PC6 : Schémas numériques pour les équations hyperboliques linéaires.

22 avril 2024

EXERCICE 1 (LE SCHÉMA DE LAX-WENDROFF POUR L'ÉQUATION DE TRANSPORT)
Soit u une solution régulière de l'équation de transport (la vitesse c, constante, est supposée strictement positive) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \\ u(x,0) = u^0(x) \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

Question 1. *Montrer que*

$$\left| \begin{aligned} u\left(x_j, t^{n+1}\right) &= u\left(x_j, t^n\right) - c\Delta t\,\frac{\partial u}{\partial x}\left(x_j, t^n\right) + \frac{c^2\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x_j, t^n\right) \\ &\quad - \frac{c^3\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\left(x_j, t^n\right) + \frac{c^4\Delta t^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\left(x_j, t^n\right) + \mathcal{O}(\Delta t^5)\,. \end{aligned} \right. \tag{2}$$

Nous proposons la famille de schémas suivante (dépendant du paramètre μ) pour la résolution numérique de l'équation du transport :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{c}{2h}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) - \frac{\mu\,\Delta t}{h^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) \;=\; 0\,. \tag{3}$$

Obtenir la valeur de μ pour laquelle la méthode est consistante, au moins, à l'ordre deux. Nous appellerons le schéma ainsi obtenu le schéma de Lax-Wendroff. Discuter la précision du schéma lorsque $c\,\Delta t = h$.

Question 2. *Donner une équation équivalente du schéma de Lax Wendroff à partir du terme prépondérant de l'erreur de consistance, équation dont les coefficients seront exprimés en fonction de c, h et $\alpha := c\Delta t/h$ (nombre CFL). Le schéma sera-t-il principalement dissipatif ou dispersif?*

Question 3. *Calculer le coefficient d'amplification du schéma de Lax-Wendroff et en déduire sa stabilité sous condition CFL.*

Question 4. *On rappelle que la solution u de l'équation de transport peut s'écrire en fonction de u^0 :*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}^0(\xi) e^{\imath(x-ct)\xi}\, d\xi$$

Ceci montre que l'équation de transport n'est ni **dissipative***, les ondes planes $e^{\imath\xi x}$ ne sont pas atténuées au cours du temps, et ni* **dispersive***, les ondes planes $e^{\imath\xi x}$ se* *propage toutes à la même vitesse c. On s'interesse maintenant à la version continue en espace du schéma* (3) *pour $\mu = c^2/2$, qui s'écrit*

$$\begin{aligned} \frac{u_h^{n+1}(x) - u_h^n(x)}{\Delta t} + c\, \frac{u_h^n(x+h) - u_h^n(x-h)}{2h} & \\ - \frac{c^2 \Delta t}{2}\, \frac{(u_h^n(x+h) - 2\, u_h^n(x) + u_h^n(x-h)}{h^2} &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

où u_h^n est l'interpolation linéaire de $(u_j^n)_{j\in\mathbb{Z}}$ (voir le cours pour une définition précise). Montrer que, si $u_h^0(x)$ est donnée, la solution $u_h^n(x)$ de (4) *est donnée par*

$$u_h^n(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}_h^0(\xi)\, e^{-a_h(\xi,\Delta t)t^n} e^{\imath\,\xi\,(x - c_h(\xi,\Delta t)t^n)}\, d\xi \tag{5}$$

où on exprimera $a_h(\xi, \Delta t)$ (qui quantifie la dissipation numérique) et $c_h(\xi, \Delta t)$ (qui quantifie la dispersion numérique) en fonction du coefficient d'amplification $\hat{S}_h(\xi, \Delta t)$.

Question 5. *Déterminer l'équivalent des quantités*

$$r_h(\xi, \Delta t) \quad \textit{et} \quad \varepsilon_{c,h}(\xi, \Delta t) = c - c_h(\xi, \Delta t).$$

pour h petit et α constant. Commenter.

EXERCICE 2 (UN SCHÉMA POUR L'ÉQUATION DES ONDES.)
On s'intéresse à l'approximation de l'équation des ondes 1D :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \tag{6}$$

On rappelle que, pour toute fonction u suffisamment régulière :

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = \frac{d^2u}{dx^2}(x) + \frac{h^2}{12} \frac{d^4u}{dx^4}(x) + O(h^4) \tag{7}$$

On introduit l'opérateur aux différences finies :

$$A_h^1 u(x) = -\, c^2\, \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

et on considère le schéma numérique, appelé **schéma saute-mouton**

$$\frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + A_h^1 u_h^n = 0 \tag{8}$$

Question 1. *Expliquer sans calculs pourquoi ce schéma est consistant. Étudier la vitesse de propagation numérique et en déduire une condition nécessaire de convergence du schéma.*

Question 2. *Déterminer le symbole de A_h^1, c'est à dire la fonction $\hat{A}_h^1(\xi)$ telle que :*

$$\mathcal{F}\left(A_h^1 u\right)(\xi) = \hat{A}_h^1(\xi)\mathcal{F}u(\xi)$$

(on exprimera $\hat{A}_h^1(\xi)$ uniquement à l'aide de $sin^2(\xi h/2)$).

Question 3. *Par la méthode de Fourier, déterminer la condition de stabilité L^2 du schéma* (8)*. Commenter.*

Nous cherchons maintenant à construire un schéma plus précis à partir d'une combinaison linéaire de deux schémas saute-mouton définis sur deux grilles différentes (une de pas h, une de pas $2h$).

Ainsi, étant donné $\gamma \in \mathbb{R}$, on introduit l'opérateur aux différences finies :

$$A_h^\gamma u(x) = -\gamma\, c^2\, \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - (1-\gamma)\, c^2\, \frac{u(x+2h) - 2u(x) + u(x-2h)}{4h^2},$$

et on considère le schéma numérique

$$\frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + A_h^\gamma u_h^n = 0 \tag{9}$$

Question 4. *Expliquer sans calculs pourquoi ce schéma est consistant quel que soit γ. Étudier la vitesse de propagation numérique et en déduire une condition nécessaire de convergence du schéma.*

Question 5. *Déterminer la valeur γ_0 de γ pour laquelle, pour toute fonction $u(x)$ suffisamment régulière :*

$$A_h^\gamma u(x) = -c^2\, \frac{d^2 u}{dx^2}(x) + O(h^4).$$

Question 6. *Calculer le symbole $\hat{A}_h^\gamma(\xi)$ de A_h^γ uniquement à l'aide de $sin^2(\xi h/2)$.*

Montrer que $\hat{A}_h^\gamma(\xi) \geq 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\gamma \geq 0$.

Question 7. *Par la méthode de Fourier, déterminer la condition de stabilité L^2 du schéma* (9)*, pour tout γ et en particulier pour γ_0. Commenter.*

Voici un exercice supplémentaire (hors programme) pour aller plus loin...

<u>EXERCICE</u> 3 (ÉTUDE DU SCHÉMA DE NEWMARK PAR MÉTHODE ÉNERGÉTIQUE)

Soit u la solution de l'équation des ondes 1D :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x) \end{cases} \tag{10}$$

Question 1. *Démontrer que pour toutes conditions initiales u_0 et v_0 à support compact, l'énergie*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} c^2 \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx$$

se conserve au cours du temps.

Question 2. *Écrire l'équation vérifiée par le couple $(u,v) = \Big(u\,,\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big)$.*

Question 3. *On étudie le schéma de Newmark défini par*

$$\begin{aligned} &(a) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{v_j^n + v_j^{n+1}}{2} = 0 \\ &(b) \quad \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \Big(A_h\big(\frac{u_h^{n+1} + u_h^n}{2}\big)\Big)_j = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

où A_h est l'opérateur aux différences finies défini par

$$\forall\ w_h = (w_j)_j \in \ell^2(\mathbb{Z}), \quad (A_h w_h)_j = -\frac{c^2}{h}\left(\frac{w_{j+1} - w_j}{h} - \frac{w_j - w_{j-1}}{h}\right).$$

Montrer que ce schéma est équivalent au suivant

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} + \Big(A_h\big(\frac{u_h^{n+1} + 2u_h^n + u_h^{n-1}}{4}\big)\Big)_j = 0, \tag{12}$$

Question 4. *Soit (u,v) , une solution régulière du système obtenu à la question 2. Nous posons*

$$U_j^n = u(jh, n\Delta t), \quad V_j^n = v(jh, n\Delta t)$$

L'idée est de voir les équations comme centrées au point x_j et à l'instant $t^{n+\frac{1}{2}}$ et de contrôler les deux erreurs de troncature

$$\varepsilon_j^{n+\frac{1}{2}} := \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} - \frac{V_j^n + V_j^{n+1}}{2},$$

$$\eta_j^{n+\frac{1}{2}} := \frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\Delta t} - \frac{c^2}{2} \left(\frac{U_{j+1}^{n+1} - 2\, U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{U_{j+1}^n - 2\, U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} \right).$$

Montrer que ce schéma est consistant. Quel est son ordre ?

Question 5. *On munit l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ du produit scalaire*

$$(u_h, v_h) := \sum_j u_j\, v_j\, h$$

et on notera $\|\cdot\|$ la norme associée. Démontrer que A_h est un opérateur symétrique et positif dans $\ell^2(\mathbb{Z})$, c'est à dire

$$\forall\, (v_h, w_h) \in \ell^2(\mathbb{Z})^2, \quad (v_h, A_h w_h) = (A_h v_h, w_h), \quad (A_h v_h, v_h) \geq 0.$$

Question 6. *En déduire que toute solution de (11) satisfait*

$$\forall\, n \geq 0, \quad \mathcal{E}^{n+1} = \mathcal{E}^n, \quad \textbf{où} \quad \mathcal{E}^n = \frac{1}{2}\, \|v_h^n\|^2 + \frac{1}{2}\, \big(u_h^n, A_h u_h^n\big).$$

Question 7. *Conclure sur la stabilité L^2 du schéma, en montrant les estimations*

$$\forall\, n \geq 0, \quad \|v_h^n\| \leq \sqrt{2\mathcal{E}_0}, \quad \|u_h^n\| \leq \|u_h^0\| + t^n \sqrt{2\mathcal{E}_0}, \quad t^n := n\Delta t \tag{13}$$