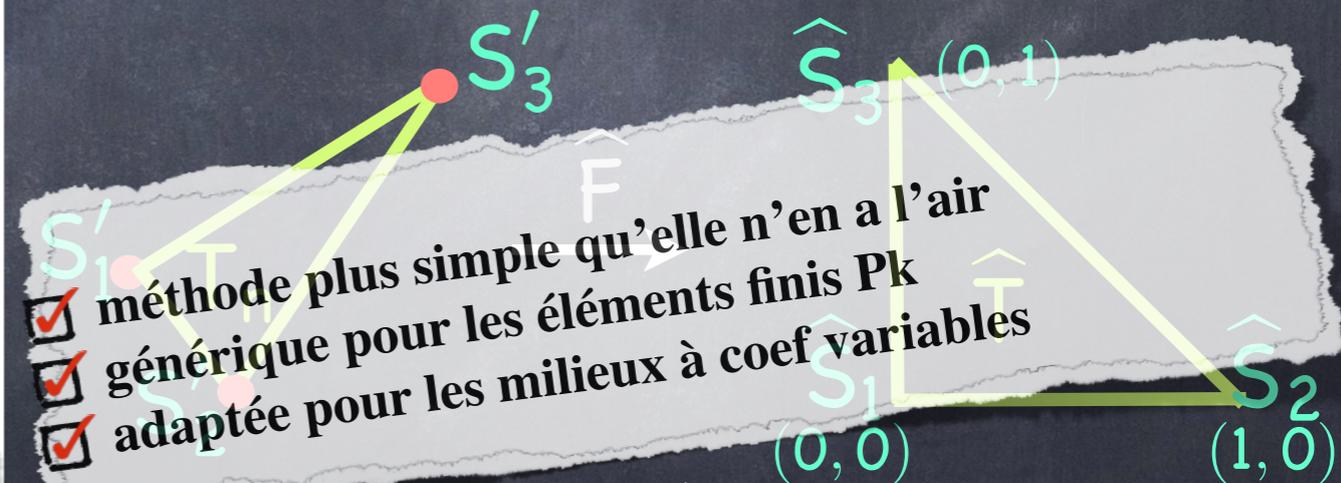
- méthode assez simple
- ne marche que pour les éléments finis  $\mathbb{P}^1$
- moins adaptée pour les milieux à coef variables

$$\lambda_1(x, y) = \frac{(x_2 - x_3)(y - y_3) - (x_2 - x_3)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_3)}{(x_2 - x_3)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_3)}$$

$$\lambda_2(x, y) = \frac{(y_3 - y_1)(x - x_1) - (x_3 - x_1)(y - y_1)}{(x_2 - x_3)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_3)}$$

$$\lambda_3(x, y) = \frac{(y_1 - y_2)(x - x_2) - (x_1 - x_2)(y - y_2)}{(x_2 - x_3)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_3)}$$

Via le passage à l'élément fini de référence



- méthode plus simple qu'elle n'en a l'air
- générique pour les éléments finis  $\mathbb{P}^k$
- adaptée pour les milieux à coef variables

$$w_i|_{T_n} = \lambda_1 \quad \xrightarrow{\hat{F}} \quad \hat{\lambda}_1 : (\hat{x}, \hat{y}) \mapsto 1 - \hat{x} - \hat{y}$$

$$w_j|_{T_n} = \lambda_2 \quad \xrightarrow{\hat{F}} \quad \hat{\lambda}_2 : (\hat{x}, \hat{y}) \mapsto \hat{x}$$

$$w_k|_{T_n} = \lambda_3 \quad \xrightarrow{\hat{F}} \quad \hat{\lambda}_3 : (\hat{x}, \hat{y}) \mapsto \hat{y}$$

$$\int_{T_n} w_i w_j = \int_{\hat{T}} \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 |\mathbf{J}_{\hat{F}}|$$

# Programme de cet amphi...

- Maillage : description et structure
- Elements finis de lagrange  $\mathbb{P}^1$ 
  - Définition et Propriétés
  - Fonctions de base et coordonnées barycentriques
  - Matrice élémentaire
    - Utilisation des coordonnées barycentriques
    - Passage à l'élément fini de référence
- Assemblage et résolution

# Assemblage et résolution

Trouver l'unique solution  $u_h$  dans  $V_h^1 \subset H^1(\Omega)$  de

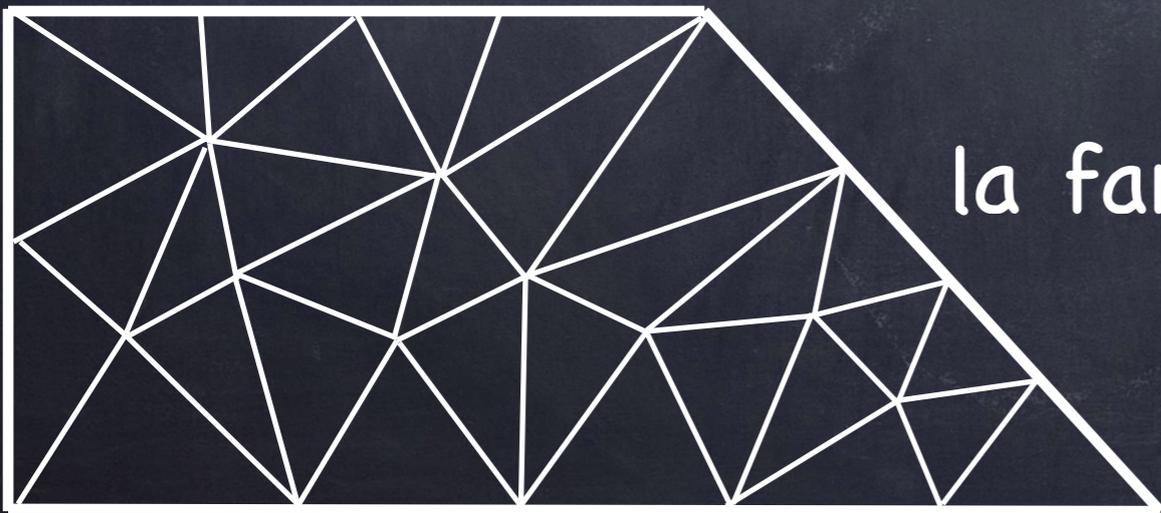
$$A U = L \quad (\mathcal{P}_h)$$

où

$$A = K + M \quad K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla w_j \cdot \nabla w_i \, d\Omega \quad M_{ij} = \int_{\Omega} w_j w_i \, d\Omega$$

$$L_i = \ell(w_i) = \int_{\Omega} f w_i \, d\Omega$$

$$U_i = u_h(S_i) \quad \text{où on a décomposé } u_h = \sum_{i=1}^{N_{\text{som}}} u_h(S_i) w_i$$



la famille  $(w_i)_{i \in \llbracket 1, N_{\text{som}} \rrbracket}$  est une **base** de  $V_h^1$

$$V_h^1 = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), \quad \forall l \in \{1, \dots, N_{\text{tri}}\}, v_h|_{\mathcal{T}_l} \in \mathbb{P}_1\}$$

Calcul des coefficients de la matrice  $M$   $M_{ij} = \int w_i w_j d\Omega$

$\forall i, j \in \llbracket 1, N_{\text{som}} \rrbracket$

Sinon  $M_{ij} = 0$

Assemblage

$M = 0$

Pour  $i=1, N_{\text{som}}$

Pour tout  $j$  tel que  $S_j$  est voisin de  $S_i$

$$M_{ij} = \sum_{l, S_i, S_j \in T_l} \int_{T_l} w_i w_j dx$$

fin

fin

$\Omega$

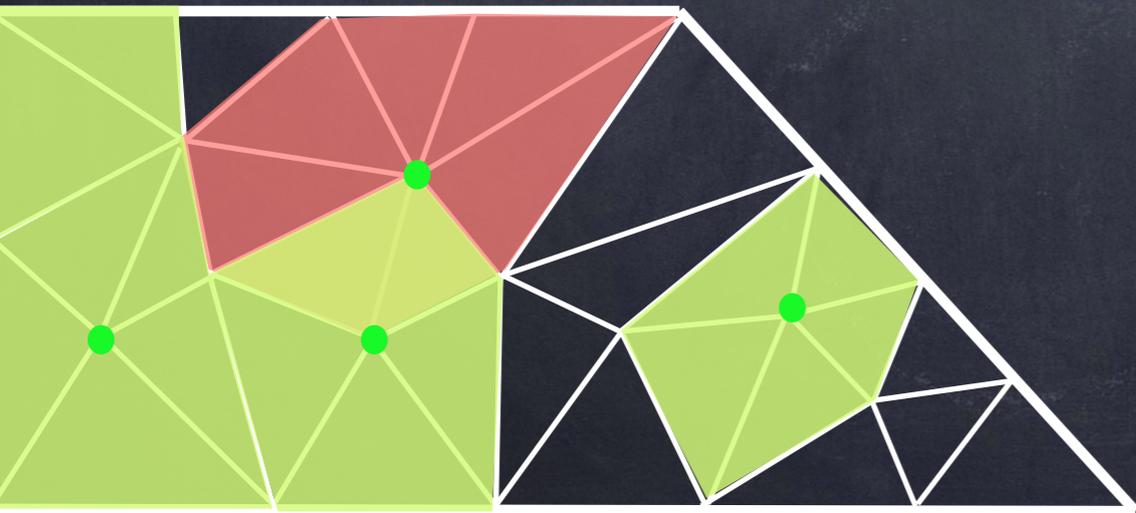


Tableau de coordonnées des sommets

|                      |                      |                      |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| $S_1$                | $x_1$                | $y_1$                |
| $\vdots$             | $\vdots$             | $\vdots$             |
| $S_i$                | $x_i$                | $y_i$                |
| $\vdots$             | $\vdots$             | $\vdots$             |
| $S_{N_{\text{som}}}$ | $x_{N_{\text{som}}}$ | $y_{N_{\text{som}}}$ |

Tableau de composition des triangles

|                      |                  |          |          |
|----------------------|------------------|----------|----------|
| $T_1$                | 1                | 3        | 4        |
| $\vdots$             | $\vdots$         | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $T_n$                | $i$              | $j$      | $k$      |
| $\vdots$             | $\vdots$         | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $T_{N_{\text{tri}}}$ | $N_{\text{som}}$ | $l$      | $m$      |

matrice creuse

$\int w_j d\Omega$

le mas

Comment déterminer les voisins d'un sommet ?

$$M = \begin{bmatrix} j & & & & \\ & * & & & \\ & * & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & \\ & & & & j \end{bmatrix}$$

Calcul des coefficients de la matrice  $M_{ij} = \sum_{l, S_i, S_j \in \mathcal{T}_l} \int_{\mathcal{T}_l} w_i w_j d\Omega$

$M = 0$  (initialisation)

Pour  $l = 1, N_{tri}$  (boucle sur les triangles)

Détermination des coordonnées des sommets du triangle  $l$

Calcul de la matrice élémentaire

$$M^{elem} = \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{T}_n} w_i w_i & \int_{\mathcal{T}_n} w_i w_j & \int_{\mathcal{T}_n} w_i w_k \\ \int_{\mathcal{T}_n} w_j w_i & \int_{\mathcal{T}_n} w_j w_j & \int_{\mathcal{T}_n} w_j w_k \\ \int_{\mathcal{T}_n} w_k w_i & \int_{\mathcal{T}_n} w_k w_j & \int_{\mathcal{T}_n} w_k w_k \end{bmatrix}$$

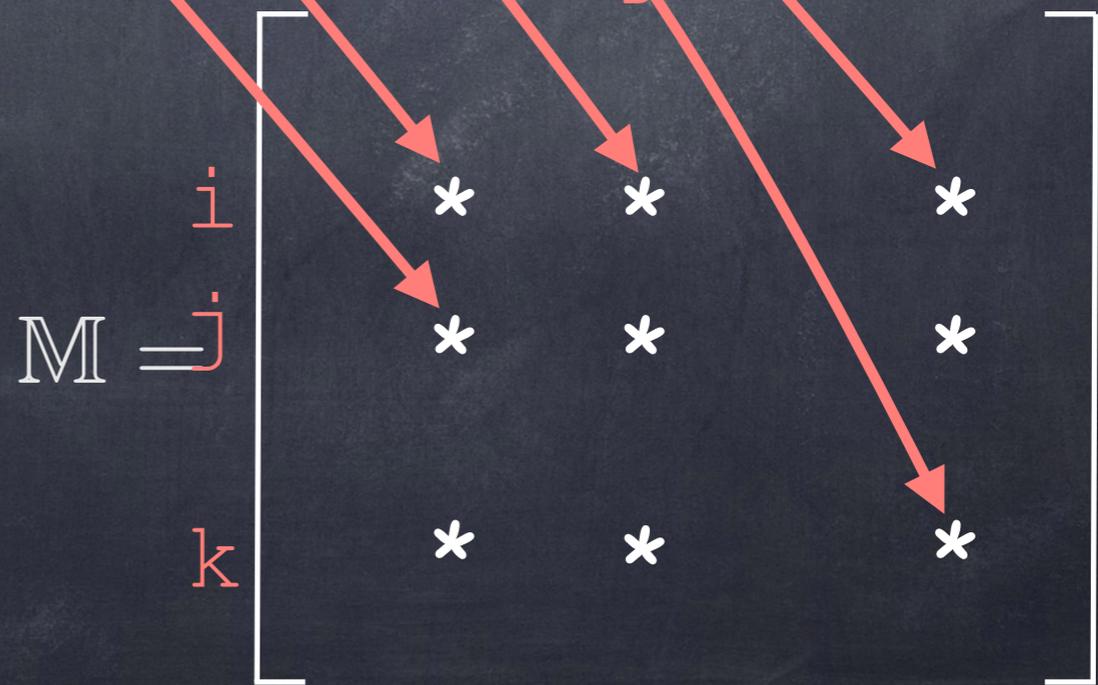
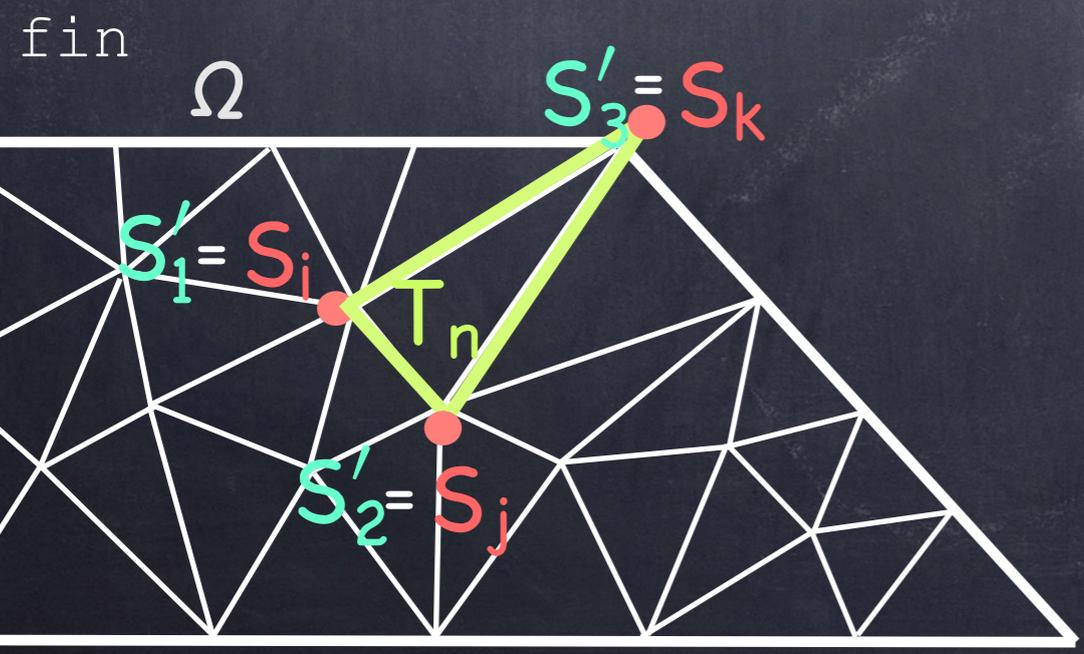
Tableau de composition des triangles

|               |           |          |          |
|---------------|-----------|----------|----------|
| $T_1$         | 1         | 3        | 4        |
| $\vdots$      | $\vdots$  | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $T_n$         | i         | j        | k        |
| $\vdots$      | $\vdots$  | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $T_{N_{tri}}$ | $N_{som}$ | l        | m        |

Ajout des contributions dans la matrice

$i = Numtri(l, 1)$      $j = Numtri(l, 2)$      $k = Numtri(l, 3)$  (numero global)

$M_{ii} = M_{ii} + M_{11}^{elem}$      $M_{ij} = M_{ij} + M_{12}^{elem}$      $M_{ik} = M_{ik} + M_{13}^{elem}$   
 $M_{ji} = M_{ji} + M_{21}^{elem}$      $\dots$      $M_{kk} = M_{kk} + M_{33}^{elem}$  (assemblage)



# Assemblage et résolution

Calcul des coefficients de la matrice  $A = K + M$

Calcul des coefficients du second membre  $L$

$$L_i = \ell(w_i) = \int_{\Omega} f w_i d\Omega$$

• Méthode d'interpolation

Si  $f \in C^0(\bar{\Omega})$  on l'approche par son interpolée  $\pi_h f = \sum_{j=1}^{N_{\text{som}}} f(S_j) w_j$

$$L_i \approx \int_{\Omega} \pi_h f w_i d\Omega = \sum_{j=1}^{N_{\text{som}}} f(S_j) \int_{\Omega} w_j w_i d\Omega$$

$$= (M F)_i \quad \text{où } F_i = f(S_i)$$

On admettra que l'approximation EF n'est pas altérée par ces approximations du second membre. plus de détails dans l'amphi 6

# Assemblage et résolution

Calcul des coefficients de la matrice  $A = K + M$

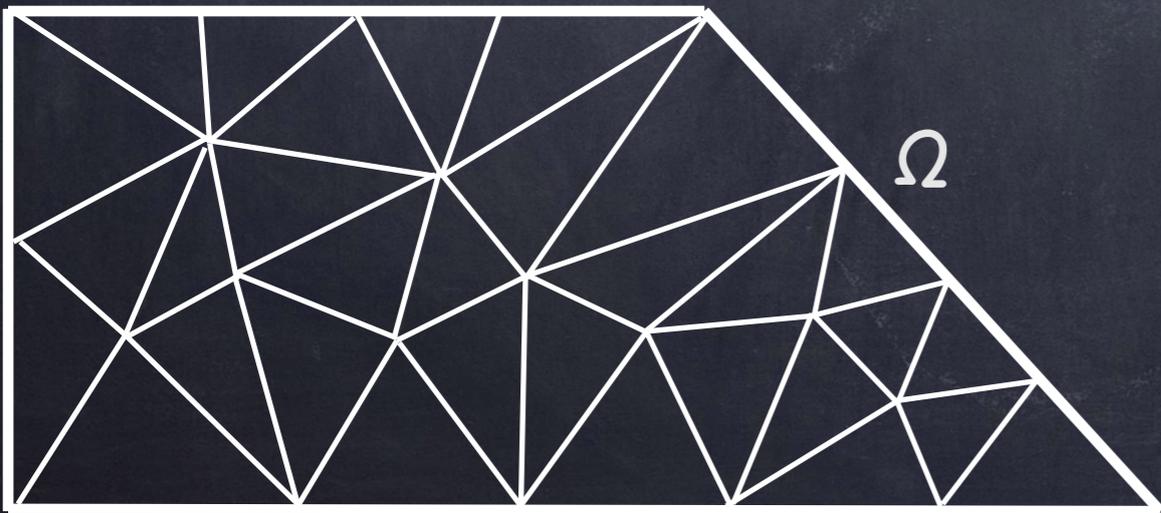
Calcul des coefficients du second membre  $L$

Calcul de l'unique solution  $U \in \mathbb{R}^{N_{\text{som}}}$  de

$$A U = L \quad (\mathcal{P}_h)$$

où

|                        |                    |
|------------------------|--------------------|
| $A_{ij} = a(w_j, w_i)$ | ( est inversible ) |
| $L_i = l(w_i)$         |                    |
| $U_i = u_h(S_i)$       |                    |



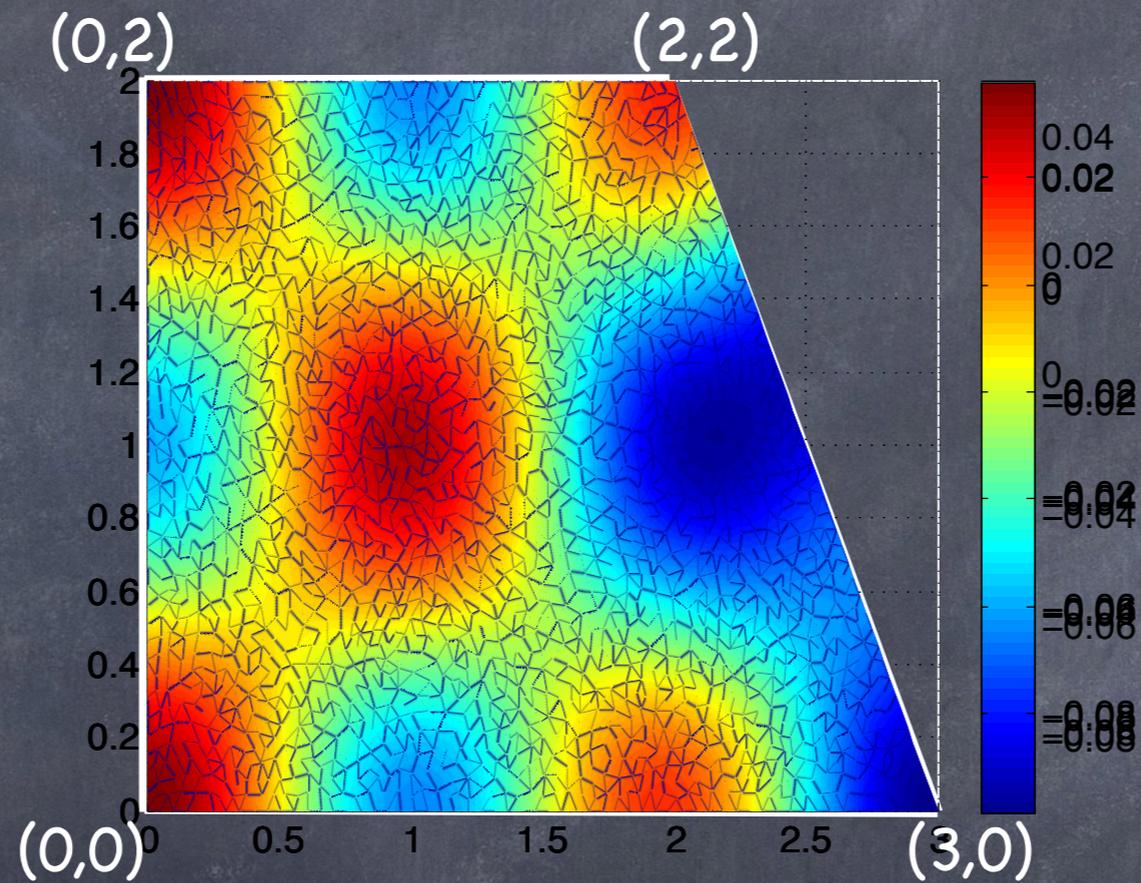
Convergence de l'approximation

voir amphi 6

# Assemblage et résolution

Résultats numériques

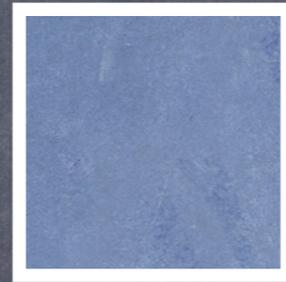
$$f(x, y) = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$$



$h=0.0015$

# Programme du TP1

- Résolution du problème de Neumann dans 1 géométrie simple

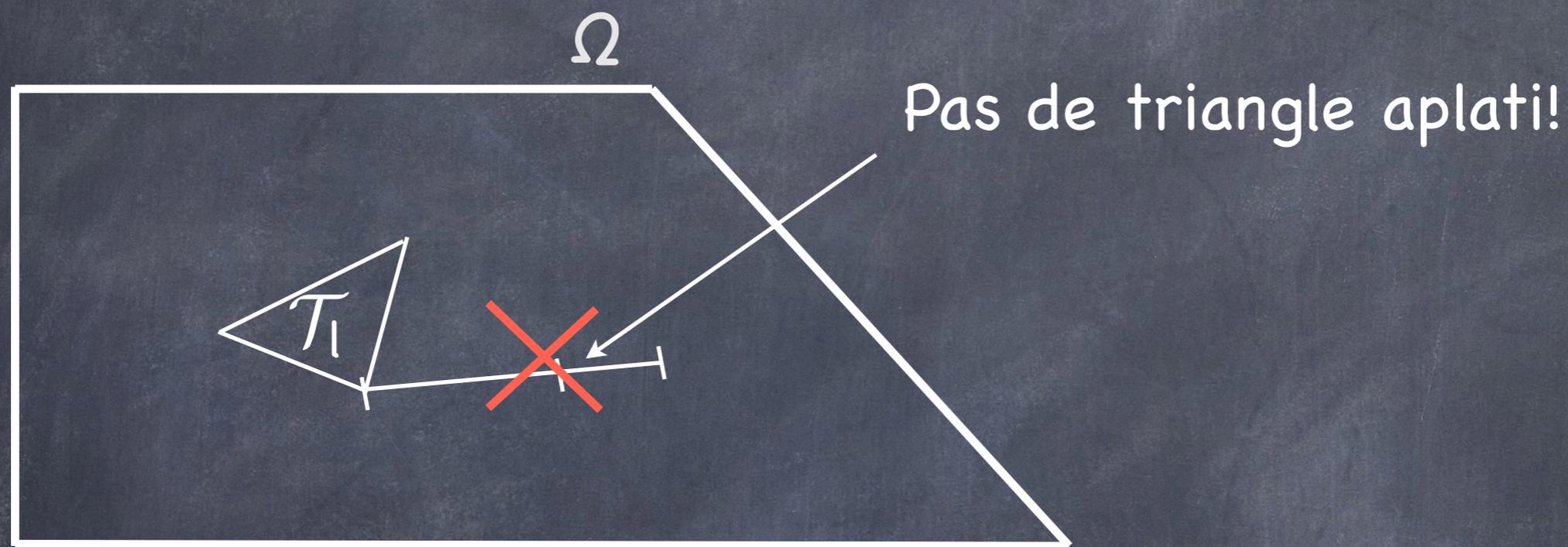


- Travail seul ou en binôme
- Prenez des initiatives!!!

On vous demande de rendre un compte rendu de TP pour le 21/10 à vos chargés de Td. Il comptera comme bonus sur la note de TP. Il sera corrigé, commenté et rendu le 28/10.

# Maillage : description et structure

Explications des hypothèses



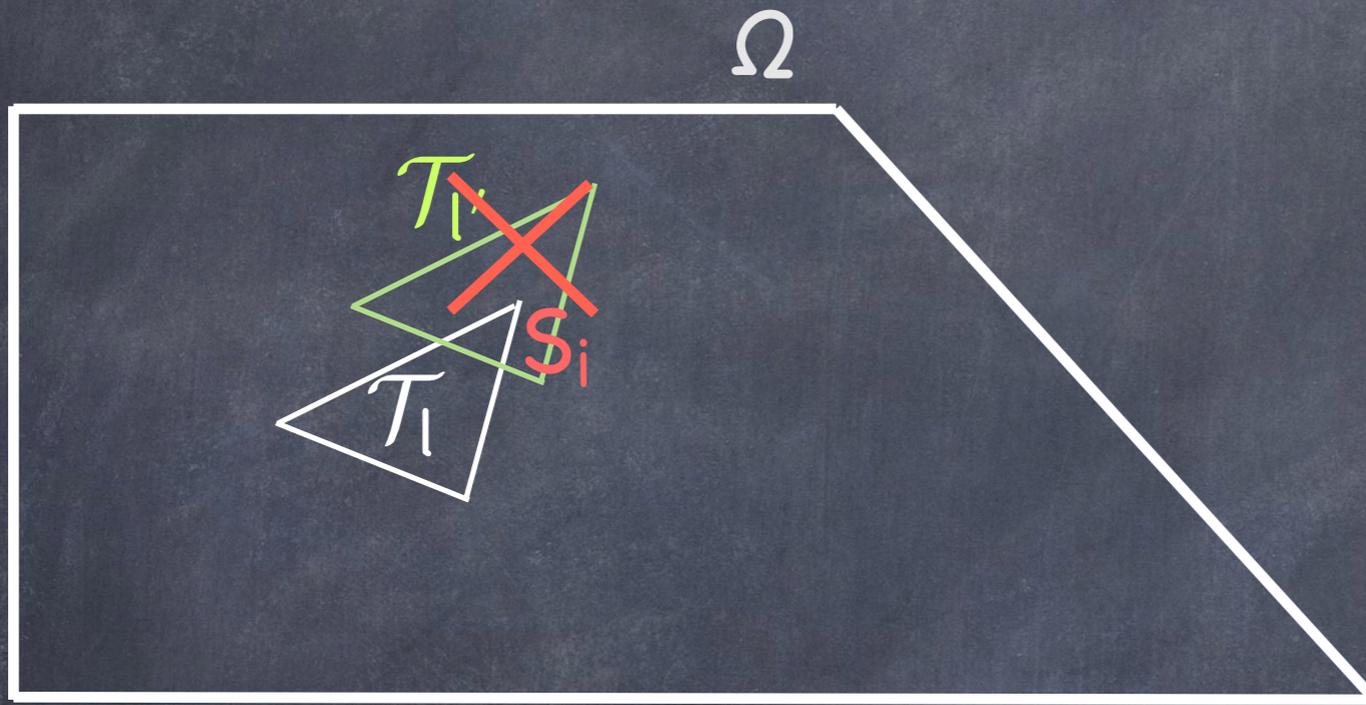
- Tout triangle  $\mathcal{T}_1$  est d'intérieur non vide ( $\overset{\circ}{\mathcal{T}}_1 \neq \emptyset$ )

Il faut la valeur de  $v_h$  en 3 points non alignés pour définir  $v_h|_{\mathcal{T}_1} \in \mathbb{P}_1$

Si  $\mathcal{T}_1$  est aplati, les 3 points sont nécessairement alignés.

# Maillage : description et structure

Explications des hypothèses



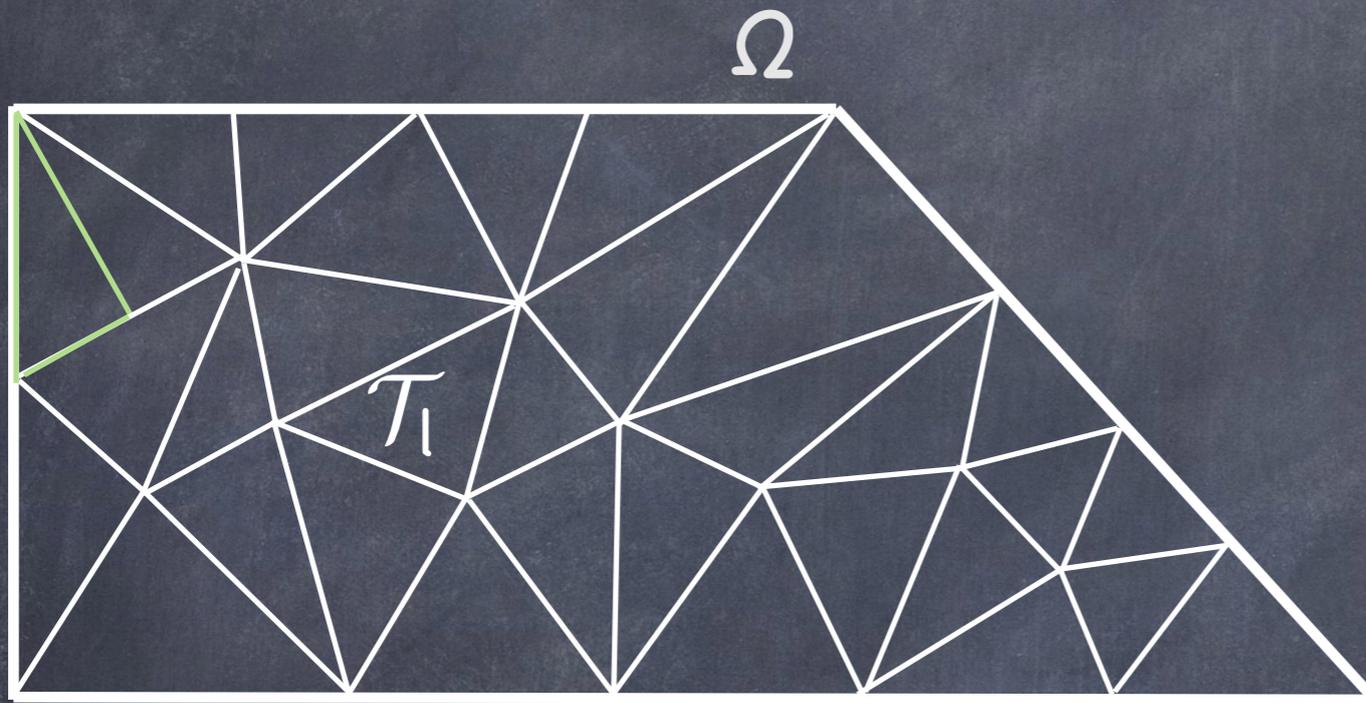
•  $\overset{\circ}{T}_l \cap \overset{\circ}{T}_{l'} = \emptyset$  si  $l \neq l'$

Si  $\exists l \neq l', \overset{\circ}{T}_l \cap \overset{\circ}{T}_{l'} \neq \emptyset$ , la donnée de  $v_h|_{\overset{\circ}{T}_l \cap \overset{\circ}{T}_{l'}}$  définit entièrement la valeur de  $v_h$  sur  $T_l \cup T_{l'}$  par prolongement, or on a 6 données.

Par exemple, on ne pourrait pas définir la fonction de base  $w_i$ .

# Maillage : description et structure

Explications des hypothèses

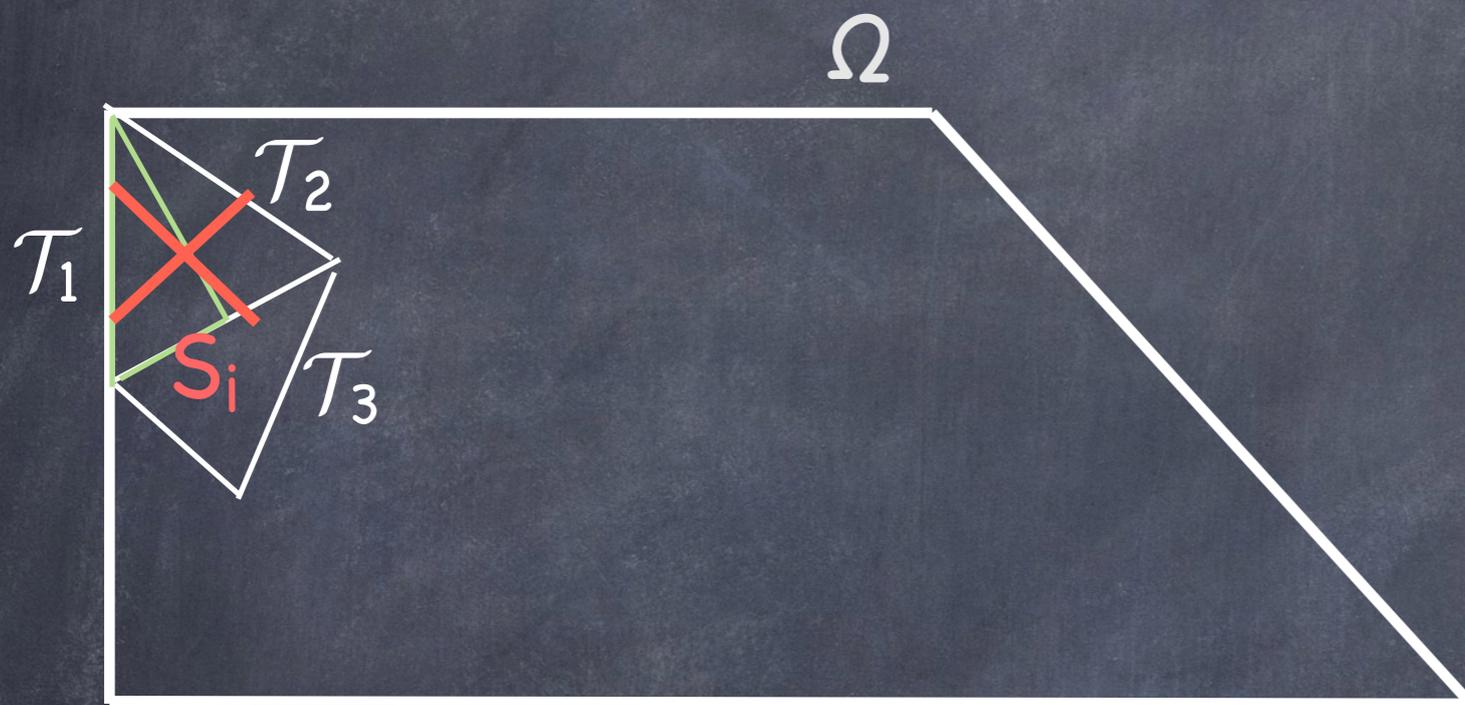


$$\bullet \bigcup_I \mathcal{T}_I = \overline{\Omega}$$

Toute fonction de  $V_h$  définie triangle par triangle est bien définie sur tout le domaine  $\Omega$ .

# Maillage : description et structure

## Explications des hypothèses



- Toute arête d'un triangle est soit une arête d'un autre triangle, soit une arête portée par la frontière

Sinon, il n'y a aucun problème pour définir  $v_h|_{\mathcal{T}_1}$  et  $v_h|_{\mathcal{T}_2}$  **mais** on a 4 données pour définir  $v_h|_{\mathcal{T}_3}$ .

Par exemple, on ne pourrait pas définir la fonction de base  $w_i$ .