Cours APM_4ANN1_TA : Introduction à la méthode des éléments finis

Sonia Fliss (bureau 2.2.30)

Chargés de TDs : Sarah Al Humaikani (UMA), Eliane Bécache (Inria, UMA), Marcella Bonazzoli (Inria, UMA), Xavier Claeys (UMA), Philip Edel (CEA), Benjamin Graille (Univ. Orsay), Sonia Fliss (UMA), Morgane Mathevet (UMA), Aurélien Parigaux (UMA), Nicole Spillane (CNRS, CMAP)

Déroulement du cours : 7 séances de 3h15

- 6 cours magistraux de 1h15 (transparents disponibles sur mon site web le vendredi avant la séance) de 8h30 à 09h45.

- 3TDs de 2h (de 10h à 12h). Corrigés disponibles sur mon site web.
- Un premier TP (le 14/10 de 10h à 12h) à faire en binôme, rapport à rendre la semaine suivante. Pas de mélange entre les groupes
- TD de 2h (de 10h à 12h)
- Un deuxième TP (le 4/11 de 10h à 12h) à faire en binôme, rapport à rendre le 18 novembre 2024. Pas de mélange entre les groupes TP Noté (50% note finale)
- Examen le 14/11 de 2h suivi d'un cours d'ouverture d'1h.

<table>
<tr><td></td><td>23/09</td><td>30/09</td><td>07/10</td><td>14/10</td><td>21/10</td><td>4/11</td><td>14/11</td></tr>
<tr><td>1h15</td><td colspan="6">Cours</td><td>Exam</td></tr>
<tr><td>2h</td><td colspan="3">TDs</td><td>TP</td><td>TD</td><td>TP</td><td>Cours</td></tr>
</table>

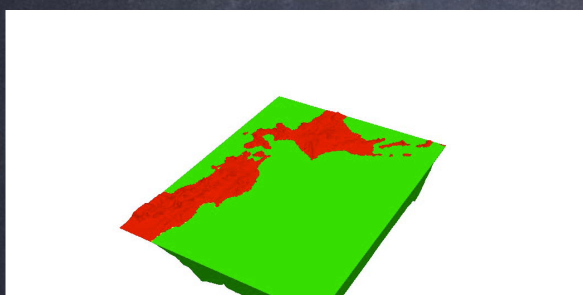
But du cours ANN1

Introduction au calcul scientifique avec l'accent mis sur la méthode des éléments finis

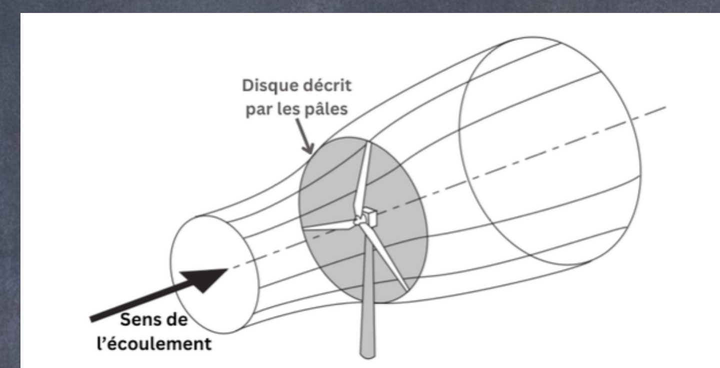
Objectifs du calcul scientifique :

Prévoir pour l'environnement, la sureté nucléaire, la santé,…

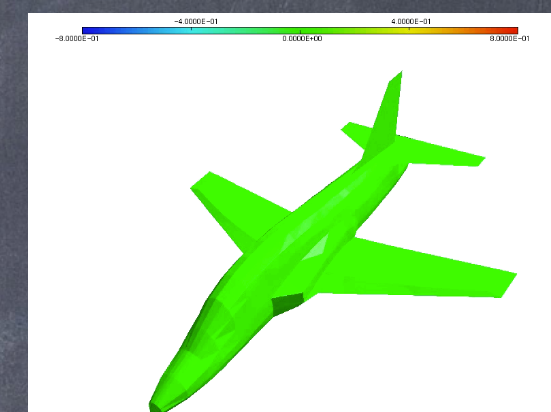
Concevoir (des antennes, avions, automobiles,…)



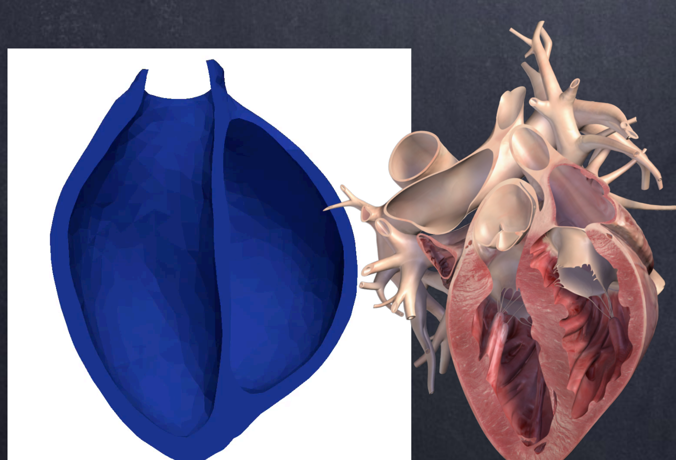
Propagation d'un tsunami



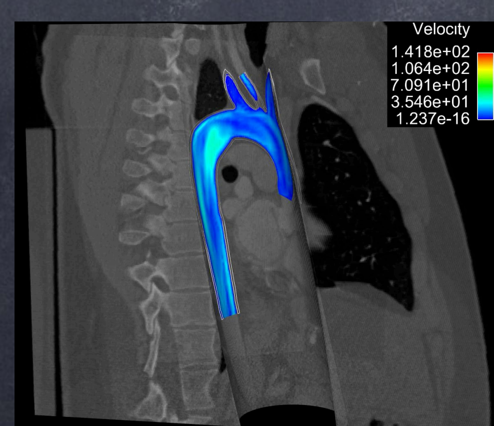
Modélisation d'une éolienne
(Baptiste Martel, PRE 2024)



Propagation d'une onde électromagnétique à l'extérieur d'un avion (Marc Duruflé, INRIA)



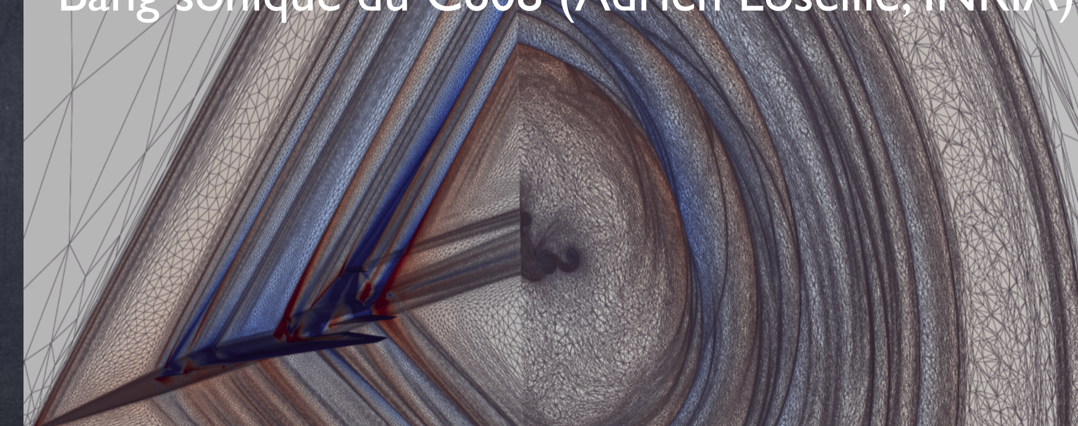
Battement cardiaque



Aorte ascendante

(Philippe Moireau, INRIA)

Bang sonique du C608 (Adrien Loseille, INRIA)

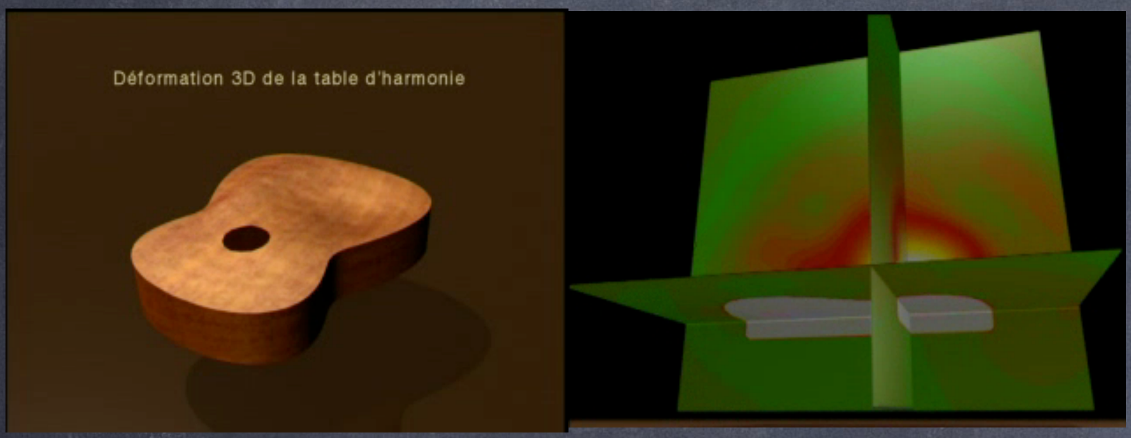


But du cours ANN201

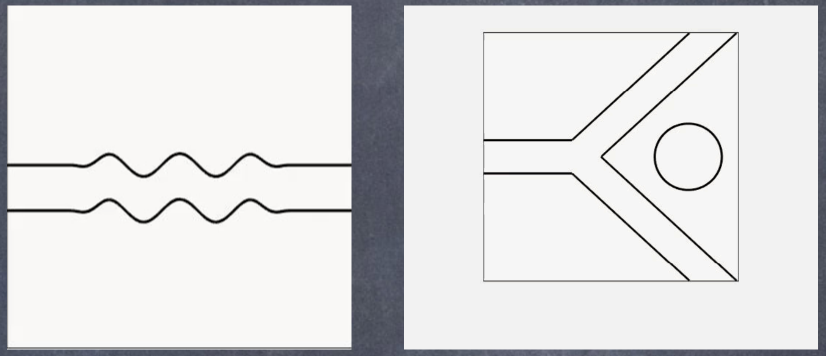
Introduction au calcul scientifique avec l'accent mis sur la méthode des éléments finis

Objectifs du calcul scientifique :

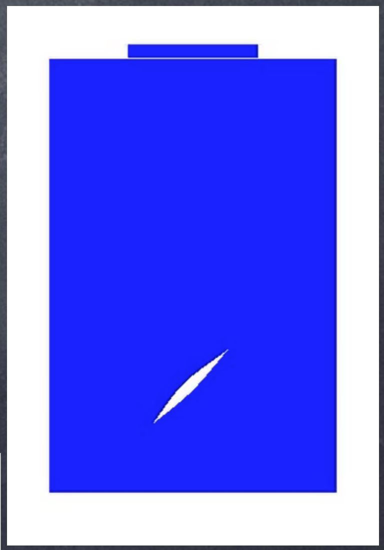
Comprendre



Modélisation d'une guitare (Grégoire Derveaux)



Etude des propriétés de Structures optiques
(Luiz Faria, INRIA, UMA)



Diffraction d'une onde élastique
par une fissure (Sébastien Imperiale, INRIA, CEA)

Ce cours est un cours d'introduction (on va se concentrer sur les problèmes modèles plus simples et je reviendrai sur ces exemples dans le cours d'ouverture), pour aller plus loin, il faudra suivre
ANN2, SIM3, ANA2 et/ou MF6 puis le parcours de 3A "Modélisation et Simulation"

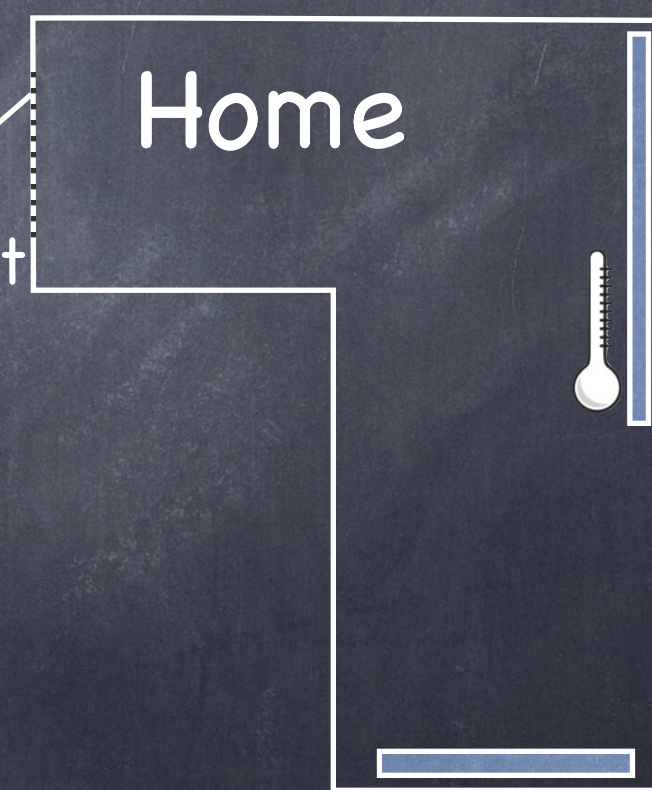
Quelques exemples de modèles

Conduction de la chaleur

- Equations volumiques dans le domaine

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial T}{\partial t} + \mathrm{div}\, \vec{j}_T = \theta & \text{Loi de conservation} \\ \vec{j}_T = -\lambda \vec{\nabla} T & \text{Loi de comportement} \end{cases}$$

- Conditions aux limites
    - Flux imposé (radiateur):
    - Température fixée (fenêtre ouverte):
    - Flux contrôlé (climatiseur régulé):



- une condition initiale...

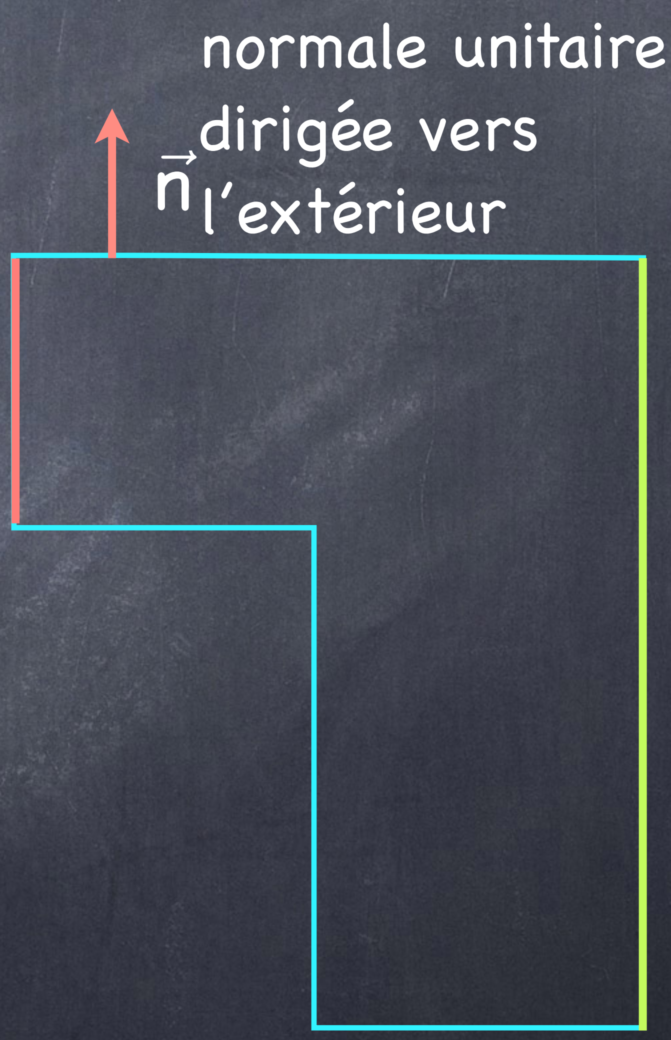
Rappel : $\mathrm{div}\vec{U} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial U_i}{\partial x_i}$ $\quad \vec{\nabla} v = (\dfrac{\partial v}{\partial x_1}, \dfrac{\partial v}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial v}{\partial x_n})$

Quelques exemples de modèles

Conduction de la chaleur

- Problème stationnaire correspondant $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$

$$\begin{cases} -\Delta T = f & \text{dans } \Omega \\ T = T_{out} & \text{sur } \Gamma_D \quad \text{Conditions de Dirichlet} \\ \nabla T \cdot n = g/\lambda & \text{sur } \Gamma_N \quad \text{Conditions de Neumann} \\ \lambda \nabla T \cdot n + \alpha T = \ell & \text{sur } \Gamma_R \quad \text{Conditions de Fourier} \end{cases}$$



Notation : $\vec{\nabla} u \cdot \vec{n} \equiv \dfrac{\partial u}{\partial n}$

Rappel : $\Delta v = \mathrm{div} \vec{\nabla} v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$

Quelques exemples de modèles

Ondes et vibrations

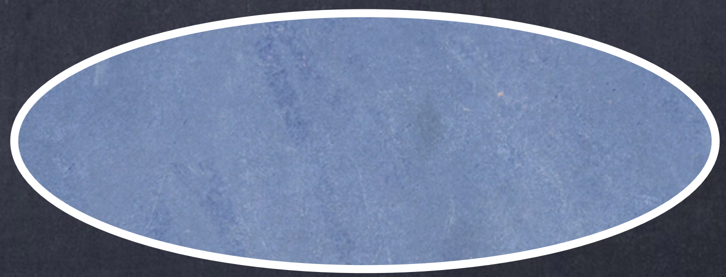
- Equations volumiques dans le domaine

$$\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T \triangle u = f \qquad \text{dans } \Omega, \ \forall t > 0$$

densité de la membrane

tension de la membrane

source
(si la membrane est frappée)



u le déplacement latéral de la membrane

Quelques exemples de modèles

Ondes et vibrations

- Equations volumiques dans le domaine

$$\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T \triangle u = f \qquad \text{dans } \Omega, \forall t > 0$$

- Conditions aux limites

si la membrane est fixée... $\quad u = 0 \quad$ sur Γ_D, $\forall t > 0$

CL de type surface libre $\quad \nabla u \cdot n = 0 \quad$ sur Γ_N, $\forall t > 0$

CL de type élastique $\quad \nabla u \cdot n + \lambda u = 0 \quad$ sur Γ_R, $\forall t > 0$

- deux conditions initiales...

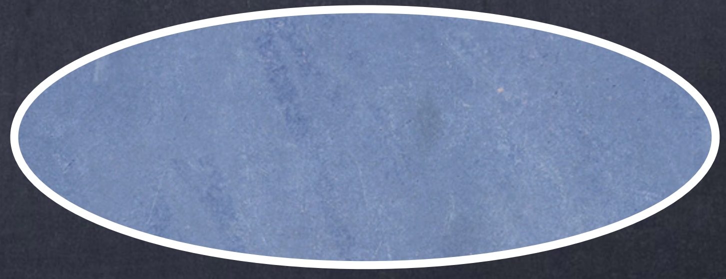
u le déplacement latéral de la membrane

Quelques exemples de modèles

Ondes et vibrations

- Problème stationnaire correspondant $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$

$$\begin{cases} -T\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D & \text{Conditions de Dirichlet} \\ \nabla u \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N & \text{Conditions de Neumann} \\ \nabla u \cdot n + \lambda u = 0 \text{ sur } \Gamma_R & \text{Conditions de Fourier} \end{cases}$$



u le déplacement latéral de la membrane

Quelques exemples de modèles

Problème issu de la neutronique

- En tout point du volume

$$\begin{cases} \mathrm{div}\, \vec{j}_c + \Sigma \phi = f \\ \nabla \phi + \dfrac{1}{D} \vec{j}_c = 0 \end{cases} \Rightarrow -\Delta \phi + \alpha \phi = f$$

où ϕ flux neutronique (densité de neutron par section efficace)

Σ section efficace (1/libre parcours moyen)

$\vec{j}_c$ vecteur courant

D Coefficient de diffusion

- Conditions aux limites
  - Cuve étanche $\phi = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega$
  - Ou pas complètement

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \beta \phi, \quad \text{sur } \partial\Omega$$

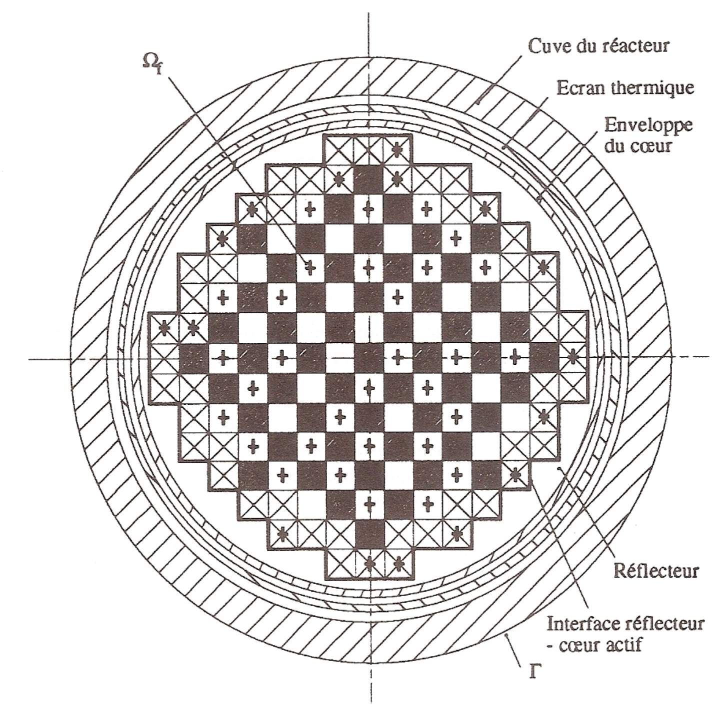


Fig. 2.1.- Configuration d'un cœur de réacteur PWR.

Quelques exemples de modèles

Diffusion de nutriments dans un milieu cellulaire

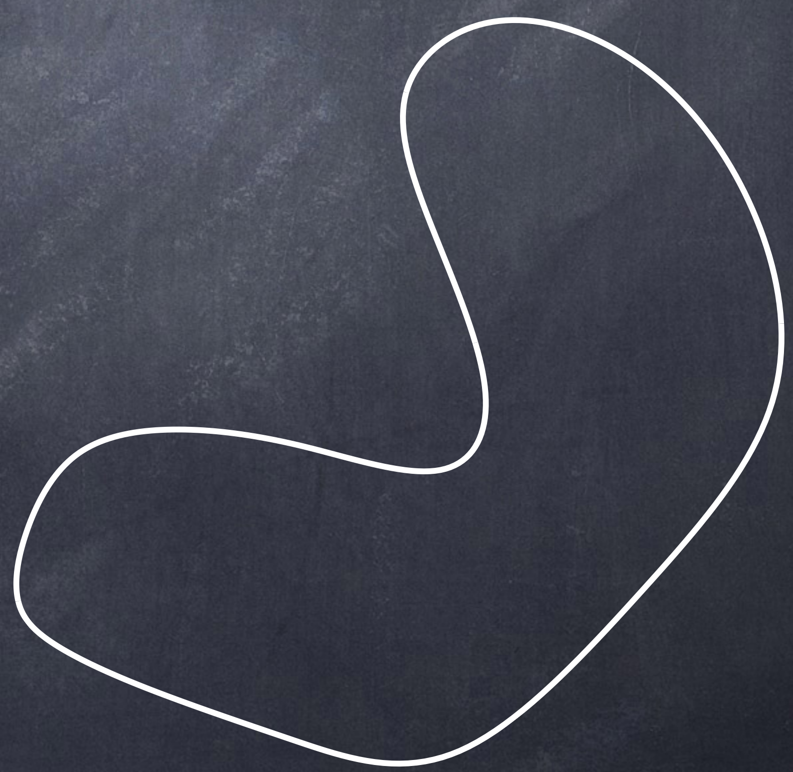
- Loi de Fick

$$\vec{j}_f = -\lambda \vec{\nabla} c$$

- loi de conservation avec absorption

$$\operatorname{div} \vec{j}_f + \alpha c = Q$$

$$\Rightarrow \qquad -\operatorname{div} \lambda \vec{\nabla} c + \alpha c = Q$$



Quelques exemples de modèles

- Un domaine/une géométrie
- Une équation volumique posée dans Ω (indépendante du temps)

$$-\triangle u = f \qquad\qquad -\triangle u + u = f$$

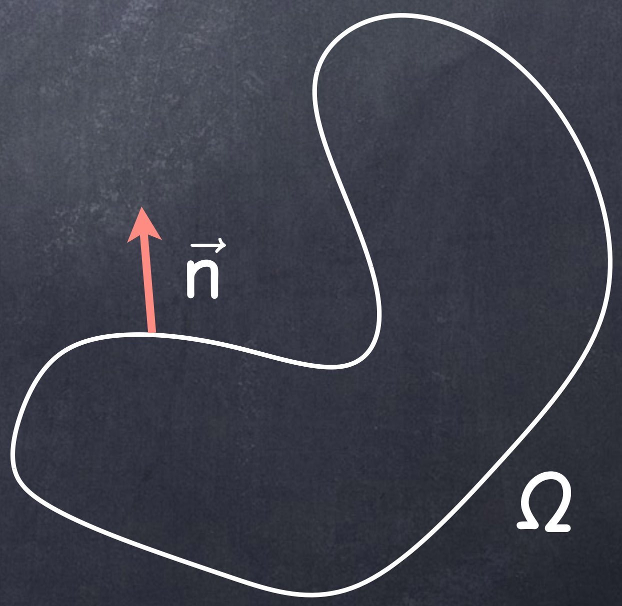
$$-\mathrm{div}\, k\, \vec{\nabla} u = f \qquad\qquad -\mathrm{div}\, k\, \vec{\nabla} u + u = f$$

- Des conditions aux limites posées sur le bord $\partial\Omega$ (ou une partie du bord)

(Dirichlet) $\quad u = g_D$

(Neumann) $\quad \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} = g_N$

(Fourier) $\quad \lambda u + \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} = g_F$



But du cours ANN201

Exemple : Trouver $u \in ???$ (avec f et g données)

$$\begin{cases} -\triangle u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Amphi 1+TD1

$$\Downarrow \qquad\qquad \Uparrow$$

Amphi 2 + TD2

Trouver $u \in ???$

$$\forall v \in ??? \qquad \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u \, v \, d\Omega = \int_\Omega f \, v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g \, v \, d\Gamma$$

- Prouver que le modèle est bien posé **Amphi 3 + Td3**
- Choisir une méthode d'approximation ou de discrétisation **Amphi 4**
- Construire le problème discrétisé **Amphi 5**
- Evaluer a priori la qualité de la solution approchée (précision de la méthode et erreur commise par rapport à la solution exacte) **Amphi 6**
- Résoudre le problème discrétisé et valider les résultats **TPs**
- Extensions à des cas plus complexes **Amphi 7**

Introduction à la méthode des éléments finis

Outils mathématiques

1. Formules de Green pour les fonctions régulières

2. Espaces de Sobolev, dérivation au sens faible

3. Théorèmes de trace

4. Retour sur les formules de Green

Le domaine physique Ω

Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière.

Définition $\partial\Omega$ suffisamment régulière si en tout point de $\partial\Omega$

- Ω est localement d'un seul côté de la frontière $\partial\Omega$
- On peut localement cartographier la frontière par une application lipschitzienne

Exemples de domaines d'étude:

Exemples de domaines exclus:

Domaines fissurés

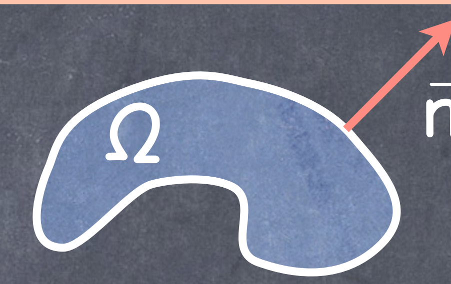
Domaines avec un point de rebroussement

Rappel: $f : X \to Y$ lipschitzienne $\Leftrightarrow$ $\exists \eta > 0,\ \forall x, x' \in X,\ \|f(x) - f(x')\|_Y \leq \eta \|x - x'\|_X$

Formules de Green

Théorème

$w \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ ($w(x_1, \dots, x_n)$)



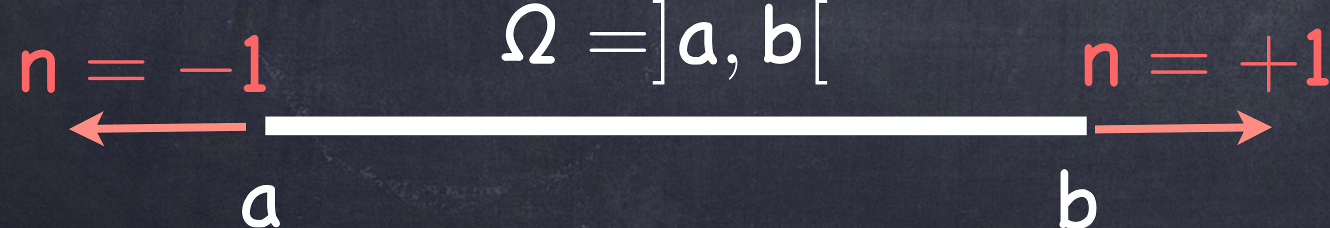
$\vec{n}$ normale unitaire dirigée vers l'extérieur

(G0) $$\underbrace{\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i}\, d\Omega}_{\text{intégrale volumique}} = \underbrace{\int_{\partial\Omega} w\, n_i\, d\Gamma}_{\text{intégrale surfacique}} \qquad 1 \le i \le n$$

Théorème admis (la preuve a été faite en Ma102)

Formule de Green en 1D = Formule d'intégration par parties.

$$w \in \mathcal{C}^\infty([a,b]), \qquad \int_a^b \frac{dw}{dx}\, dx = w(b) - w(a)$$

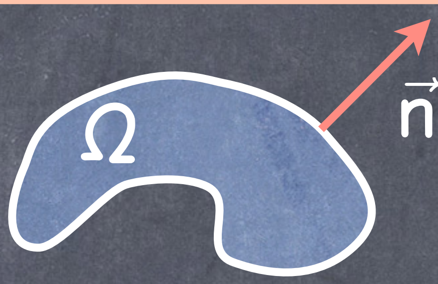


$\partial\Omega = \{a, b\}$

Formules de Green

Théorème

$w \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ ($w(x_1, \ldots, x_n)$)



(G0) $$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} w \, n_i \, d\Gamma \qquad 1 \le i \le n$$

Corollaire 1

$u, v \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$

(G1) $$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} u \, v \, n_i \, d\Gamma \qquad 1 \le i \le n$$

Preuve : il suffit de choisir $w = uv$

Formules de Green

Théorème

$w \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ ($w(x_1, \ldots, x_n)$)

$\vec{n}$ normale unitaire dirigée vers l'extérieur

(G0) $$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} w \, n_i \, d\Gamma \qquad 1 \leq i \leq n$$

Corollaire 1

$u, v \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$

(G1) $$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} u \, v \, n_i \, d\Gamma \qquad 1 \leq i \leq n$$

Corollaire 1bis

$\vec{U} \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})^n, \; v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$

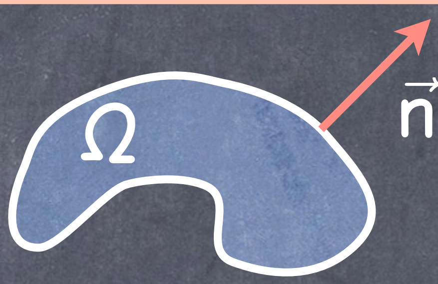
$$\int_\Omega \left(\mathrm{div}\vec{U} \, v + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} v \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} v \, \vec{U} \cdot \vec{n} \, d\Gamma$$

Rappel : $\quad \mathrm{div}\vec{U} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \qquad \vec{\nabla} v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x_n}\right)$

Preuve : voir l'exercice 1 du TD1

Formules de Green

Théorème



$\vec{n}$ normale unitaire dirigée vers l'extérieur

$w \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ ($w(x_1, \ldots, x_n)$)

(G0) $$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} w \, n_i \, d\Gamma \qquad 1 \leq i \leq n$$

Corollaire 2

$u, v \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, n_i \, d\Gamma \qquad 1 \leq i \leq n$$

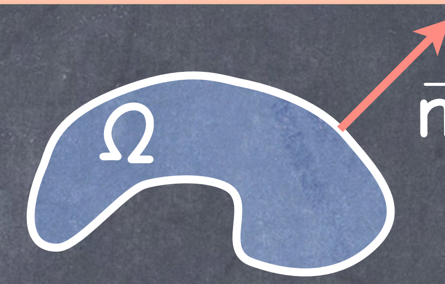
Preuve : il suffit de choisir $w = \frac{\partial u}{\partial x_i} v$

Remarque : cette formule de Green est valide aussi pour $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}), \; v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$

Formules de Green

Théorème

$w \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \ (\ w(x_1, \ldots, x_n) \ )$



$\vec{n}$ normale unitaire dirigée vers l'extérieur

$$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} w \, n_i \, d\Gamma \qquad 1 \leq i \leq n$$

Corollaire 2

$u, v \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, n_i \, d\Gamma \qquad 1 \leq i \leq n$$

Corollaire 2bis

$u, v \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$

$$\text{(G2)} \qquad \int_\Omega \left(\triangle u \, v + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} \, v \, d\Gamma$$

Rappel : $\triangle u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ Notation : $\vec{\nabla} u \cdot \vec{n} \equiv \frac{\partial u}{\partial n}$

Preuve : il suffit de faire une somme sur i des expressions du Corollaire 2

Des formules de Green aux formulations variationnelles

Application : On peut construire une formulation variationnelle (ou Principe des travaux virtuels en Mécanique)

Exemple : Trouver $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$

$$\begin{cases} -\triangle u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $f \in C^0(\overline{\Omega})$ et $g \in C^0(\partial\Omega)$

On multiplie la 1ère équation par une fonction test $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ et on intègre sur Ω

$$-\int_\Omega \triangle u\, v\, d\Omega + \int_\Omega u\, v\, d\Omega = \int_\Omega f\, v\, d\Omega$$

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v\, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}\, v\, d\Gamma + \int_\Omega u\, v\, d\Omega = \int_\Omega f\, v\, d\Omega$$ d'après (G2)

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v\, d\Omega + \int_\Omega u\, v\, d\Omega = \int_\Omega f\, v\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g\, v\, d\Gamma$$ (d'après la 2ème équation)

Des formules de Green aux formulations variationnelles

Application : On peut construire une formulation variationnelle (ou Principe des travaux virtuels en Mécanique)

Exemple : Trouver $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$

$$\begin{cases} -\triangle u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $f \in C^0(\overline{\Omega})$ et $g \in C^0(\partial\Omega)$

$$\Downarrow$$

Trouver $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$

$$\forall v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \qquad \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u \, v \, d\Omega = \int_\Omega f \, v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g \, v \, d\Gamma$$

On peut montrer que le problème de départ et la formulation variationnelle sont équivalents si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$.

Des formules de Green aux formulations variationnelles

Application : On peut construire une formulation variationnelle (ou Principe des travaux virtuels en Mécanique)

Exemple : Trouver $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$

$$\forall v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \qquad \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u\, v \, d\Omega = \int_\Omega f\, v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g\, v \, d\Gamma$$

Pourquoi avoir introduit une formulation variationnelle (FV) ?

- Elle permet d'évaluer des intégrales plutôt que des dérivées en tout point.
- On a réduit l'ordre de dérivation sur l'inconnue en augmentant celle sur une fonction test.

  Cela engendre une certaine "symétrie" entre inconnue et fonctions test.
- Elle a un lien avec l' « énergie" du problème.

  Le lien sera montré plus tard dans ce cours.
- La méthode des éléments finis se base sur la formulation variationnelle.

Des formules de Green aux formulations variationnelles

Exemple : Trouver $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$

$$\forall v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \quad \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u \, v \, d\Omega = \int_\Omega f \, v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g \, v \, d\Gamma$$

Le problème est-il bien posé?

Unicité? Si u_1 et u_2 sont solutions alors

$$\forall v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \int_\Omega \vec{\nabla}(u_1 - u_2) \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega (u_1 - u_2) \, v \, d\Omega = 0$$

En particulier pour $v = u_1 - u_2 \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$,

$$\int_\Omega \left[\left| \vec{\nabla}(u_1 - u_2) \right|^2 + |u_1 - u_2|^2 \right] d\Omega = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = u_2 \qquad \boxed{\text{OUI}}$$

Existence?

Continuité par rapport aux données?

Plus difficile à démontrer!
On verra qu'il n'existe pas toujours une solution aussi régulière...

Des formules de Green aux formulations variationnelles

Il existe une théorie pour résoudre les formulations variationnelles : le théorème de Lax Milgram.

MAIS l'espace d'étude doit être un espace de Hilbert.

Définition Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui est complet pour la norme induite par le produit scalaire

Rappel : un espace complet est un espace normé dans lequel toutes les suites de Cauchy convergent.

Proposition Soit F un sous espace fermé d'un espace de Hilbert E alors muni de la norme induite par le produit scalaire, c'est un espace de Hilbert.

Preuve : soit une suite de Cauchy d'élément de F, comme F est inclus dans E et que E est complet, la suite de Cauchy converge dans E. Comme F est fermé, la suite converge dans F.

Des formules de Green aux formulations variationnelles

Exemple : Trouver $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$

$$\forall v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \quad \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u\, v \, d\Omega = \int_\Omega f\, v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g\, v \, d\Gamma$$

Proposition (admis, voir le cours MA102 pour la preuve)

- $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ muni de la norme $\|f\| = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)| + \sup_{x\in\overline{\Omega}} |f'(x)|$ est complet mais cette norme n'est pas induite par un produit scalaire
- $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ muni du produit scalaire "naturel" pour ce problème $(u, v) \mapsto \int_\Omega \left(uv + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \right) d\Omega$ n'est pas complet.

On ne peut pas appliquer le théorème de Lax Milgram dans $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$.

On introduit dans la suite un cadre dans lequel nous pourrons appliquer le théorème de Lax-Milgram.

1. Formules de Green pour les fonctions régulières

2. Espaces de Sobolev, dérivation au sens faible

3. Théorèmes de trace

4. Retour sur les formules de Green

L'espace de Sobolev $L^2(\Omega)$

Définition $L^2(\Omega) = \{f \text{ mesurable sur } \Omega \text{ t.q. } \int_\Omega |f|^2 d\Omega < +\infty\}$

Exemple :

Si Ω est un ouvert borné, toute fonction dans $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ est dans $L^2(\Omega)$.

Preuve : soit f dans $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ alors $\displaystyle\int_\Omega |f|^2 d\Omega \leq \big(\sup_{x\in\Omega} |f(x)|\big)^2 |\Omega|$

Rappel : Les fonctions mesurables dans Ω sont définies presque partout dans Ω .

L'espace de Sobolev $L^2(\Omega)$

Définition $L^2(\Omega) = \{f \text{ mesurable sur } \Omega \text{ t.q. } \int_\Omega |f|^2 \, d\Omega < +\infty\}$

Théorème (admis, voir le cours MA102 pour la preuve)

$L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire $(u, v)_{L^2(\Omega)} \mapsto \displaystyle\int_\Omega uv \, d\Omega$ est complet.

C'est donc un espace de Hilbert. On notera $\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega f^2 \, d\Omega\right)^{1/2}$.

Définition

$$\mathcal{D}(\Omega) \, (\equiv C_c^\infty(\Omega)) = \{f \in C^\infty(\Omega), \text{ t.q. Supp}(f) \text{ compact dans } \Omega\}$$

Rappel :
- Les fonctions mesurables dans Ω sont définies presque partout dans Ω.
- Le support d'une fonction continue f est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel f=0.

L'espace de Sobolev $L^2(\Omega)$

Définition $L^2(\Omega) = \{f \text{ mesurable sur } \Omega \text{ t.q. } \int_\Omega |f|^2 d\Omega < +\infty\}$

Théorème (admis, voir le cours MA102 pour la preuve)

$L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire $(u,v)_{L^2(\Omega)} \mapsto \displaystyle\int_\Omega uv\, d\Omega$ est complet.

C'est donc un espace de Hilbert. On notera $\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega f^2 d\Omega\right)^{1/2}$.

Définition

$$\mathcal{D}(\Omega)\ (\equiv C_c^\infty(\Omega)) = \{f \in C^\infty(\Omega),\ \text{t.q. Supp}(f) \text{ compact dans } \Omega\}$$

Théorème (admis, voir le cours MA102 pour la preuve)

L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ c'est à dire que

$$\forall f \in L^2(\Omega),\ \exists (f_n)_n \in \mathcal{D}(\Omega)^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

Espaces de Sobolev et distributions

Définition (Espaces des distributions)

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \text{ ens. des formes linéaires continues sur } \mathcal{D}(\Omega)$$

Rappel : T est une forme sur $\mathcal{D}(\Omega)$ si $T : \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$. On notera $T(v) \equiv < T, v >$

T est linéaire si

$$\forall u, v \in \mathcal{D}(\Omega),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad < T, \lambda u + v >= \lambda < T, u > + < T, v >$$

T est continue si pour tout compact $K \subset \Omega$,

$$\exists C_K > 0,\ \exists m_K \in \mathbb{N} \quad \forall v \in \mathcal{D}(K) \qquad |< T, v >| \leq C_K \sup_{|\alpha| \leq m_K} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha v(x)|$$

Espaces de Sobolev et distributions

Définition (Espaces des distributions)

$\mathcal{D}'(\Omega) =$ ens. des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$

Exemple fondamental 1 : soient $f \in L^2(\Omega)$ et $T_f : v \mapsto \int_\Omega fv \, d\Omega$

T_f est une distribution : T_f est une forme linéaire et pour tout compact $K \subset \Omega$ et pour toute $v \in \mathcal{D}(K)$

$$|T_f(v)| \leq \int_K |fv| \, d\Omega \leq \sup_K |v| \int_K |f| \, d\Omega \leq \sup_K |v| \, (\int_K d\Omega)^{1/2} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

On peut identifier f et T_f. On vient de montrer que $\boxed{L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)}$

Exemple fondamental 2 :

soient A un point $\in \Omega$, $\Gamma \subset \Omega$ une variété de dimension $< d$ (ligne, surface,...)

les mesures de Dirac $< \delta_A, v >:= v(A), < \delta_\Gamma, v >:= \int_\Gamma v \quad \in \mathcal{D}(\Omega)$

Mais ce ne sont pas des fonctions mesurables $\delta_A, \delta_\Gamma \notin L^1_{loc}(\Omega), L^2(\Omega)$.

Dérivation au sens des distributions

Définition (dérivation au sens des distributions)
Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on note $\partial T/\partial x_i$ la distribution définie par

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega), \quad < \frac{\partial T}{\partial x_i}, v >= - < T, \frac{\partial v}{\partial x_i} >$$

La dérivation au sens des distributions n'est qu'une extension de dérivation classique

$$u \in C^1(\Omega),\ v \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, d\Omega = - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\Omega$$

L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

Définition (dérivation au sens des distributions)

Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on note $\partial T/\partial x_i$ la distribution définie par

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega), \quad < \frac{\partial T}{\partial x_i}, v >= - < T, \frac{\partial v}{\partial x_i} >$$

Définition (Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$)

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \; \forall i \in \{1, \ldots, n\} \; \}$$

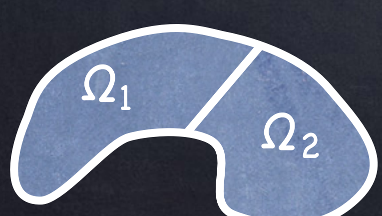
Exemples :

- Si Ω est un ouvert borné, toute fonction dans $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ est dans $H^1(\Omega)$.

  Preuve : soit f dans $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ alors (1) $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \Rightarrow f \in L^2(\Omega)$

  (2) $\forall i, \; \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$

- Si Ω est un ouvert borné avec $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$



$$f|_{\Omega_1} \in C^1(\overline{\Omega}_1)$$
$$f|_{\Omega_2} \in C^1(\overline{\Omega}_2)$$

$$f \in C^0(\overline{\Omega}) \quad \Leftrightarrow \quad f \in H^1(\Omega)$$

Preuve : voir l'exercice 2 du TD1

L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

Théorème (admis, voir le cours MA102 pour la preuve)

$H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $(u,v)_{H^1(\Omega)} \mapsto \int_\Omega (uv + \nabla u \cdot \nabla v)\, d\Omega$

est complet : c'est donc un espace de Hilbert. On notera

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (u^2 + \|\nabla u\|^2)\, d\Omega \right)^{1/2}$$

Théorème (admis, voir le cours MA102 pour la preuve)

Si Ω est un ouvert borné, $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ ($\equiv C_c^\infty(\bar{\Omega})$) est dense dans $H^1(\Omega)$

(mais attention pas $\mathcal{D}(\Omega)$).

L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

Définition (Espace de Sobolev $H^1_0(\Omega)$)

$H^1_0(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ c'est à dire l'ensemble des limites des suites d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui sont convergentes dans $H^1(\Omega)$.

Par définition, $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H^1_0(\Omega)$.

Proposition

Muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$, $H^1_0(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Preuve : $H^1_0(\Omega)$ est, par définition, un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$.

Remarques :

- Si Ω est un ouvert borné $H^1_0(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$
- Si $\Omega = \mathbb{R}^n$ $H^1_0(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$

$H^1(\Omega)$ et $H^1_0(\Omega)$ sont des espaces fondamentaux pour la suite du cours

Les espace de Sobolev $H^m(\Omega)$

Définition (Espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$)

$$\forall m \geq 2, \quad H^m(\Omega) = \{v \in H^{m-1}(\Omega) \text{ t.q. } \partial^\alpha v \in L^2(\Omega)\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ t.q. } |\alpha| = m\ \}$$

Notation : $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad \partial^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$

Théorème (admis, voir le cours MA102 pour la preuve)

Si Ω est un ouvert borné, $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$.

Exemple :

$$H^2(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \text{ t.q. } \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega)\ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}\ \}$$

Dans la suite, on utilisera également l'espace suivant

Définition (Espace de Sobolev $H^1(\Omega, \triangle) \equiv \Psi$)

$$H^1(\Omega, \triangle) = \{v \in H^1(\Omega) \text{ t.q. } \triangle v \in L^2(\Omega)\ \}$$

Proposition

$H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega, \triangle)$ mais il n'y a pas nécessairement égalité...

Prolongement par densité

Pourquoi les résultats de densité sont-ils si importants?

Proposition Voir l'exercice 3 du TD1 pour la preuve.

Soit H, W e.v.normé, W complet et V un sev* dense dans H.

Soit ℓ une application linéaire de V dans W telle que

$$\exists C_\ell > 0, \ \forall v \in V, \quad \|\ell(v)\|_W \leq C_\ell \|v\|_H$$

Alors ℓ se prolonge par continuité de façon unique en une application ℓ linéaire et continue de H dans W.

e.v. : espace vectoriel, sev* = sous espace vectoriel

Corollaire

Soit H, W e.v.normé, W complet et V un sev* dense dans H.

Soit a une application bilinéaire de $V \times V$ dans W telle que

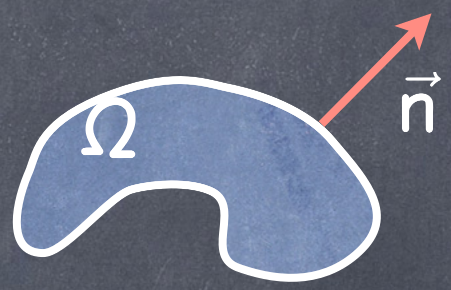
$$\exists C > 0, \ \forall (u,v) \in V \times V, \quad \|a(u,v)\|_W \leq C \, \|u\|_H \, \|v\|_H$$

Alors a se prolonge par continuité de façon unique en une application a bilinéaire et continue de $H \times H$ dans W.

Pourquoi tant de haine?

Avec ces espaces de Hilbert, on a introduit un cadre dans lequel nous pouvons appliquer le théorème de Lax-Milgram.

Mais peut on généraliser la Formule de Green ?



$$w \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \qquad \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\partial\Omega} w\, n_i\, d\Gamma \qquad 1 \leq i \leq n$$

- L'intégrale volumique s'étend aux fonctions w de $H^1(\Omega)$

$$w \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \quad \left|\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega\right| \underset{C.S.}{\leq} \left(\int_\Omega d\Omega\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^2 d\Omega\right)^{1/2} \leq C_\Omega \|w\|_{H^1}$$

Il suffit ensuite d'utiliser le théorème de prolongement par densité.

- Peut on étendre l'intégrale surfacique aux fonctions w de $H^1(\Omega)$?

Ce n'est pas évident car excepté en 1D, $H^1(\Omega) \not\subset C^0(\overline{\Omega})$

mais on peut définir la "valeur" d'une fonction de $H^1(\Omega)$ sur le bord!

C'est le théorème de trace.

1. Formules de Green pour les fonctions régulières

2. Espaces de Sobolev, dérivation au sens faible

3. Théorèmes de trace

4. Retour sur les formules de Green

Théorème de trace (1)

Premier théorème de trace

L'application trace $\gamma_0 : \; C^\infty(\overline{\Omega}) \to L^2(\partial\Omega) = \{f \text{ mes. sur } \partial\Omega \text{ t.q. } \int_{\partial\Omega} |f|^2 d\Gamma < +\infty\}$

$$v \mapsto \gamma_0(v) = \gamma_0 v = v|_{\partial\Omega}$$

vérifie $\exists C_0, \; \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega}), \; \|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|v\|_{H^1(\Omega)}$

Comme $C^\infty(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$, l'application se prolonge par densité en $\gamma_0 : \; H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ qui vérifie

$$v \mapsto \gamma_0 v = v|_{\partial\Omega}$$

$$\exists C_0, \; \forall v \in H^1(\Omega), \; \|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Remarques : Voir l'exercice 4 du TD1 pour la preuve dans un cas particulier

- Soit $\Gamma \subset \partial\Omega$ de mesure non nulle alors $v\big|_\Gamma \in L^2(\Gamma)$ et

$$\exists C_\Gamma, \; \forall v \in H^1(\Omega), \; \|v\big|_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_\Gamma \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

- L'inégalité suivante est fausse

$$\cancel{\exists C_0, \; \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega}), \; \|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|v\|_{L^2(\Omega)}}$$

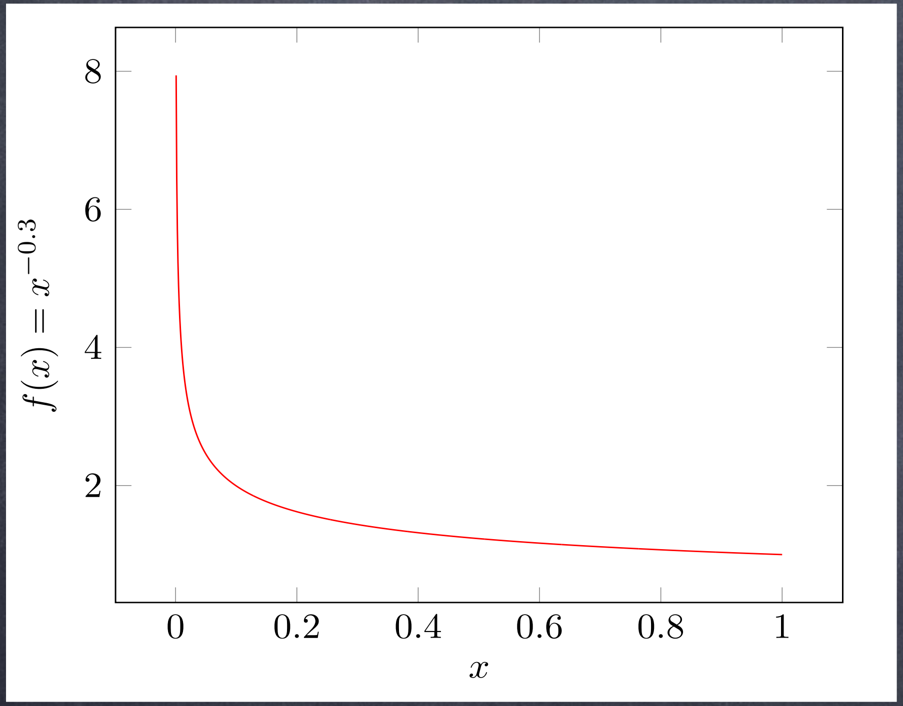
On ne peut pas parler de la trace d'une fonction de $L^2(\Omega)$

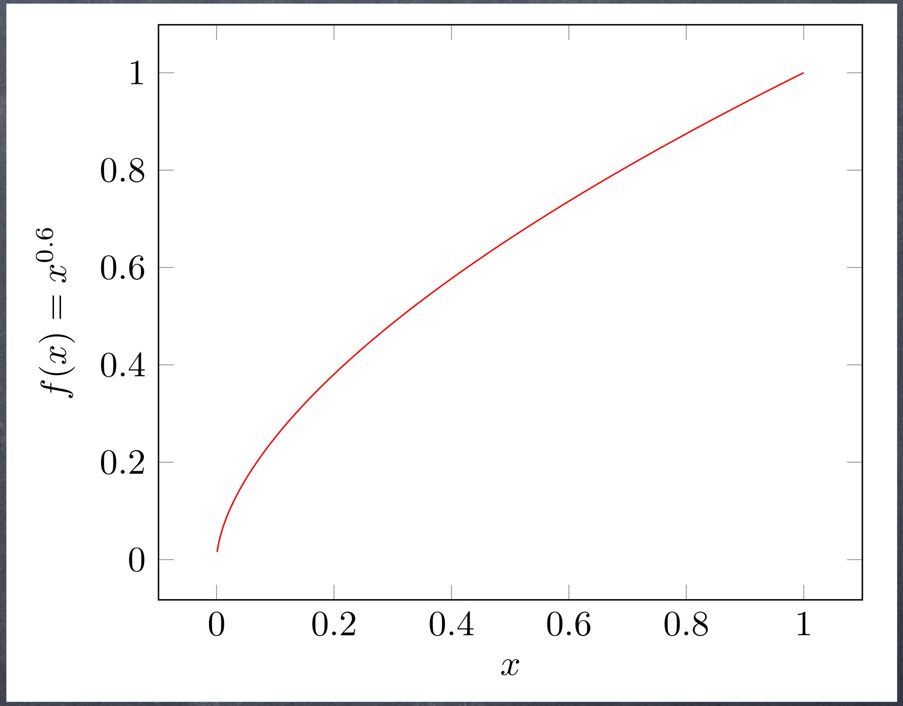
Théorème de trace (1)

Les fonctions de $L^2(\Omega)$ n'ont pas nécessairement une trace sur le bord.

Exemple en 1D : $x \mapsto x^\beta$ $\quad \in L^2(]0,1[)$ ssi $\beta > -1/2$

n'a pas de trace en x=0 pour $\beta < 0$



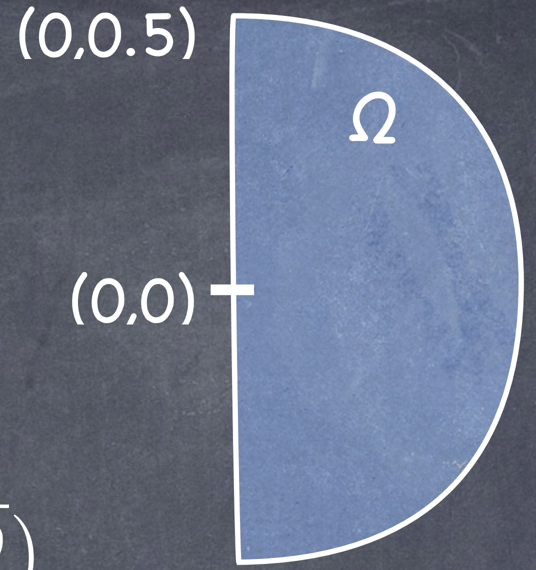


Par contre les fonctions de $H^1(\Omega)$ ont bien une trace sur le bord.

ainsi... $\quad x \mapsto x^\beta$ $\quad \in H^1(]0,1[)$ ssi $\beta > 1/2$

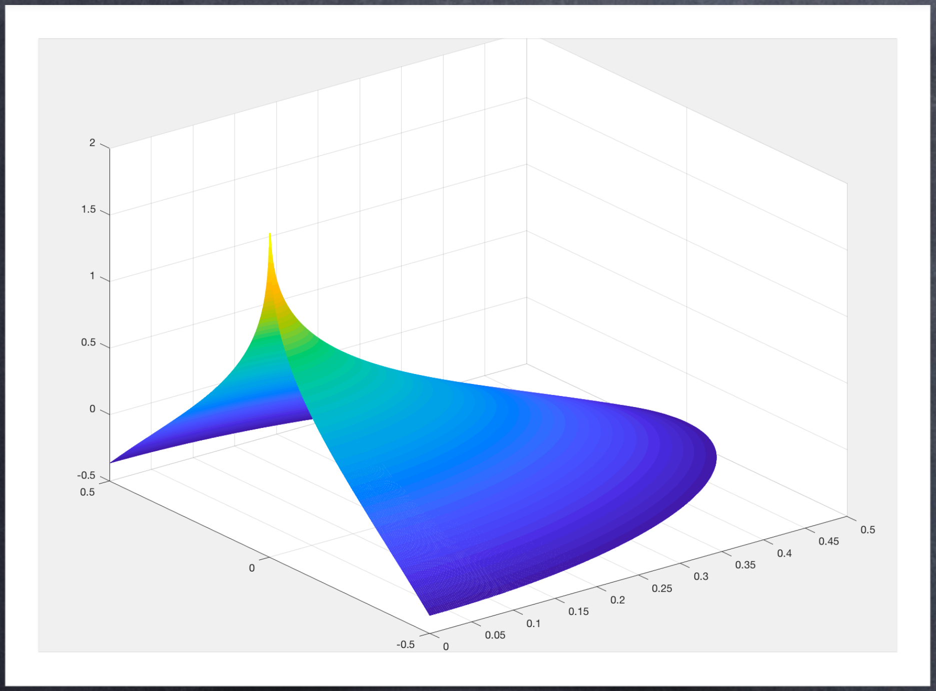
a bien une trace en x=0

Théorème de trace (1)



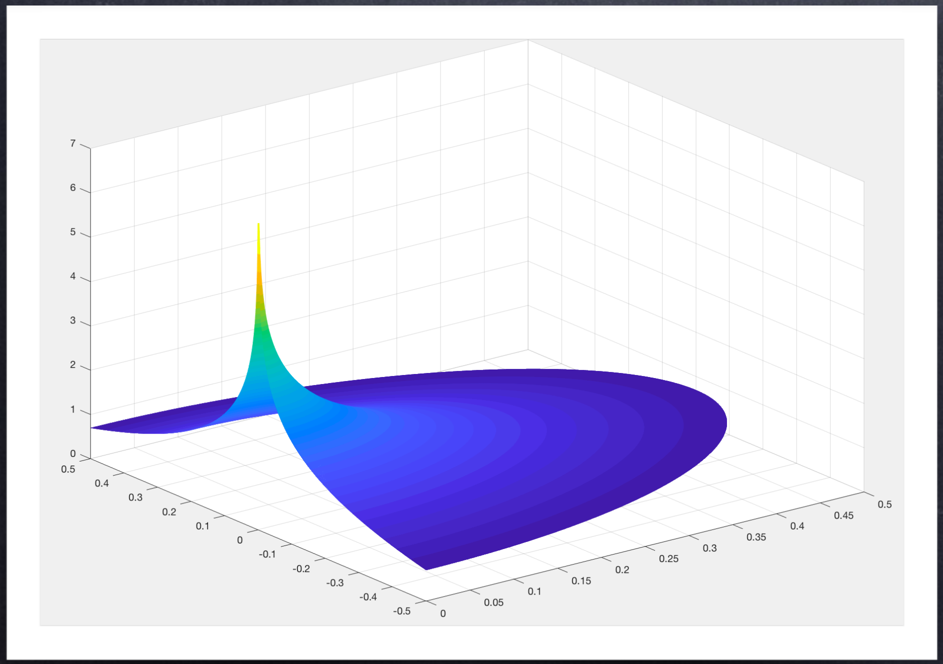
Exemple en 2D :

$$v\colon (x,y) \mapsto \ln(\ln(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}))$$



- Elle n'appartient pas à $C^0(\overline{\Omega})$ puisqu'elle n'est pas continue en (0,0). On ne peut donc pas définir v(0,0)!
- Elle appartient à $H^1(\Omega)$ (à faire en exercice)

donc d'après le théorème de trace, on peut définir sa trace sur le bord $\partial\Omega$ et c'est une fonction de $L^2(\partial\Omega)$.



$$w\colon (x,y) \mapsto \ln(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$$

- Elle est dans $L^2(\Omega)$ mais pas dans $H^1(\Omega)$

sa trace sur le bord $\partial\Omega$ n'est pas une fonction de $L^2(\partial\Omega)$.

Théorème de trace (1)

Premier théorème de trace

L'application trace $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega) = \{f \text{ mes. sur } \partial\Omega \text{ t.q. } \int_{\partial\Omega} |f|^2 d\Gamma < +\infty\}$

$$v \mapsto \gamma_0(v) = \gamma_0 v = v|_{\partial\Omega}$$

est continue, i.e.

$$\exists C_0,\ \forall v \in H^1(\Omega),\ \|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Remarques : γ_0 n'est pas surjective de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$

Proposition

Im γ_0 est un sous-espace strict de $L^2(\partial\Omega)$ qui est dense dans $L^2(\partial\Omega)$

Cet espace est noté $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Le noyau de γ_0 est $H^1_0(\Omega)$. Autrement dit

$$H^1_0(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \quad v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

Preuve de $\subset$: toute fonction de v de $\mathcal{D}(\Omega)$ vérifie $\gamma_0 v = 0$. De plus, $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H^1_0(\Omega)$:

$$\text{Soit } v \in H^1_0(\Omega), \quad \exists\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\Omega)^{\mathbb{N}} \quad \lim_{n\in\mathbb{N}} \|v_n - v\|_{H^1(\Omega)} = 0$$

γ_0 étant continue pour la norme H^1 , on trouve $\lim_{n\in\mathbb{N}} \|\gamma_0 v_n - \gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} = 0 \quad \Rightarrow \gamma_0 v = 0$

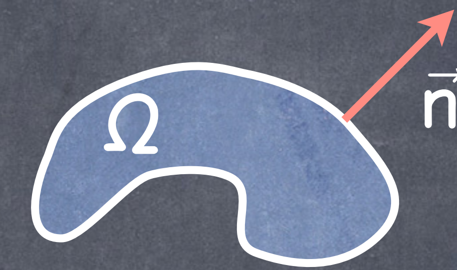
1. Formules de Green pour les fonctions régulières

2. Espaces de Sobolev, dérivation au sens faible

3. Théorèmes de trace

4. Retour sur les formules de Green

Généralisation des formules de Green (1)



$w \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$

(G0)
$$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i}\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} w\, n_i\, d\Gamma \qquad 1 \leq i \leq n$$
$$\| $$
$$\int_{\partial\Omega} \gamma_0 w\, n_i\, d\Gamma$$

- L'intégrale volumique s'étend aux fonctions w de $H^1(\Omega)$
- L'intégrale surfacique s'étend également aux fonctions w de $H^1(\Omega)$

$w \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$

$$\left|\int_{\partial\Omega} \gamma_0 w\, n_i\, d\Gamma\right| \underset{\text{C.S.}}{\leq} \left(\int_{\partial\Omega} |n_i|^2\, d\Gamma\right)^{1/2} \left(\int_{\partial\Omega} |\gamma_0 w|^2\, d\Gamma\right)^{1/2} \leq C_\Omega \|\gamma_0 w\|_{L^2(\partial\Omega)}$$
$$\leq C'_\Omega \|w\|_{H^1(\Omega)}$$

Il suffit ensuite d'utiliser le théorème de prolongement par densité.

Généralisation des formules de Green (1)

Théorème

Pour toute fonction $w \in H^1(\Omega)$

(G0 bis) $$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i}\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \gamma_0 w\, n_i\, d\Gamma \qquad 1 \leq i \leq n$$

Vous trouverez les notations suivantes : $\boxed{\int_{\partial\Omega} \gamma_0 w\, n_i\, d\Gamma}$ ou $\boxed{\int_{\partial\Omega} w|_{\partial\Omega}\, n_i\, d\Gamma}$ ou $\int_{\partial\Omega} w\, n_i\, d\Gamma$

Corollaire 1

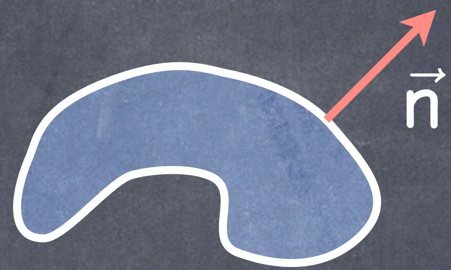
Pour toutes fonctions $u, v \in H^1(\Omega)$

(G1 bis) $$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u\, \gamma_0 v\, n_i\, d\Gamma \qquad 1 \leq i \leq n$$

Vous trouverez les notations suivantes : $\boxed{\int_{\partial\Omega} \gamma_0 u\, \gamma_0 v\, n_i\, d\Gamma}$ ou $\boxed{\int_{\partial\Omega} u|_{\partial\Omega}\, v|_{\partial\Omega}\, n_i\, d\Gamma}$ ou $\int_{\partial\Omega} u\, v\, n_i\, d\Gamma$

Généralisation des formules de Green (2)

$u, v \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$



(G2) $$\int_\Omega \left(\triangle u \, v + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} \, v \, d\Gamma$$

- L'intégrale volumique s'étend aux fonctions $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$

$$H^2(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) \text{ t.q. } \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega) \; \forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \; \}$$

elle s'étend même aux fonctions $u \in H^1(\Omega, \triangle)$, $v \in H^1(\Omega)$

$$H^1(\Omega, \triangle) = \{ v \in H^1(\Omega) \text{ t.q. } \triangle v \in L^2(\Omega) \; \}$$

Il suffit d'utiliser le théorème de prolongement par densité.

- Peut on étendre l'intégrale surfacique à ces fonctions ?

La question est encore moins évidente que précédemment.

C'est le deuxième théorème de trace...
qu'on verra la prochaine fois.

Introduction à la méthode des éléments finis

Outils mathématiques