Corrigé de la PC1 : Equations hyperboliques linéaires

17 Mars 2025

Les corrigés des exercices sont volontairement très détaillés pour que les explications données au lecteur soient les plus précises et complètes. Nous n'attendrons évidemment pas autant de détails à l'examen.

EXERCICE 1 (EQUATION D'ADVECTION AVEC UN TERME D'ABSORPTION)
On considère l'équation d'advection avec un terme d'absorption :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\alpha u & \textit{pour } x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u^0(x) & \textit{pour } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

où $\alpha > 0$ *et* $u^0 \in \mathcal{C}^1_b(\mathbb{R}) = \{v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}),\ v' \in L^\infty(\mathbb{R})\}$.

Question *Résoudre ce problème en adaptant la méthode des caractéristiques.*

Corrigé de la question : On cherche les courbes caractéristiques associées au problème (1). Elles sont par définition les courbes $(X(t), t)$ le long desquelles

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} + c\,\frac{\partial u}{\partial x}\right](X(t),t) = \frac{d}{dt}[u(X(t),t)].$$

On rappelle que l'on a

$$\frac{d}{dt}[u(X(t),t)] = \frac{\partial u}{\partial t}(X(t),t) + \frac{dX}{dt}(t)\ \frac{\partial u}{\partial x}(X(t),t)$$

On déduit par identification que les courbes caractéristiques vérifient

$$\frac{dX}{dt} = c.$$

Comme ici, la vitesse c est constante, les courbes caractéristiques sont donc des droites dont l'équation est donnée par $X_{x_0}(t) = x_0 + ct$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ est le pied de la caractéristique. Les droites caractéristiques remplissent tout l'espace $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et ne se croisent pas. On dit qu'elles forment un fibrage du plan. Dans le figure 1, certaines courbes caractéristiques sont représentées pour $c > 0$, $c = 0$ et $c < 0$. Nous rappelons que les courbes caractéristiques sont en général représentées dans le demi plan (x,t), c'est à dire que pour un x_0 donné, on ne représente pas $t \mapsto x_0 + ct$ mais plutôt $x \mapsto (x - x_0)/c$.

Le long de ces droites, la solution vérifie

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dt}[u(X_{x_0}(t),t)] \underset{\text{par def.}}{=} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + c\,\frac{\partial u}{\partial x}\right](X_{x_0}(t),t) \underset{\text{par (1)}}{=} -\alpha u(X_{x_0}(t),t)$$

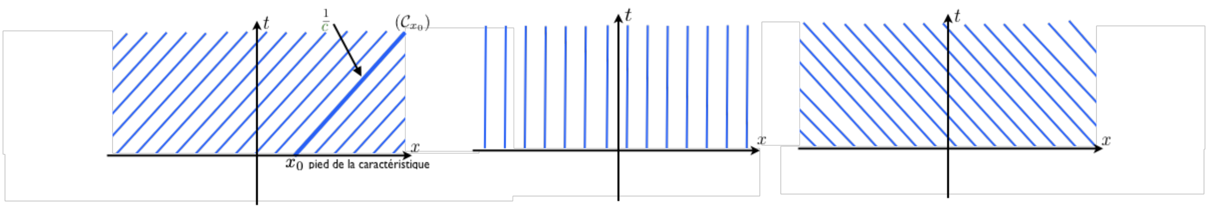

FIGURE 1 – Droites caractéristiques pour $c > 0$ (figure de gauche), $c = 0$ (figure du milieu) et $c < 0$ (figure de droite)

Le long des droites caractéristiques, elle satisfait donc une équation différentielle ordinaire. Cela entraîne

$$u(X_{x_0}(t), t) = u(X_{x_0}(0), 0)e^{-\alpha t}.$$

et comme $u(\cdot, t = 0) = u_0$ et $X_{x_0}(0) = x_0$, on en déduit

$$u(X_{x_0}(t), t) = u^0(x_0)e^{-\alpha t}.$$

On connait donc la solution le long des caractéristiques. Mais on cherche une expression pour $u(x, t)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$ et tout $t > 0$. Il faut utiliser le fait que les droites caractéristiques forement un fibrage du plan c'est à dire que pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ il existe une droite caractéristique et une seule qui passe par ce point :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad \exists ! x_0 \in \mathbb{R}, \quad X_{x_0}(t) = x.$$

Il suffit de prendre $x_0 = x - ct$. On en déduit que

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad u(x, t) = u^0(x - ct)e^{-\alpha t}. \tag{2}$$

On vérifie que u est bien l'unique solution du problème et qu'il y a bien stabilité par rapport aux données.

— **Existence :** $U(x, t) = u^0(x - ct)e^{-\alpha t}$ est bien solution. En effet,

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, t) = \big(- c u^{0'}(x - ct) - \alpha u^0(x - ct)\big)e^{-\alpha t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial x}(x, t) = u^{0'}(x - ct)e^{-\alpha t}$$

implique

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, t) + c\frac{\partial U}{\partial x}(x, t) = -\alpha u^0(x - ct)e^{-\alpha t} = -\alpha U(x, t).$$

On a également $U(x, 0) = u^0(x)$. Cette fonction vérifie donc bien le problème.

— **Unicité :** Toute solution du problème vérifie l'EDO sur les droites caractéristiques. Comme les droites caractéristiques couvrent tout le demi plan $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, toute solution vérifie donc (2). Il y a donc unicité.

— **Stabilité :** De l'expression (2), on déduit

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \|u^0\|_{L^\infty}, \; \|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{L^\infty} \leq C\left[\|u^0\|_{L^\infty} + \|u^{0'}\|_{L^\infty}\right], \; \|\frac{\partial u}{\partial x}\|_{L^\infty} \leq C\|u^{0'}\|_{L^\infty}.$$

pour une certaine constante $C > 0$.

EXERCICE 2 (EQUATION DES ONDES)
On considère le problème de Cauchy pour l'équation des ondes en une dimension d'espace.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \textit{pour } x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, t = 0) = u^0(x) & \textit{pour } x \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = u^1(x) & \textit{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3}$$

On supposera que $c > 0$.

Question 1. *Mettre le problème sous forme d'un système du premier ordre*

$$\frac{\partial U}{\partial t} - C \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \tag{4}$$

assorti de la condition initiale,

$$U(x, t = 0) = U^0(x),$$

où l'on précisera la matrice C, le vecteur U et la condition initiale U^0. Est ce que ce système est hyperbolique ?

Corrigé de la question 1 : Le vecteur

$$U = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ c \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix},$$

répond à la question à condition de poser

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix},$$

et en remarquant que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$. On pose de plus $U^0 = \begin{pmatrix} u^1 \\ c{u^0}' \end{pmatrix}$. La matrice C est symétrique réelle donc elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Le système est donc hyperbolique.

Remarque : Nous avons fait le premier choix par soucis d'"homogénéité" mais on aurait pu prendre aussi

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix},$$

avec

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & c^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Cette matrice est bien diagonalisable dans $\mathbb{R}$ puisqu'elle a 2 valeurs propres distinctes c et $-c$. Les calculs de la question 2 changent évidemment un peu mais le résultat final ne change pas.

Question 2. *En diagonalisant C, mettre le système précédent sous la forme de deux équations de transport indépendantes.*

En déduire l'expression de la solution $u(x,t)$.

Corrigé de la question 2 : Les valeurs propres de la matrice C sont évidemment c et $-c$ et des vecteurs propres associés sont donnés par $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. En notant P la matrice de passage associée

$$P = P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

et en multipliant l'équation vérifiée par U par P, on obtient

$$\frac{\partial PU}{\partial t} - PCP^{-1}\frac{\partial PU}{\partial x} = 0\ .$$

Mais

$$PCP^{-1} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix},$$

donc en posant $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = PU$, on obtient deux équations de transport indépendantes qui s'écrivent

$$\frac{\partial v}{\partial t} - c\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

et

$$\frac{\partial w}{\partial t} + c\frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

avec $v = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ et $w = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x}\right)$. En utilisant la méthode des caractéristiques sur chaque équation de transport, on en déduit en particulier que

$$v(x,t) = v(x+ct,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[u^1(x+ct) + cu^{0\prime}(x+ct)\right],$$

$$w(x,t) = w(x-ct,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[u^1(x-ct) - cu^{0\prime}(x-ct)\right]\ .$$

On obtient donc

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v+w) = \frac{1}{2}\left[u^1(x+ct) + u^1(x-ct) + cu^{0\prime}(x+ct) - cu^{0\prime}(x-ct)\right],$$

soit, par intégration en temps :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t (u^1(x+cs) + u^1(x-cs))ds + \frac{1}{2}(u^0(x+ct) + u^0(x-ct)).$$

Par un changement de variable $y = x + cs$ d'une part et $y = x - cs$ d'autre part, on aboutit à

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(u^0(x+ct) + u^0(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u^1(y)\,dy\ .$$

Question 3. *On suppose que le support des fonctions u^0 et u^1 est inclus dans un intervalle $[a,b]$ et on pose*

$$\left| \begin{array}{l} D^+ = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad x > b + ct\} \\ D^- = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad x < a - ct\} \\ D^0 = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad b - ct < x < a + ct\} \end{array} \right.$$

Montrer que la solution est constante dans chacun de ses domaines et préciser la valeur de ces constantes. Commenter le résultat quand la moyenne de u^1 est nulle.

Corrigé de la question 3 : En effet pour tout (x,t) appartenant à D^+, on a $x - ct > b$. Comme $u^0(x_0) = 0$ pour tout $x_0 > b$ (puisque le support est inclus dans $[a,b]$), on déduit $u^0(x-ct) = 0$. De plus, si $x > b + ct$, on a aussi $x > b - ct$ (car $c > 0$) soit $x + ct > b$. On déduit donc que $u^0(x+ct) = 0$. Enfin pour tout $y > x - ct > b$, on a $u^1(y) = 0$. En utilisant l'expression de la solution trouvée à la question précédente, on conclut que pour tout (x,t) appartenant à D^+, on a $u(x,t) = 0$.

De la même façon, pour tout (x,t) appartenant à D^-, on a $x + ct < a$. Comme $u^0(x_0) = 0$ pour tout $x_0 < a$ (puisque le support est inclus dans $[a,b]$), on déduit $u^0(x+ct) = 0$. De plus, si $x < a - ct$, on a aussi $x < a + ct$ (car $c > 0$) soit $x - ct < a$. On déduit donc que $u^0(x-ct) = 0$. Enfin pour tout $y < x + ct < a$, on a $u^1(y) = 0$. En utilisant l'expression de la solution trouvée à la question précédente, on conclut que pour tout (x,t) appartenant à D^-, on a $u(x,t) = 0$.

On a donc montré que u est nulle dans D^+ et D^-.

Pour (x,t) appartenant à D^0, on remarque que

$$[a,b] \subset [x-ct, x+ct]$$

ce qui nous donne que

$$u^0(x+ct) = u^0(x-ct) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{x-ct}^{x+ct} u^1(y)\,dy = \int_a^b u^1(y)\,dy.$$

On en déduit que

$$\forall (x,t) \in D^0, \quad u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_a^b u^1(y)\,dy$$

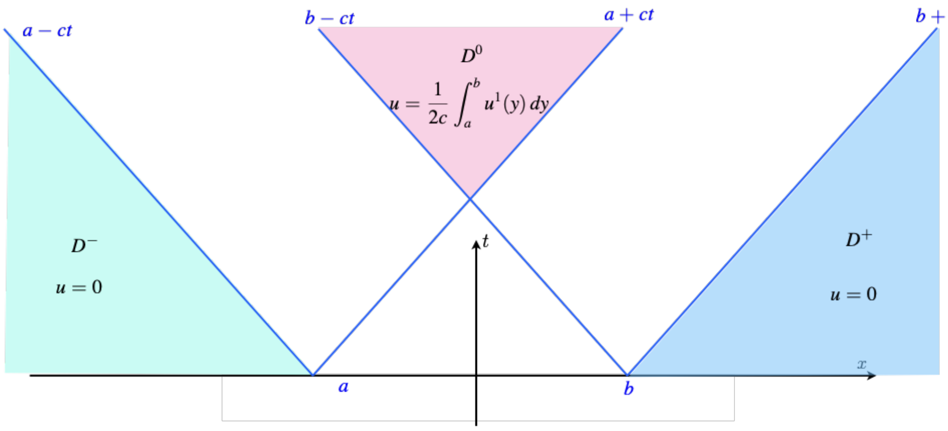

FIGURE 2 – La solution est nulle pour (x,t) dans D^+ et D^- et constante pour (x,t) dans D^0.

Quand la moyenne de u^1 est nulle, u est donc nulle dans D^0. On dit alors qu'il y a présence de 2 fronts d'ondes.

EXERCICE 3 (EQUATION D'ADVECTION AVEC CONDITION AU BORD)
On s'intéresse à la résolution de l'équation d'advection sur un intervalle semi-infini :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & \textit{pour}\, x \in \mathbb{R}^+, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u^0(x) & \textit{pour}\, x \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{5}$$

où $u^0 \in \mathcal{C}^1_b(\mathbb{R}^+) = \{v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+),\ v' \in L^\infty(\mathbb{R}^+)\}$.

Question 1. *On suppose que $c < 0$. Tracer les caractéristiques. Montrer que le problème (5) admet une unique solution.*

Corrigé de la question 1 : Les droites caractéristiques ont pour équation $X_{x_0}(t) = x_0 + ct$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^+$. Comme $c < 0$, elles sont décroissantes. Lorsque $c < 0$, l'ensemble des droites caractéristiques ayant pour origine un point du demi-intervalle $\mathbb{R}_+$ couvre tout le quadrant $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. En d'autres termes, le pied de la caractéristique passant par le point $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ est $x_0 = x - ct$. Remarquons que nous avons bien $x_0 \geq 0$. Et on a donc

$$u(x,t) = u^0(x - ct), \qquad \forall\,(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+. \tag{6}$$

qui est bien définie dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et est bien la solution de (5). C'est bien l'unique solution car une solution est nécessairement constante le long des caractéristiques et les droites caractéristiques couvrent tout le quart de plan $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. elle est donc nécessairement donnée par (6). Enfin, il y a stabilité car comme dans le cours, l'expression (6) implique

$$\|u\|_{L^\infty} = \|u^0\|_{L^\infty},\ \|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{L^\infty} = c\|u^{0'}\|_{L^\infty},\ \|\frac{\partial u}{\partial x}\|_{L^\infty} = \|u^{0'}\|_{L^\infty}.$$

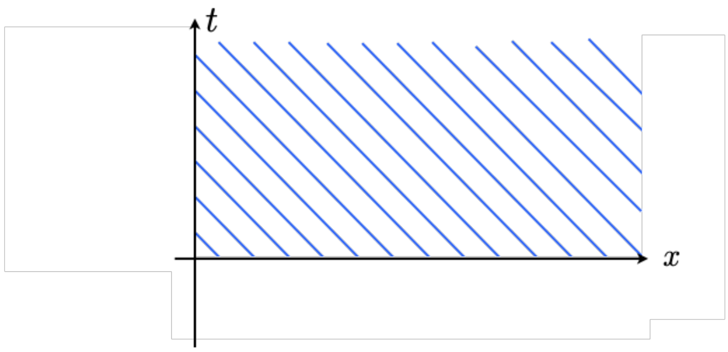

FIGURE 3 – Droites caractéristiques pour $c < 0$ dans le quart de plan $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

Question 2. *On suppose que $c > 0$. Montrer qu'il n'y a pas unicité de la solution du problème* (5)*.*

Corrigé de la question 2 : Les droites caractéristiques ont toujours pour équation $X_{x_0}(t) = x_0 + ct$. Mais cette fois ci, l'ensemble des droites caractéristiques dont le pied x_0 est dans $\mathbb{R}^+$ ne couvre pas tout le quadrant (voir la Figure 4).

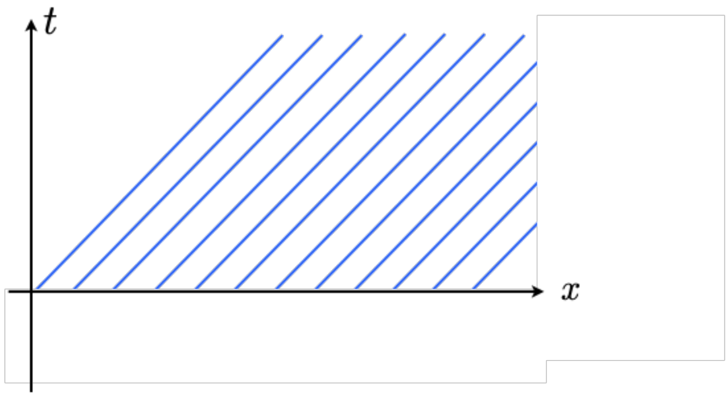

FIGURE 4 – Droites caractéristiques pour $c > 0$ dans le quart de plan $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

Pour tout point $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ tel que $x > ct$, il existe une droite caractéristique et une seule qui passe par ce point :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad \exists ! x_0 \in \mathbb{R}^+, \quad X_{x_0}(t) = x.$$

Il suffit de prendre $x_0 = x - ct$ qui est bien strictement positif.

Cependant pour tous les points situés dans le cône $\{(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, x < ct\}$, on ne peut pas remonter à un pied de la caractéristique qui soit strictement positif.

Pour montrer qu'il n 'y a pas unicité de la solution dans ce cas, on construit une solution non nulle au problème associé à une donnée initiale nulle. Soit $\tilde{u}^0$ non nulle à support dans $\mathbb{R}^-$ alors la fonction $u(x,t) = \tilde{u}^0(x-ct)$ pour $x>0$ et $t>0$ et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ et vérifie $u(x,0)=0$ pour tout $x>0$.

Question 3. *Pour pallier le défaut d'unicité, on ajoute la condition*

$$u(0,t) = g(t), \text{ pour } t>0, \tag{7}$$

où $g \in \mathcal{C}^1_b(\mathbb{R}^+)$. *Montrer que le problème (5) admet une unique solution de classe* $\mathcal{C}^1$ *que l'on déterminera si et seulement si on a :*

$$g(0) = u^0(0), \qquad \text{et} \qquad g'(0) + c{u^0}'(0) = 0. \tag{8}$$

Corrigé de la question 3 : Pour tout point $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ tel que $x>ct$, il existe une droite caractéristique de pied $x_0 = x-ct>0$. Comme la solution est constante le long des caractéristiques, on trouve

$$u(x,t) = u^0(x-ct) \text{ pour } x>ct$$

Pour tout point $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ tel que $x<ct$, il existe aussi une droite caractéristique qui y passe mais le pied de cette caractéristique est sur l'axe des réels négatifs. Il suffit d'utiliser que cette caractéristique passe aussi par un point $(0,t_0)$ (de l'axe des ordonnées). Il est facile de montrer que $t_0 = t - x/c > 0$. Comme la solution est constante le long des caractéristiques, il suffit alors d'utiliser la condition aux limites (8) et on trouve

$$u(x,t) = g(t-x/c) \text{ pour } x<ct$$

On vérifie que la solution du problème dans (5) et (7) donnée par la méthode des

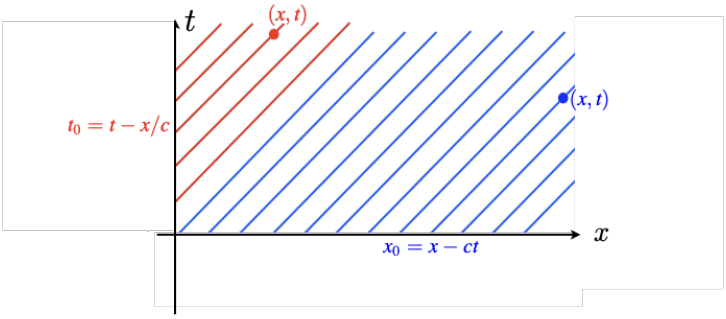

FIGURE 5 – Droites caractéristiques pour $c>0$ dans le quart de plan $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

caractéristiques est :

$$u(x,t) = \begin{cases} u^0(x-ct) & \text{si } x>ct, \\ g(t-x/c) & \text{si } x<ct. \end{cases} \tag{9}$$

Comme u^0 est C^1, on a facilement que u est C^1 dans $\{(x,t),\ x>ct\}$. De même, comme g est C^1, on a également que u est C^1 dans $\{(x,t),\ x<ct\}$. Pour que la solution soit $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ il faut donc assurer la continuité de $u(x,t)$ ainsi que celle de

ses dérivées en x et t le long de la droite d'équation $x = ct$. Ainsi, u sera continue à la traversée de $x = ct$ si et seulement si $u((ct)^+, t) = g(0)$ est égal à $u((ct)^-, t) = u^0(0)$ soit $g(0) = u^0(0)$. De plus, $\partial_t u$ sera continue à la traversée de $x = ct$ si et seulement si $g'(0) = -cu^{0'}(0)$. Grâce à l'équation de transport, si $\partial_t u$ est continue à la traversée de $x = ct$ alors $\partial_x u$ le sera également.

On montre comme à la question précédente que la fonction définie par (9) est bien l'unique solution de (5) et qu'il y a bien stabilité par rapport aux données.

Question 4. *(Estimation d'énergie). On se propose ici de retrouver la nécessité d'imposer une condition sur le bord $t = 0$ lorsque $c > 0$ par une méthode d'énergie pour que le problème admette une unique solution. On suppose que u^0 est à support compact pour simplifier.*

Montrer que toute solution de (5) d'énergie finie vérifie l'identité d'énergie :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+} |u(x,t)|^2 dx\right) = \frac{c}{2}\,|u(0,t)|^2, \quad \forall t > 0, \tag{10}$$

Etudier donc l'unicité de la solution en distinguant $c < 0$ et $c > 0$.

Corrigé de la question 4 : Il suffit de multiplier l'équation (5) par u et d'intégrer par rapport à la variable d' espace

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\partial u}{\partial t} u(x,t)\,dx + c\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\partial u}{\partial x} u(x,t)\,dx = 0, \quad \forall t > 0.$$

Comme u^0 est à support compact, pour tout $t > 0$ fixé, $u(\cdot,t)$ est aussi à support compact donc les intégrales ont bien un sens. On a pour tout $t > 0$

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\partial u}{\partial t} u(x,t)\,dx = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+} |u(x,t)|^2 dx\right) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\partial u}{\partial x} u(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u^2}{2}\right](x,t)\,dx$$

Comme $u(\cdot,t)$ est à support compact, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u^2}{2}\right](x,t)\,dx = -\frac{|u(0,t)|^2}{2}, \quad \forall t > 0$$

On retrouve donc bien l'identité d'énergie (10).

Soient $u_i,\ i \in \{1,2\}$ deux solutions de (5). On vérifie aisément que la différence $u_1 - u_2$ satisfait aussi (5) avec une condition initiale nulle. Par conséquent, nous avons que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+} |u_1 - u_2|^2 dx\right) = \frac{c}{2}\,|u_1(0,t) - u_2(0,t)|^2. \tag{11}$$

— Si $c < 0$, on a $t \mapsto \|u_1(.,t) - u_2(.,t)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^*)}$ est décroissante. Comme cette fonction est nulle à $t = 0$ et qu'elle doit rester positive, elle est nécessairement nulle pour tout $t > 0$. On a donc pour tout $t > 0$, $u_1(\cdot,t) = u_2(\cdot,t)$.

— Si $c > 0$, l'énergie croît et on ne peut plus conclure de la même manière à moins d'imposer une valeur à $u_i(0,t)$. Si on ajoute la condition aux limites (7) nous avons que $t \mapsto \|u_1(.,t) - u_2(.,t)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^*)}$ est constante grâce à (11). Comme cette fonction est nulle à $t = 0$, elle est nulle pour tout $t > 0$. On a donc pour tout $t > 0$, $u_1(\cdot,t) = u_2(\cdot,t)$.