

# PC1 : Equations hyperboliques linéaires

4 Mars 2024

## **EXERCICE 1 (EQUATION D'ADVECTION AVEC UN TERME D'ABSORPTION)**

On considère l'équation d'advection avec un terme d'absorption :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = -\alpha u & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1)$$

où  $\alpha > 0$  et  $u^0 \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}) = \{v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), v' \in L^\infty(\mathbb{R})\}$ .

**Question** Résoudre ce problème en adaptant la méthode des caractéristiques.

## **EXERCICE 2 (EQUATION DES ONDES)**

On considère le problème de Cauchy pour l'équation des ondes en une dimension d'espace.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, t = 0) = u^0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = u^1(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2)$$

On supposera que  $c > 0$ .

**Question 1.** Mettre le problème sous forme d'un système du premier ordre

$$\frac{\partial U}{\partial t} - C \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

assorti de la condition initiale,

$$U(x, t = 0) = U^0(x),$$

où l'on précisera la matrice  $C$ , le vecteur  $U$  et la condition initiale  $U^0$ . Est ce que ce système est hyperbolique?

**Question 2.** En diagonalisant  $C$ , mettre le système précédent sous la forme de deux équations de transport indépendantes.

En déduire l'expression de la solution  $u(x, t)$ .

**Question 3.** On suppose que le support des fonctions  $u^0$  et  $u^1$  est inclus dans un intervalle  $[a, b]$  et on pose

$$\begin{cases} D^+ = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, & x > b + ct\} \\ D^- = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, & x < a - ct\} \\ D^0 = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, & b - ct < x < a + ct\} \end{cases}$$

Montrer que la solution est constante dans chacun de ses domaines et préciser la valeur de ces constantes. Commenter le résultat quand la moyenne de  $u^1$  est nulle.

**EXERCICE 3 (EQUATION D'ADVECTION AVEC CONDITION AU BORD)**

On s'intéresse à la résolution de l'équation d'advection sur un intervalle semi-infini :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}^+, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (4)$$

où  $u^0 \in C_b^1(\mathbb{R}^+) = \{v \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+), v' \in L^\infty(\mathbb{R}^+)\}$ .

**Question 1.** On suppose que  $c < 0$ . Tracer les caractéristiques. Montrer que le problème (4) admet une unique solution.

**Question 2.** On suppose que  $c > 0$ . Montrer qu'il n'y a pas unicité de la solution du problème (4).

**Question 3.** Pour pallier le défaut d'unicité, on ajoute la condition

$$u(0, t) = g(t), \quad \text{pour } t > 0, \quad (5)$$

où  $g \in C_b^1(\mathbb{R}^+)$ . Montrer que le problème (4) admet une unique solution de classe  $C^1$  que l'on déterminera si et seulement si on a :

$$g(0) = u^0(0), \quad \text{et} \quad g'(0) + cu^{0'}(0) = 0. \quad (6)$$

**Question 4.** (Estimation d'énergie). On se propose ici de retrouver la nécessité d'imposer une condition sur le bord  $t = 0$  lorsque  $c > 0$  par une méthode d'énergie pour que le problème admette une unique solution. On suppose que  $u^0$  est à support compact pour simplifier.

Montrer que toute solution de (4) d'énergie finie vérifie l'identité d'énergie :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^+} |u(x, t)|^2 dx \right) = \frac{c}{2} |u(0, t)|^2, \quad \forall t > 0, \quad (7)$$

Etudier donc l'unicité de la solution en distinguant  $c < 0$  et  $c > 0$ .