PC1 : Equations hyperboliques linéaires

17 Mars 2025

<u>Exercice</u> 1 (Equation d'advection avec un terme d'absorption)
On considère l'équation d'advection avec un terme d'absorption :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\alpha u & \textit{pour}\, x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u^0(x) & \textit{pour}\, x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

où $\alpha > 0$ *et* $u^0 \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}) = \{v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}),\ v' \in L^\infty(\mathbb{R})\}$.

Question *Résoudre ce problème en adaptant la méthode des caractéristiques.*

<u>Exercice</u> 2 (Equation des ondes)
On considère le problème de Cauchy pour l'équation des ondes en une dimension d'espace.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \textit{pour}\, x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, t=0) = u^0(x) & \textit{pour}\, x \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, t=0) = u^1(x) & \textit{pour}\, x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

On supposera que $c > 0$.

Question 1. *Mettre le problème sous forme d'un système du premier ordre*

$$\frac{\partial U}{\partial t} - C\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

assorti de la condition initiale,

$$U(x, t=0) = U^0(x),$$

où l'on précisera la matrice C, *le vecteur* U *et la condition initiale* U^0. *Est ce que ce système est hyperbolique ?*

Question 2. *En diagonalisant* C, *mettre le système précédent sous la forme de deux équations de transport indépendantes.*

En déduire l'expression de la solution $u(x,t)$.

Question 3. *On suppose que le support des fonctions u^0 et u^1 est inclus dans un intervalle $[a,b]$ et on pose*

$$\left|\begin{array}{l} D^+ = \{(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \quad x > b + ct\} \\ D^- = \{(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \quad x < a - ct\} \\ D^0 = \{(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \quad b - ct < x < a + ct\} \end{array}\right.$$

Montrer que la solution est constante dans chacun de ses domaines et préciser la valeur de ces constantes. Commenter le résultat quand la moyenne de u^1 est nulle.

EXERCICE 3 (EQUATION D'ADVECTION AVEC CONDITION AU BORD)

On s'intéresse à la résolution de l'équation d'advection sur un intervalle semi-infini :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \textit{pour}\, x \in \mathbb{R}^+, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u^0(x) \quad \textit{pour}\, x \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{4}$$

où $u^0 \in \mathcal{C}^1_b(\mathbb{R}^+) = \{v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+),\ v' \in L^\infty(\mathbb{R}^+)\}$.

Question 1. *On suppose que $c < 0$. Tracer les caractéristiques. Montrer que le problème (4) admet une unique solution.*

Question 2. *On suppose que $c > 0$. Montrer qu'il n'y a pas unicité de la solution du problème* (4).

Question 3. *Pour pallier le défaut d'unicité, on ajoute la condition*

$$u(0,t) = g(t), \ \textit{pour}\, t > 0, \tag{5}$$

où $g \in \mathcal{C}^1_b(\mathbb{R}^+)$. Montrer que le problème (4) admet une unique solution de classe $\mathcal{C}^1$ que l'on déterminera si et seulement si on a :

$$g(0) = u^0(0), \qquad \textit{et} \qquad g'(0) + c{u^0}'(0) = 0. \tag{6}$$

Question 4. *(Estimation d'énergie). On se propose ici de retrouver la nécessité d'imposer une condition sur le bord $t = 0$ lorsque $c > 0$ par une méthode d'énergie pour que le problème admette une unique solution. On suppose que u^0 est à support compact pour simplifier.*

Montrer que toute solution de (4) d'énergie finie vérifie l'identité d'énergie :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+} |u(x,t)|^2 dx\right) = \frac{c}{2}\,|u(0,t)|^2, \quad \forall t > 0, \tag{7}$$

Etudier donc l'unicité de la solution en distinguant $c < 0$ et $c > 0$.