Enoncé de la PC3 : Résolution analytique d'équations hyperboliques non linéaires en 1D

18 mars 2024

Exercice 1 (Problème de Riemann à 3 états pour l'équation de bürgers)
On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{u^2}{2}\right) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = u^0(x). \end{cases} \tag{1}$$

On choisit comme condition initiale

$$u^0(x) = \begin{cases} u_1, & \text{si} \quad x \leq 0, \\ u_2, & \text{si} \quad 0 < x \leq 1, \\ u_3, & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

Question 1. *A quelle condition a-t-on une solution continue à $t > 0$?*

Question 2. *Calculer la solution pour $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et $u_3 = 0$. Tracer les caractéristiques dans le plan (x,t) et la solution à différents temps. Montrer que l'amplitude et la vitesse du choc tendent vers 0 quand $t \longrightarrow +\infty$.*

Question 3. *Calculer la solution pour $u_1 = 2$, $u_2 = 1$, $u_3 = 0$, et tracer les caractéristiques dans le plan (x,t) et la solution à différents temps.*

Exercice 2 (Problèmes de Riemann pour une nouvelle équation non linéaire)
On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{u^4}{4}\right) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = u^0(x). \end{cases} \tag{2}$$

Question 1. *Écrire l' équation de la caractéristique dans le plan (x,t) qui passe par le point x_0 à $t = 0$.*

Question 2. *On choisit comme condition initiale*

$$u^0(x) = \begin{cases} u_g, & si \quad x < \alpha, \\ u_d, & si \quad x > \alpha. \end{cases}$$

Question 2 (a). *On se place dans le cas où* $u_g > u_d$*. Construire, à l'aide de la méthode des caractéristiques, la solution faible entropique.*

Dans le cas particulier où $u_g = 0$, $u_d = -2$ *et* $\alpha = 0$ *donner et tracer les caractéristiques dans le plan* (x, t) *et la solution aux temps* $t = 0$ *et* $t = 1$*.*

Question 2 (b). *On se place dans le cas où* $u_g < u_d$*. Construire, à l'aide de la méthode des caractéristiques, la solution faible entropique.*

Dans le cas particulier où $u_g = -2$, $u_d = -1$ *et* $\alpha = 1$ *donner et tracer les caractéristiques dans le plan* (x, t) *et la solution aux temps* $t = 0$ *et* $t = 1$*.*

Question 3. *On choisit comme condition initiale*

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \leq 0, \\ -2, & \text{si} \quad 0 < x \leq 1, \\ -1, & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

Calculer à l'aide de la méthode des caractéristiques, la solution faible entropique, donner l'équation des caractéristiques dans le plan (x, t) *et tracer leur allure.*

EXERCICE 3 (LIGNE DE CHOC COURBE)
On considère encore le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{u^2}{2}\right) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x). \end{cases} \tag{3}$$

mais on choisit cette fois ci comme condition initiale

$$u^0(x) = \begin{cases} -1/2, & \text{si} \quad x \leq -1/2, \\ x, & \text{si} \quad -1/2 < x \leq 1, \\ -1/2, & \text{si} \quad x > 1. \end{cases} \tag{4}$$

Question. *Calculer la solution exacte du problème avec cette condition initiale.*