PC4 : Schémas numériques pour les équations hyperboliques linéaires

25 mars 2024

Exercice 1 (Schémas numériques pour l'équation de transport.)
On s'intéresse ici à la résolution numérique de l'équation de transport :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \\ u(x,0) = u^0(x) \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

On rappelle que la solution de cette équation est donnée par $u(x,t) = u^0(x - ct)$

On considère les schémas aux différences finies suivants :

Schéma 1.
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0 \tag{2}$$

Schéma 2.
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0 \tag{3}$$

Schéma 3.
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + c\,\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0, \tag{4}$$

Schéma 4.
$$\frac{1}{2}\left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}\right) + \frac{c}{2}\left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} + \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h}\right) = 0. \tag{5}$$

Question : *Pour chacun de ces schémas, répondre aux questions suivantes :*

a. *Est-ce un schéma explicite ou implicite ? Quelle est sa vitesse de propagation numérique ?*

b. *Est-ce un schéma consistant pour l'équation de* (1) *? Quel est l'ordre de consistance ?*

c. *Etudier la stabilité* L^2 *par la méthode de Fourier.*

d. *Quelles sont les difficultés spécifiques à l'utilisation pratique de chacun des schémas.*