Énoncé de la PC2 : Résolution analytique d'équations hyperboliques linéaires et non linéaires en 1D

11 mars 2024

<u>EXERCICE</u> 1 (EQUATION DE TRANSPORT À VITESSE VARIABLE)
On considère l'équation de transport à vitesse variable

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = u^0(x) \end{cases}$$

où $u^0 \in C_b^1(\mathbb{R})$ et $c(x,t)$ sera définie dans chaque question.

Question 1. *On suppose que $c(x,t) = x$. Est ce que le problème est bien posé dans $C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$? Tracer les caractéristiques dans le plan (x,t). Calculer la solution classique en tout point x et tout temps t.*

Question 2. *On suppose que $c(x,t) = 1$ pour $x \leq 1$ et $c(x,t) = x$ pour $x \geq 1$. Est ce que le problème est bien posé ? Tracer les caractéristiques dans le plan (x,t). Calculer la solution classique en tout point x et tout temps t.*

Question 3. *On va considérer maintenant un cas où la fonction $c(x)$ est discontinue en $x = 0$. On sort alors du cadre du cours. Plus précisément, on suppose maintenant que $c(x,t) = 1$ pour $x \leq 0$ et $c(x,t) = x$ pour $x > 0$.*

Question 3a. *On cherche une solution $u(x,t)$ qui soit une solution classique dans chacun des demi-espaces $x < 0$ et $x > 0$. Montrer, à l'aide de la méthode des caractéristiques que la fonction u est alors entièrement déterminée. Montrer que cette fonction est discontinue en général.*

Question 3b. *A quelle condition sur la donnée initiale u^0, la fonction est-elle continue à travers $x = 0$? Montrer que dans ce cas, il s'agit d'une solution "classique" au sens où $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ et où l'égalité*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

est satisfaite en tout point de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

Question 4. *On reprend la question précédente avec $c(x,t) = -1$ pour $x \leq 0$ et $c(x,t) = x$ pour $x > 0$.*

Question 4a. *Montrer que la recherche d'une solution classique par morceaux ne la détermine entièrement que dans une zone du demi-plan* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ *que l'on précisera. Donner la forme générale d'une telle fonction.*

Question 4b. *Montrer que la fonction* u *est entièrement définie si on lui impose d'être globalement continue. Montrer que cette fonction est de classe* C^1 *si la dérivée de* u^0 *est nulle à l'origine et qu'il s'agit alors bien d'une solution classique au sens défini à la question 3.b.*

EXERCICE 2 (SOLUTION CLASSIQUE)
On considère l'équation de Bürgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

où $f(u) = \frac{1}{2}u^2$*, avec la condition initiale suivante :* $u^0(x) = x$.

Question. *Calculer la solution classique. On tracera les caractéristiques dans le plan* (x,t) *puis la solution en fonction de* x *à différents temps.*

EXERCICE 3 (NAISSANCE DE L'ONDE DE CHOC)
On considère l'équation de Bürgers avec la condition initiale suivante : $u^0(x) = \sin x$.

Question 1. *Montrer que les caractéristiques ne se croisent pas avant* $t = 1$.

Question 2. *Calculer l'instant* t_ε *auquel se croisent les caractéristiques issues des points* $\pi - \varepsilon$ *et* $\pi + \varepsilon$.

Question 3. *En déduire qu'il n'existe pas de solution classique après* $t = 1$.

EXERCICE 4 (NON UNICITÉ DES SOLUTIONS FAIBLES)
On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{u^2}{2}\right) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = a. \end{cases} \tag{1}$$

où a *est une constante réelle donnée. Le but de l'exercice est de montrer qu'on peut construire d'autres solutions faibles de* (1) *que la solution constante* $u(x,t) = a$.

Pour ce faire, on va s'intéresser à une classe de solutions constantes par morceaux définies de la manière suivante :

a) On se donne $N \geq 1$ réels $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_N$ qui définissent $N+1$ zones du demi-plan plan $\mathcal{P} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$

$$\mathcal{Z}_0 = \big\{(x,t) \in \mathcal{P} \,/\, x < \lambda_1 t\big\}, \quad \mathcal{Z}_N = \big\{(x,t) \in \mathcal{P} \,/\, \lambda_N t < x\big\},$$

$$\mathcal{Z}_j = \big\{(x,t) \in \mathcal{P} \,/\, \lambda_j t < x < \lambda_{j+1} t\big\}, \quad 1 \leq j \leq N-1, \quad (\textit{si } N \geq 2)$$

b) On cherche u constante dans chacune des zones

$$u(x,t) = u_j, \quad \forall\, (x,t) \in \mathcal{Z}_j, \quad 0 \leq j \leq N. \tag{2}$$

Question 1. *On suppose que u donnée par (2) est solution faible de (1). Calculer u_1 et u_N et montrer que les nombres λ_j sont entièrement déterminés par les u_j.*

Question 2. *Montrer que si $N = 1$ ou $N = 2$, la seule solution possible est la solution constante.*

Question 3. *On suppose que $N = 3$. Montrer qu'il existe une infinité de solutions non constantes paramétrées par deux réels (par exemple λ_1 et λ_3) dont on précisera le domaine de variation.*

Question 4. *Montrer que pour $N = 4$, on ne peut pas trouver de solution non constante de la forme (2).*