

# Introduction aux équations aux dérivées partielles hyperboliques et à leur approximation numérique

Sonia Fliss,  
rédigé en collaboration avec Anne-Sophie Bonnet Ben-Dhia, Patrick Joly et Philippe Moireau

25 mars 2024





---

# Table des matières

<b>CHAPITRE 1 Introduction aux problèmes hyperboliques linéaires</b>	<b>3</b>
1.1 Exemples de modèles hyperboliques . . . . .	3
1.1.1 Equation de transport linéaire . . . . .	3
1.1.2 L'équation des ondes et ses variantes . . . . .	5
1.2 L'équation de transport linéaire . . . . .	8
1.2.1 Le problème de Cauchy pour l'équation de transport linéaire . . . . .	8
1.2.2 Solutions classiques du problème de Cauchy . . . . .	9
1.3 Résolution de l'équation de transport à coefficients constants . . . . .	10
1.3.1 Méthode des caractéristiques et caractère bien posé . . . . .	10
1.3.2 Rappels sur la transformée de Fourier . . . . .	15
1.3.3 Résolution de l'équation de transport à coefficients constants par Fourier . . . . .	16
1.4 Résolution de l'équation de transport à coefficients variables . . . . .	17
1.4.1 Méthode des caractéristiques . . . . .	17
1.4.2 Propriétés des courbes caractéristiques . . . . .	20
1.4.3 Caractère bien posé . . . . .	23
1.5 Systèmes hyperboliques linéaires . . . . .	25
1.5.1 Systèmes hyperboliques linéaires . . . . .	25
1.5.2 L'équation des ondes en dimension 1 . . . . .	27
1.6 Exercices . . . . .	31
<b>CHAPITRE 2 Problèmes hyperboliques non linéaires</b>	<b>37</b>
2.1 Lois de conservation . . . . .	37
2.1.1 Introduction . . . . .	37
2.1.2 Construction d'une équation de conservation . . . . .	38

2.1.3	Ajout d'un terme de viscosité . . . . .	41
2.1.4	Des équations de Hamilton-Jacobi Bellman aux lois de conservations . . . . .	41
2.2	Solutions classiques : méthode des caractéristiques . . . . .	42
2.2.1	Solutions classiques au problème de Cauchy . . . . .	43
2.2.2	Solutions classiques locales et naissance d'un choc . . . . .	48
2.3	Solutions faibles - Solutions entropiques . . . . .	53
2.3.1	Solutions faibles . . . . .	53
2.3.2	Solutions $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Condition de choc . . . . .	54
2.3.3	Solutions entropiques . . . . .	60
2.3.4	Existence et unicité de la solution entropique . . . . .	68
2.4	Le problème de Riemann . . . . .	70
2.4.1	Présentation du problème . . . . .	70
2.4.2	Une solution auto-semblable . . . . .	70
2.4.3	Cas où $u_g > u_d$ : la solution est une onde de choc . . . . .	72
2.4.4	Cas où $u_g < u_d$ : la solution est une onde de détente . . . . .	73
2.4.5	Solution du problème de Riemann à 2 états . . . . .	74
2.4.6	Problème de Riemann à 3 états pour l'équation de burgers . . . . .	75
2.5	Exercices . . . . .	83
<b>CHAPITRE 3 Approximation par différences finies</b>		<b>87</b>
3.1	Présentation de la méthode de différences finies . . . . .	87
3.1.1	Approximation de quelques opérateurs différentiels . . . . .	87
3.1.2	La démarche : Etude de la consistance et la stabilité . . . . .	91
3.1.3	Application aux équations hyperboliques linéaires . . . . .	92
3.2	Le schéma explicite centré pour l'équation d'advection . . . . .	93
3.2.1	Consistance et ordre du schéma . . . . .	95
3.2.2	Propagation numérique et condition nécessaire de convergence . . . . .	97
3.2.3	Analyse de la stabilité d'un schéma : principes généraux . . . . .	99
3.2.4	Schéma à un pas de temps . . . . .	100
3.2.5	Analyse de stabilité $L^2$ du schéma explicite centré : la méthode de Fourier-Von Neumann . . . . .	101
3.3	Le schéma de Lax-Friedrichs pour l'équation d'advection . . . . .	106
3.3.1	Consistance et ordre du schéma . . . . .	108
3.3.2	Vitesse de propagation numérique . . . . .	109
3.3.3	Analyse de stabilité . . . . .	109
3.3.4	Convergence du schéma . . . . .	111
3.4	Quelques remarques sur les schémas à deux pas de temps. . . . .	115

3.4.1	Schéma de démarrage . . . . .	115
3.4.2	Analyse de stabilité . . . . .	116
3.5	Des caractéristiques à la stabilité $L^\infty$ . . . . .	117
3.5.1	Les schémas amont et Lax Friderichs . . . . .	117
3.5.2	Stabilité $L^\infty$ . . . . .	118
3.5.3	Autres schémas par interpolation . . . . .	119
3.6	Dissipation et dispersion numérique . . . . .	119
3.6.1	Notion de dissipation et dispersion . . . . .	119
3.6.2	Dissipation et dispersion numérique . . . . .	120
3.6.3	Equation équivalente . . . . .	122
3.7	Le schéma saute-mouton pour l'équation des ondes . . . . .	123
3.7.1	Présentation du schéma . . . . .	123
3.7.2	Le schéma de démarrage : choix des conditions initiales approchées . . . . .	123
3.7.3	Ordre du schéma : consistance et erreur de troncature . . . . .	124
3.7.4	Analyse de stabilité $L^2$ par techniques énergétiques . . . . .	125
3.8	Exercices . . . . .	128
<b>CHAPITRE 4 Discrétisation des équations hyperboliques non linéaires 1D</b>		<b>133</b>
4.1	Présentation du problème . . . . .	133
4.2	Propriétés des schémas . . . . .	135
4.2.1	Schémas sous forme conservative . . . . .	135
4.2.2	Consistance . . . . .	137
4.2.3	Linéarisation du schéma - Stabilité $L^2$ . . . . .	139
4.2.4	Vers la convergence : le théorème de Lax-Wendroff . . . . .	142
4.2.5	Schémas entropiques . . . . .	144
4.2.6	Schémas monotones . . . . .	146
4.3	Exemples . . . . .	150
4.3.1	Le schéma de Lax-Friedrichs . . . . .	150
4.3.2	Le schéma d'Engquist-Osher . . . . .	152
4.3.3	Un exemple de schéma d'ordre 2 : le schéma de Lax-Wendroff . . . . .	154
4.3.4	Un exemple fondamental - Le schéma de Godounov . . . . .	155
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>		<b>158</b>





---

## Préambule

Les **équations aux dérivées partielles** sont aux fonctions de **plusieurs variables** ce que les équations différentielles sont aux fonctions d'une variable réelle. Elles expriment, sous forme d'égalités, des relations que doivent satisfaire les dérivées partielles d'une certaine fonction inconnue  $u$  de plusieurs variables afin de décrire un phénomène physique, satisfaire une propriété prescrite, ...etc ... Quand on s'intéresse à une application donnée, on est très vite amené à faire la distinction entre les **EDPs stationnaires** (où toutes les variables jouent un rôle équivalent) et les **EDPs d'évolution** (où une des variables joue un rôle privilégié : le temps). On rencontre de telles équations dès qu'on s'intéresse à des questions de modélisation : en physique, en électromagnétisme, en mécanique du solide et des fluides bien sûr, mais aussi en biologie, en chimie, en économie, en finance... On y est naturellement confronté quand on s'intéresse à des problèmes de calcul des variations ou plus généralement d'optimisation. Savoir manipuler des équations aux dérivées partielles fait de nos jours partie du quotidien de l'ingénieur.

L'objectif de ce cours est d'introduire à l'étude et à la résolution approchée sur ordinateur des équations aux dérivées partielles les plus simples qu'on rencontre dans les applications. Ce cours est un cours de mathématiques appliquées qui prétend à un certain niveau de rigueur et de généralité. Toutefois, compte tenu de la complexité technique du sujet, nous serons parfois amenés à sacrifier quelque peu cette rigueur et cette généralité : la théorie des équations aux dérivées partielles et de leur approximation numérique est une science difficile, au coeur de la recherche moderne en mathématiques, dont seuls les rudiments sont accessibles en première année d'Ecole d'ingénieurs. C'est pourquoi nous avons fait le choix pédagogique d'aborder le sujet par le « petit bout de la lorgnette » en choisissant de présenter, plutôt qu'une grande théorie, des exemples et des problèmes modèles simples pour lesquels on peut aller assez loin dans la description des propriétés des solutions, souvent par le biais de calculs explicites. Qu'on ne s'y trompe pas pour autant : les propriétés que nous mettrons en évidence sont le plus souvent représentatives de ce qui se passe dans le cas général (cela sera d'ailleurs mis en lumière de temps à autre). De plus, la compréhension de ces exemples simples est très utile pour aborder des théories plus élaborées.

Nous avons l'habitude de classer les équations aux dérivées partielles en trois grandes classes fondamentales d'équations : les **équations elliptiques** (qui servent typiquement à décrire des phénomènes d'équilibre en physique) pour les problèmes stationnaires, les **équations paraboliques** (qui permettent de décrire des phénomènes de diffusion) et les **équations hyperboliques** (qui permettent de décrire les phénomènes de propagation) pour les problèmes d'évolution. C'est cette dernière classe d'équations qui fera l'objet de ce cours. Les deux autres catégories seront abordés dans deux cours de deuxième année sur la méthode des éléments finis : les équations elliptiques dans le cours ANN201 et les équations paraboliques dans le cours ANN202.

Dans ce cours, nous abordons les problèmes linéaires et non linéaires que nous traiterons par le biais d'une équation modèle. Pour les équations hyperboliques linéaires, ce sera l'**équation de transport** (voir le Chapitre 1) et nous verrons également les systèmes hyperboliques dont l'étude peut se ramener à un système d'équations de transport indépendantes. Pour les équations hyperboliques non linéaires, enfin, ce seront les lois de conservation scalaires dont le prototype est l'**équation de Burgers** (voir le Chapitre 2). Par souci de simplicité, nous nous limiterons à la dimension 1 d'espace.

Rares sont les situations réalistes pour lesquelles on sait calculer une solution analytique à la main. Pour aller plus loin dans la connaissance fine et « quantitative » des solutions d'une EDPs (dont l'analyse mathématique ne fournira en général que l'existence d'une solution, voire l'unicité et quelques propriétés qualitatives), l'ingénieur sera amené à se tourner vers l'utilisation de méthodes numériques pour calculer une solution approchée. Le second objectif du cours est d'introduire le lecteur à la méthode de discrétisation la plus classique (et la plus simple) : la **méthode des différences finies** qui est la « mère » des méthodes de discrétisation plus élaborées telles que les méthodes d'éléments finis, de volumes finis ou de Galerkin discontinu (qui seront abordées plus tard dans le cursus). La mise en oeuvre de ces méthodes est en général simple. Leur théorie ne l'est pas forcément et un des buts du cours est d'aborder - dans le cas des différences finies - les aspects théoriques des méthodes numériques, ce que l'on appelle l'**analyse numérique**. Nous introduirons en particulier les concepts de **consistance**, de **stabilité** et de **convergence** et les liens étroits entre ces trois notions. Le lecteur exigeant pourra s'offusquer de voir que nous avons choisi la plupart du temps de présenter et analyser les méthodes numériques sur les cas simples pour lesquels on saurait par exemple calculer la solution à la main. A nouveau, le but est pédagogique : il est bien clair qu'une méthode numérique doit bien marcher dans ces cas simples si on veut avoir une chance qu'elle marche dans les cas compliqués. Par ailleurs, sur ces cas simples, on arrive assez facilement à obtenir des résultats d'analyse numérique précis.

Signalons qu'il y a des connections fortes entre ce cours et d'autres cours de Mathématiques de 1ère année, en particulier le cours MA102 sur les outils fondamentaux d'analyse et le cours AO102 sur la théorie des équations différentielles ordinaires, dans lesquels le lecteur trouvera les prérequis nécessaires pour appréhender aisément le contenu de ce cours.





---

# Introduction à la théorie des problèmes hyperboliques linéaires

## 1.1 Exemples de modèles hyperboliques

Commençons par donner quelques exemples d'équations intervenant dans des applications classiques issues de la physique, de la biologie ou des sciences de l'ingénieur. Elles sont toutes de nature hyperbolique, notion qui sera définie plus loin, ce qui signifie concrètement que la vitesse de propagation des « données » est finie, contrairement à l'équation de la chaleur.

### 1.1.1 Equation de transport linéaire

L'équation hyperbolique la plus simple est l'équation de transport linéaire. Elle est de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + c(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Il est naturel de rajouter une condition initiale

$$u(x, t = 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ici le scalaire  $c(x, t)$  est donné : c'est par définition la vitesse de propagation associée à l'équation, au point  $x$  à l'instant  $t$ . On comprendra plus loin cette dénomination.

Cette équation qui peut sembler très simple pose des difficultés numériques (surtout en dimensions supérieures) elle est toujours l'objet de recherches actuellement (il s'agit notamment de savoir calculer la solution sur des temps très grands). Par ailleurs, couplée à d'autres équations, elle pose des difficultés théoriques également. On rencontre cette équation dans un grand nombre d'applications. Citons en quelques unes.

## Exemple 1 : La circulation automobile

On étudie la circulation automobile sur une route. La quantité  $u(x, t)$  représente la quantité de voitures présentes entre les bornes  $x$  et  $x + \Delta x$  à l'instant  $t$  et on appelle  $F(x, t)$  le flux de voitures par minute qui passent à l'instant  $t$  devant la borne  $x$ . On suppose que chaque conducteur ajuste la vitesse de sa voiture en fonction uniquement de la vitesse de la voiture qui le précède. Alors la **conservation de la quantité** de voitures (il n'y a ni station-service, ni itinéraires de délestage) se traduit par :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) = 0.$$

Si toutes les voitures roulent à vitesse constante donnée  $c$ , on a

$$F(x, t) = c u(x, t)$$

et donc l'équation de transport linéaire (1.1).

## Exemple 2 : Les équations cinétiques

La physique cinétique décrit les plasmas ou gaz dilués et fournit un ensemble important d'équations de transport dont les variables sont : le temps  $t$ , la position  $x \in \Omega$  des particules dans  $\Omega$  le domaine d'étude et leur vitesse  $v \in V$  avec  $V$  l'ensemble des vitesses admissibles. L'exemple le plus classique est l'équation de scattering décrivant l'évolution d'une densité  $f(x, t, v)$  de particules (neutrons, amibes ou bactéries en ce qui concerne les applications à la biologie)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t, v) + v \frac{\partial}{\partial x} f(x, t, v) = K[f], \\ f(x, t = 0, v) = f_0(x, v) \quad \text{donnée,} \end{cases}$$

où  $K$  est donnée par :

$$K[f] = \int_V k(v, v') f(x, t, v') dv' - \int_V k(v', v) f(x, t, v') dv',$$

où  $k(v, v')$  représente une probabilité de « tourner » d'une vitesse  $v'$  à une vitesse  $v$ .

Cette équation découle encore d'une relation de **conservation** de la quantité de particules.

## Exemple 3 : Modèle de démographie/renouvellement cellulaire

Ici  $u(x, t)$  représente la densité d'individus d'âge  $x \geq 0$  à l'instant  $t$ . Le taux de mortalité est noté  $d(x)$  et les individus peuvent donner naissance à des nouveaux nés d'âge  $x = 0$

avec un taux de fécondité  $b(x)$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) + d(x)u(x, t) = 0, \\ u(0, t) = \int_0^{+\infty} b(x') u(x', t) dx' \end{cases}$$

Dans le cas de la mitose cellulaire, il est naturel de choisir  $d(x) = \mathbb{1}_{\{x > x_0\}}(x)$  (disparition des cellules qui se divisent) et  $b(x) = 2\mathbb{1}_{\{x > x_0\}}(x)$  (la mitose donne naissance à deux cellules identiques) où  $\mathbb{1}_A$  désigne la fonction caractéristique de  $A$ .

### 1.1.2 L'équation des ondes et ses variantes

L'équation des ondes fournit un des exemples les plus simples de système hyperbolique. Voyons cet aspect en détail. Les ondes scalaires se propagent dans un milieu monodimensionnel selon l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

Il est naturel de rajouter pour cette équation deux conditions initiales

$$\begin{cases} u(x, t = 0) = u^0(x), & x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = u^1(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Ici la constante  $c$  désigne la vitesse de l'onde. Cette équation du deuxième ordre peut aussi être écrite comme un système d'équations hyperboliques du premier ordre. En effet, posons :

$$v = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad w = c \frac{\partial u}{\partial x}.$$

On a alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - c \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - c \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Si on introduit le vecteur  $U$  et la matrice  $C$  définis par :

$$U = \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -c \\ -c & 0 \end{bmatrix}$$

l'équation (1.2) se met sous la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

qu'on peut voir comme une équation de transport linéaire vectorielle où la solution est à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ . C'est en fait un premier exemple de système hyperbolique linéaire tel que nous les définirons plus loin.

Nous donnons dans la suite des exemples de modèles de propagation d'ondes en physique. La liste est évidemment non exhaustive, nous aurions pu citer par exemple également la propagation des ondes élastiques issue des équations de l'élastodynamique.

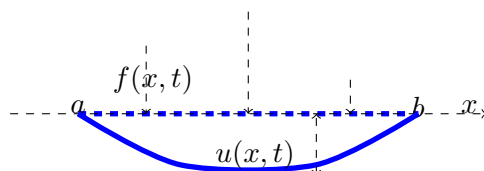


FIGURE 1.1 – Déplacement d'une corde vibrante

#### Exemple 1 : Corde vibrante

Le problème est de calculer le mouvement d'une corde, de longueur  $L$ , fixée en ses extrémités et qui est, soit écartée de sa position d'équilibre et lâchée (corde de guitare), soit frappée (corde de piano) de façon à lui imprimer, en ses différents points, des vitesses de déplacement vertical.

Ainsi au repos, la corde occupe un intervalle  $[a, b]$ . Sous l'action d'une force normale d'intensité  $f$  (dans le cas de la corde de piano) ou d'un écart de sa position d'équilibre  $u^0$  (écart de position) et  $u^1$  (écart de vitesse), la corde se déforme. Si on appelle  $u(x, t)$  le déplacement latéral de la corde au point  $x$  à l'instant  $t$ , les variations de  $u$  sont décrites par les équations (voir aussi la figure 1.1) :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, & \text{pour } t \in \mathbb{R}^+, x \in [a, b], \\ u = 0 & \text{en } x = a \text{ et } x = b \\ u(x, 0) = u^0(x), & \text{pour } x \in [a, b], \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u^1(x), & \text{pour } x \in [a, b]. \end{cases}$$

On montre que dans le cas d'une peau de tambour par exemple, le déplacement normal de la peau vérifie également une équation des ondes, la seule différence est que la position  $x$  est dans un domaine de  $\mathbb{R}^2$ .

#### Exemple 2 : Acoustique linéaire

Le son est en fait une conséquence d'un mouvement matériel d'oscillations : une corde qui vibre ou la membrane d'un haut-parleur par exemple. Cette vibration provoque un

mouvement des atomes l'avoisinant qui va se déplacer de proche en proche sous forme d'onde de pression. La vitesse du son varie suivant le milieu dans lequel il se propage. Le principal facteur est la densité de ce milieu : dans un gaz, sa vitesse est plus faible que dans un liquide. Par exemple, le son se propage approximativement à 340 m/s dans l'air à 15°C, et à 1500 m/s (5400 km/h) dans l'eau.

On appelle  $p(x, t)$  la pression du fluide au point  $x$  à l'instant  $t$  et  $c$  la vitesse du son dans le milieu qu'on suppose constante ici (on dit que le milieu est homogène). La fonction  $p$  est alors solution de l'équation des ondes dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) = f(x, y, z, t)$$

où  $f$  est la source à l'origine du son.

### Exemple 3 : les équations de Maxwell

Dans cet exemple, la solution recherchée n'est plus un scalaire mais un vecteur. Les inconnues de ce problème sont le champ électrique  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^3$ , le champ magnétique  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^3$ , l'induction électrique  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^3$  et l'induction magnétique  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^3$ .

Ces champs obéissent, en l'absence de charges et de courants, aux équations de Maxwell :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{rot} \mathbf{E} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{rot} \mathbf{H},$$

et sont par ailleurs reliés par les lois de comportement :

$$\mathbf{B}(x, t) = \mu \mathbf{H}(x, t) \quad \text{et} \quad \mathbf{D}(x, t) = \varepsilon \mathbf{E}(x, t),$$

où  $\mu$  est la perméabilité magnétique et  $\varepsilon$  la permittivité diélectrique du milieu (constantes strictement positives dans le cas où le milieu est homogène). Ils caractérisent le comportement électromagnétique du matériau dans lequel l'onde se propage. On montre facilement qu'on peut éliminer  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{H}$  des équations pour aboutir à une équation où seul le champ électrique  $\mathbf{E}$  apparaît :

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} (\mathbf{rot} \mathbf{E}) = 0$$

ce qui correspond à une équation des ondes vectorielle dans  $\mathbb{R}^3$ .

Si on suppose que  $\mathbf{E}$  est de direction constante, on montre facilement qu'on retombe sur une équation d'onde scalaire.

## 1.2 L'équation de transport linéaire

### 1.2.1 Le problème de Cauchy pour l'équation de transport linéaire

On appelle équation de transport avec vitesse  $c$ , l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

où  $x$  est une variable d'espace,  $t$  le temps, la vitesse  $c$  est donnée et où la fonction inconnue  $u$  est une fonction à valeurs réelles de deux variables réelles.

On considère ici le problème de Cauchy suivant : trouver  $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, & (i) \\ u(x, 0) = u^0(x), & x \in \mathbb{R}, & (ii) \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $u^0$  est la donnée initiale.

Les hypothèses que nous ferons, dans ce chapitre, sur les données  $c$  et  $u^0$  sont les suivantes. Signalons que l'hypothèse sur la régularité du coefficient  $c(x, t)$  est fondamentale alors que celle sur  $u^0$  pourrait être relaxée, comme cela est d'ailleurs précisé.

- La donnée initiale  $u^0$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , cela permettra de définir les solutions classiques (voir la remarque 1.4). On la suppose également dans  $L^\infty(\mathbb{R})$  et de dérivée dans  $L^\infty(\mathbb{R})$ . Pour résumer,

$$u^0 \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}) := \{u \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}), \quad u' \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})\} \quad \text{où} \quad \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}) := \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}). \quad (1.5)$$

- la fonction  $c(\cdot, \cdot)$  est supposée continue de  $x, t \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  i. e.  $c \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  (nous autorisons le temps à être négatif) lipchitzienne en  $x$ , uniformément par rapport à  $t$  :

$$\exists L > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad |c(x_1, t) - c(x_2, t)| \leq L |x_1 - x_2|. \quad (1.6)$$

Pour simplifier un peu les aspects techniques des démonstrations, nous travaillerons avec l'hypothèse légèrement plus forte suivante :

$$\begin{aligned} c(\cdot, \cdot) &\text{ est continûment dérivable en } x \\ \text{et } \exists L > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad & \left| \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) \right| \leq L. \end{aligned} \quad (1.7)$$

#### Remarque 1.1

Contrairement à ce qui se passe pour le coefficient de diffusion dans l'équation de la chaleur, le signe du coefficient  $c$  n'a aucune importance, en tous cas aucune incidence sur l'existence ou non d'une solution. La vitesse peut donc prendre des valeurs positives et/ou négatives. Il en est de même pour le sens du temps. L'équation de transport peut s'intégrer

indifféremment pour  $t < 0$  ou  $t > 0$ . C'est une équation réversible.

### Remarque 1.2

Rappelons que, le fait que  $x \rightarrow c(x, t)$  soit lipschitzienne entraîne (c'est un résultat non trivial de théorie de la mesure) que la dérivée au sens des distributions

$$x \mapsto \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) \in L^\infty(\mathbb{R}).$$

En ce sens, les hypothèses (1.6) et (1.7) sont très proches.

## 1.2.2 Solutions classiques du problème de Cauchy

### Définition 1.3: Solutions classiques du problème de Cauchy

On dit que  $u$  est une solution classique de l'équation (1.4) si c'est une fonction  $\mathcal{C}^1$  de  $x$  et de  $t$  et si elle satisfait (1.4) point par point, les dérivées étant prises au sens usuel.

Dans ce qui suit, nous allons montrer que le problème (1.4) admet une unique solution classique. On va montrer plus précisément que le problème est bien posé, ce qui signifie qu'en plus de l'existence et l'unicité d'une solution, on sait que la solution est contrôlée, sous une certaine norme, par les données. Cette propriété est essentielle quand on s'intéresse à l'analyse des EDPs issus de la modélisation de phénomènes physiques et à leur discrétisation : une petite erreur sur les données ( erreur liée par exemple à une mesure inexacte ou à une discrétisation) implique une petite erreur sur la solution. On s'interdit donc les effets papillons ou les effets boule de neige!

### Remarque 1.4: Sur la régularité des données

Le lecteur notera que, pour espérer l'existence d'une solution classique, il est nécessaire que la donnée initiale  $u^0$  soit  $\mathcal{C}^1$  et que la fonction  $c(\cdot, \cdot)$  soit continue en ses deux variables. L'utilité de la condition de Lipschitz (1.6) (et même de (1.7)) (qui est toutefois essentielle) n'apparaîtra qu'au moment où nous exposerons la méthode des caractéristiques. Lorsque  $u^0$  est moins régulière ( $u^0 \in L^p$  par exemple) on peut toujours donner un sens à l'équation grâce à la notion de solution faible. Ceci sera abordé plus en détail dans l'étude des équations hyperboliques non linéaires.

Commençons donc par la définition du caractère bien posé d'un problème.

### Définition 1.5: Caractère bien posé au sens de Hadamard

On dit qu'un problème est bien posé dans  $V$ , un espace vectoriel normé, au sens de Hadamard si et seulement si il y a



**Existence** il existe au moins une solution dans  $V$  ;

**Unicité** il existe au plus une solution dans  $V$  ;

**Stabilité** la solution dépend de façon continue des données dans le cadre de la topologie de  $V$ , ou dit autrement sa norme dans  $V$  est contrôlée par les données.

Si nous cherchons une solution classique, l'espace naturel pour notre problème est  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ . Il n'est pas évident d'introduire une norme pour l'espace  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ . Nous allons contourner cette question en utilisant le fait que  $u^0 \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$  (ce qui est souvent le cas en pratique) et nous allons chercher une solution dans

$$\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) := \left\{ v \in C_b^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+), \frac{\partial v}{\partial t} \text{ et } \frac{\partial v}{\partial x} \in C_b^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \right\}$$

où  $C_b^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) := C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ .

On munit  $\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  de la norme

$$\|v\|_{\mathcal{C}_b^1} := \|v\|_{L^\infty} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L^\infty} + \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^\infty}.$$

Nous allons voir que la méthode pour montrer que le problème est bien posé est constructive et repose sur la technique des caractéristiques. Nous commençons par traiter le cas de la vitesse constante puis nous étudierons le cas général qui est un peu moins explicite.

## 1.3 Résolution de l'équation de transport à coefficients constants

### 1.3.1 Méthode des caractéristiques et caractère bien posé

Dans le cas où  $c(\cdot, \cdot)$  est une fonction constante,  $c(x, t) = c$ , le problème devient : trouver  $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, & (i) \\ u(x, 0) = u^0(x), & x \in \mathbb{R}, & (ii) \end{cases} \quad (1.8)$$

où  $u^0$  est la donnée initiale qui vérifie l'hypothèse (1.5).

Dans ce cas, l'opérateur de transport  $\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}$  peut s'interpréter comme un opérateur de dérivation dans une direction oblique du plan  $(x, t)$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} = \nabla_{x,t} \cdot \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla_{x,t} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right)^t.$$

Par conséquent, les solutions classiques de (1.8) sont constantes le long de la famille de droites du demi-plan  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  parallèles au vecteur  $(c, 1)^t$ , c'est à dire l'ensemble des droites  $\mathcal{D}_{x_0}$  dont l'équation s'écrit  $x - ct = x_0$  avec  $x_0 \in \mathbb{R}$  :

$$\mathcal{D}_{x_0} := \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ / x - ct = x_0\}. \quad (1.9)$$

Par définition, l'ensemble des droites  $\{\mathcal{D}_{x_0}, x_0 \in \mathbb{R}\}$  est la famille des droites caractéristiques de (1.8).

Une autre façon d'obtenir le même résultat est d'utiliser la notion plus générale des courbes caractéristiques, dont la définition s'étendra facilement au cas de la vitesse variable, à des équations de transport avec amortissement et aux équations hyperboliques non linéaires.

#### Définition 1.6: Courbes caractéristiques

On appelle courbe caractéristique, les fonctions  $X(t)$  telles que

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right] (X(t), t) = \frac{d}{dt} [u(X(t), t)]$$

On note qu'il y a un abus de langage dans cette définition : on dit que la fonction  $X(t)$  est une courbe alors que c'est  $t \rightarrow (X(t), t)$  qui décrit une courbe dans le demi-plan  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . Notons également que la dérivée dans le membre de droite est droite car  $t \mapsto u(X(t), t)$  est une fonction (certes composée) qui ne dépend que de  $t$ . On rappelle que

$$\frac{d}{dt} [u(X(t), t)] = \frac{\partial u}{\partial t}(X(t), t) + \frac{dX}{dt}(t) \frac{\partial u}{\partial x}(X(t), t).$$

Dans le cas de l'équation de transport à vitesse constante, par définition et en utilisant la relation précédente, on trouve que les courbes caractéristiques vérifient

$$\frac{dX}{dt}(t) = c, \quad t \geq 0.$$

Les courbes caractéristiques sont donc des droites caractéristiques dans ce cas. Si on paramétrise la famille des droites caractéristiques par la valeur notée  $x_0$  qu'elles prennent en 0, chaque droite caractéristique de la famille  $\{X_{x_0}, x_0 \in \mathbb{R}\}$  est l'unique solution de l'équation différentielle ordinaire (on notera EDO dans la suite)

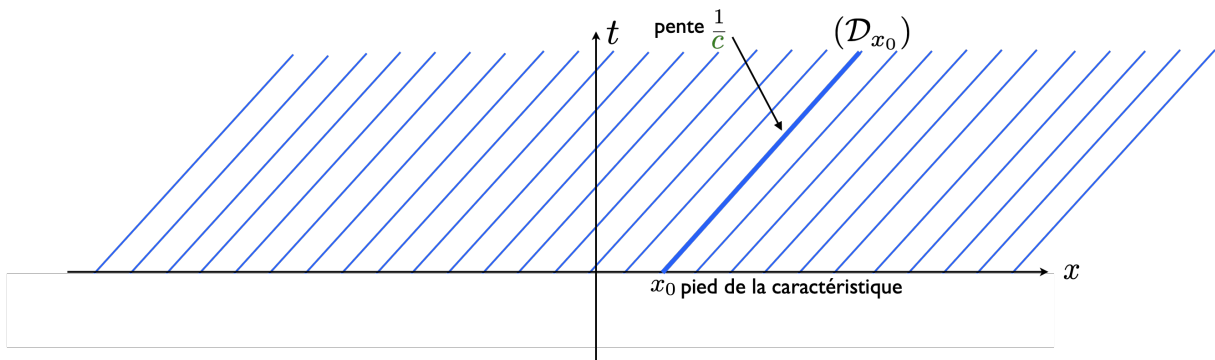
$$\begin{cases} \frac{dX_{x_0}}{dt}(t) = c, \quad t \geq 0 \\ X_{x_0}(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.10)$$

ce qui implique que les droites caractéristiques sont d'équation

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad X_{x_0}(t) = ct + x_0$$

On retrouve les droites caractéristiques  $\mathcal{D}_{x_0}$  dont la définition (1.9) peut se réécrire

$$\mathcal{D}_{x_0} := \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ / x = X_{x_0}(t)\}.$$



**FIGURE 1.2** – Droites caractéristiques  $\{\mathcal{D}_{x_0}, x_0 \in \mathbb{R}\}$  représentées dans le plan  $(x, t)$  :  $x = ct + x_0 \Rightarrow t = (x - x_0)/c$ .

Les droites caractéristiques forment un fibrage du plan du demi plan  $(x, t)$  : elles remplissent tout le demi-plan et elles ne se croisent pas (voir Figure 1.2) :

$$\mathcal{D}_{x_0} \cap \mathcal{D}_{x'_0} = \emptyset \quad \text{pour } x_0 \neq x'_0, \quad \bigcup_{x_0 \in \mathbb{R}} \mathcal{D}_{x_0} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+. \quad (1.11)$$

En d'autres termes, par tout point  $(x, t)$ , passe une droite caractéristique  $X_{x_0}$  et une seule :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad \exists! x_0 \in \mathbb{R} \text{ telle que } x = X_{x_0}(t) \quad \text{et on a} \quad x_0 = x - ct.$$

Voyons maintenant comment construire  $u$  une solution classique de l'équation de transport (1.8) à l'aide des droites caractéristiques. On suppose donc pour l'instant qu'il existe au moins une solution classique. Nous allons bien évidemment utiliser la condition initiale. Le long des droites caractéristiques  $\{X_{x_0}(t), x_0 \in \mathbb{R}\}$ , la solution vérifie

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right] (X_{x_0}(t), t) = 0,$$

car  $u$  est solution classique donc elle est solution de l'équation de transport pour tout  $(x, t)$  et donc en particulier pour  $(x = X_{x_0}(t), t)$ . De plus, on a

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right] (X_{x_0}(t), t) = \frac{d}{dt} [u(X_{x_0}(t), t)]$$

par définition des courbes caractéristiques (voir Définition 1.6). On déduit de ces deux égalités que

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{d}{dt} [u(X_{x_0}(t), t)] = 0$$

Si on fixe  $x_0 \in \mathbb{R}$ , on a donc que la fonction  $v(t) = u(X_{x_0}(t), t)$  est une fonction constante :  $v(t) = v(0)$  soit

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad u(X_{x_0}(t), t) = u(X_{x_0}(0), 0) = u^0(x_0)$$

où on a utilisé pour établir la deuxième égalité la condition initiale pour  $u$  (voir (1.8)-(ii)) et la condition initiale pour  $X_{x_0}$  (voir (1.10)). Ceci étant vrai pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ , nous concluons :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad u(X_{x_0}(t), t) = u^0(x_0)$$

La solution de l'équation de transport est donc constante le long des caractéristiques.

Plutôt que de suivre les caractéristiques, nous allons chercher maintenant à établir une expression pour la solution  $u(x, t)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $t \in \mathbb{R}^+$ . Fixons donc  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . Pour calculer la valeur de la solution au point  $(x, t)$  nous utilisons qu'il existe une et une seule caractéristique qui passe par le point  $(x, t)$  (établie un peu plus haut) :

$$\exists! x_0 \in \mathbb{R} \text{ telle que } x = X_{x_0}(t) \quad \text{et on a} \quad x_0 = x - ct.$$

La solution  $u$  de (1.8) étant, si elle existe, constante le long de cette caractéristique, on a

$$u(x, t) = u(X_{x_0}(t), t) = u^0(x_0) = u^0(x - ct). \quad (1.12)$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour démontrer le caractère bien posé de l'équation de transport.

#### Théoreme 1.7

Pour toute donnée initiale  $u^0 \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$ , le problème (1.8) est bien posé dans  $\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ . L'unique solution  $u \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  est donnée par

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad u(x, t) = u^0(x - ct).$$

**PREUVE:** Soit  $u^0 \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$ , nous allons montrer le caractère bien posé dans  $\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  en établissant l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution classique.

**Existence et stabilité :** on pose pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ ,  $U(x, t) = u_0(x - ct)$ . On a de manière évidente  $U \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  avec (en utilisant la formule de dérivation des fonctions composées) :

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, t) = \frac{du^0}{dx}(x - ct) \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x, t) = -c \frac{du^0}{dx}(x - ct)$$

où on a utilisé que  $u^0$  ne dépend que d'une variable donc sa dérivée est droite. Ceci nous permet de déduire facilement que

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial U}{\partial x}(x, t) = 0.$$

Nous avons également par définition de  $U$  que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $U(x, 0) = u^0(x)$ .  $U$  est donc bien solution classique de (1.8). De plus, on a bien  $U \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  car

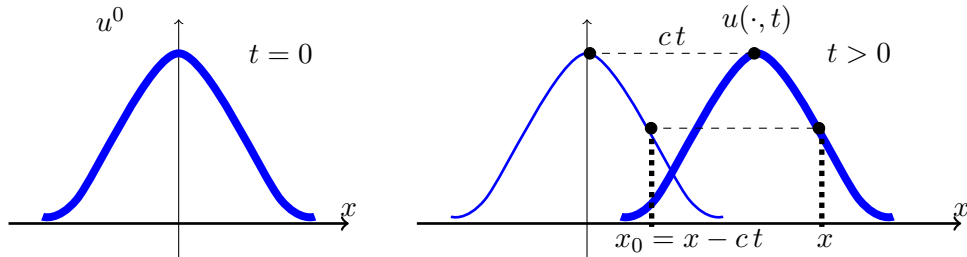
$$\|U\|_{\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)} = \|u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad \left\| \frac{\partial U}{\partial x} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)} = \left\| \frac{du^0}{dx} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial U}{\partial t} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)} = c \left\| \frac{du^0}{dx} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

Ceci démontre également la stabilité par rapport aux données :

$$\|U\|_{\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)} \leq (1 + c) \|u^0\|_{\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})}.$$

**Unicité :** on a vu dans les pages précédentes que si il existe une solution classique, elle est nécessairement donnée par l'expression du théorème. ■

Le graphe de la solution  $x \mapsto u(x, t)$  à l'instant  $t$  fixé se déduit du graphe de la donnée initiale



(a) Condition initiale

(b) Construction de la solution à l'instant  $t$ 

**FIGURE 1.3** – Solution de l'équation du transport pour  $c > 0$ .

$u^0$  par une translation de longueur  $ct$  selon l'axe des abscisses : la formule (1.12) représente une fonction qui se propage (ou se transporte) sans déformation à la vitesse constante  $c$  (voir la figure (1.3)). Ceci justifie le fait que l'on appelle le coefficient  $c$  vitesse de l'équation de transport.

Il est immédiat à partir du théorème 1.7 de vérifier les propriétés suivantes.

— **Propagation à vitesse finie.** De façon évidente

$$\text{supp } u^0 \subset [a, b] \implies \text{supp } u(\cdot, t) \subset [a + ct, b + ct].$$

— **Préservation de la régularité.** De façon tout à fait évidente, la régularité en la variable  $x$  de la solution  $u(\cdot, t)$  est pour tout  $t$  la même que celle de  $u^0$ .

— **Conservation de la norme  $L^p$ .** Du fait de l'invariance de l'intégrale par translation, on a évidemment

$$\forall p \in [1, +\infty], \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \|u(\cdot, t)\|_{L^p} = \|u^0\|_{L^p}.$$

ce qui signifie que l'application linéaire  $S(t) : u^0 \mapsto u(\cdot, t)$  est une isométrie dans tous les espaces  $L^p$ . On a donc aucun effet de dissipation.

Quand on évoque la conservation de la norme  $L^2$ , on parle souvent de conservation de l'énergie. Ce résultat est très général et peut s'obtenir directement à partir de l'équation de transport (1.8) (sans utiliser l'expression que nous venons d'obtenir). En effet, on suppose que  $u^0$  et sa dérivée sont dans  $L^2$ , comme la régularité est préservée il en est de même de  $u(\cdot, t)$  et  $\partial u(\cdot, t)$  pour tout  $t$ . Quand on multiplie (1.8)-(i) par  $u$  et qu'on intègre  $x$  dans  $\mathbb{R}$ , on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} u \right] (x, t) dx + c \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} u \right] (x, t) dx = 0.$$

Or  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x} u dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{u^2}{2} \right] dx = 0$  où on a utilisé qu'une fonction dans  $L^2(\mathbb{R})$  dont la

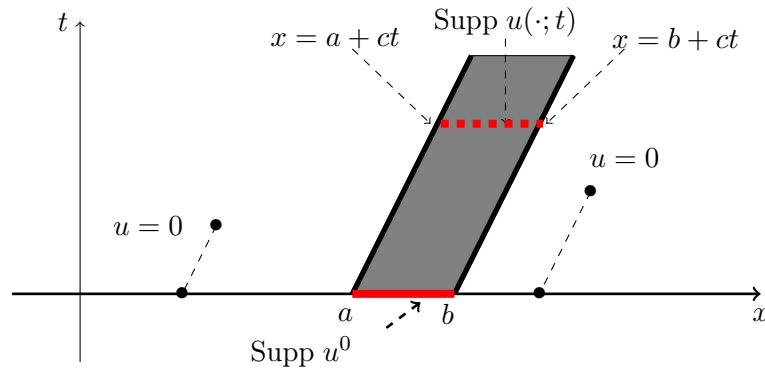


FIGURE 1.4 – Vitesse de propagation finie, cas constant.

dérivée est dans  $L^2$  tend vers 0 aux infinis. Par conséquent

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x, t) dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (u^0)^2(x) dx$$

Nous pouvons également montrer ce résultat en utilisant la transformation de Fourier en espace, dont nous rappelons les principales propriétés dans la section suivante.

### 1.3.2 Rappels sur la transformée de Fourier

#### Définition 1.8: Transformée de Fourier

La transformée de Fourier est définie par :

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f} \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}),$$

où  $\hat{f}$  est donnée par

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx.$$

La transformée  $\mathcal{F}$  est injective et si  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , on a la formule d'inversion :

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk.$$

On rappelle également que  $\mathcal{F}$  agit sur les opérateurs de dérivation :

$$f \in L^1(\mathbb{R}), \frac{\partial f}{\partial x} \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{F} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = ik \mathcal{F}f.$$

Par ailleurs, il est bien connu que  $\mathcal{F}$  est un isomorphisme de  $L^2(\mathbb{R})$  dans lui-même et qu'on a le théorème de Plancherel :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2 dk = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx,$$

On rappelle enfin que, si on définit le produit de convolution de deux fonctions dans  $L^2(\mathbb{R})$  par

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}),$$

alors

$$\mathcal{F}(f * g) = \hat{f} \hat{g}.$$

Enfin, nous rappelons les propriétés de la transformée de Fourier vis à vis des gaussiennes et d'un changement d'échelle

$$e^{-\frac{k^2}{2}} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{et} \quad \hat{u}(ak) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{1}{a} u\left(\frac{x}{a}\right) \quad (a \in \mathbb{R}),$$

et finalement des translations ( $a \in \mathbb{R}$ )

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \quad \tau_a f(x) = f(x+a) \implies \mathcal{F}(\tau_a f)(k) = e^{ika} \mathcal{F}f(k). \quad (1.13)$$

### 1.3.3 Résolution de l'équation de transport à coefficients constants par Fourier

Il est instructif de chercher à résoudre l'équation de transport (1.8) en utilisant la transformation de Fourier en espace.

$$u(x, t) \rightarrow \hat{u}(k, t).$$

On suppose que  $u^0$  et sa dérivée sont dans  $L^2$ , (comme précédemment la régularité est préservée) il en est de même de  $u(\cdot, t)$  et  $\partial_x u(\cdot, t)$  pour tout  $t$ . En appliquant la transformation de Fourier spatiale à (1.8) on obtient pour tout  $k$  l'équation différentielle ordinaire

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{d\hat{u}}{dt}(k, t) + \imath ck \hat{u}(k, t) = 0,$$

ce qui donne, compte tenu de la condition initiale

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \hat{u}(k, t) = e^{-\imath ckt} \hat{u}^0(k).$$

Le lecteur notera alors que

- L'expression de la solution classique donnée dans le théorème 1.7 se retrouve en utilisant les propriétés de la transformation de Fourier vis à vis des translations (voir (1.13)).
- On a en particulier

$$|\hat{u}(k, t)| = |\hat{u}^0(k)|.$$

Grâce au théorème de Plancherel, on retrouve la conservation de la norme  $L^2$ .

- On a également

$$\hat{u}(k, t + \Delta t) = \hat{S}(k, \Delta t) \hat{u}(k, t), \quad \hat{S}(k, \Delta t) = e^{-\imath ck \Delta t}. \quad (1.14)$$

Le coefficient complexe  $\hat{S}(k, \Delta t) \in \mathbb{C}$  qu'on appelle coefficient d'amplification

- est de module 1 : c'est la manifestation du caractère non dissipatif de l'équation de transport à coefficients constants,
- a une phase proportionnelle à  $k$  : c'est la manifestation du caractère non dispersif de l'équation de transport à coefficients constants.

## 1.4 Résolution de l'équation de transport à coefficients variables

On cherche maintenant à résoudre (1.4) avec la vitesse  $c$  qui dépend éventuellement de la variable d'espace  $x$  et la variable du temps  $t$  et qui vérifie l'hypothèse (1.6).

### 1.4.1 Méthode des caractéristiques

Cette fois, l'opérateur de transport à coefficients variables

$$\frac{\partial}{\partial t} + c(x, t) \frac{\partial}{\partial x}$$

n'est plus vraiment un opérateur de dérivation oblique. Par contre, il peut s'interpréter, comme nous allons le détailler, comme un opérateur de dérivation tangente le long d'une famille de courbes, appelées courbes caractéristiques, qui vont jouer le rôle des droites  $\{\mathcal{D}_{x_0}, x_0 \in \mathbb{R}\}$  dans le cas où  $c$  était constant. Géométriquement, ces courbes sont les courbes enveloppes du champ de vecteur  $2D$

$$(x, t) \implies \begin{pmatrix} c(x, t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour les introduire de façon plus analytique, on utilise la définition donnée dans la section précédente :

#### Définition 1.9: Courbes caractéristiques

On appelle courbe caractéristique, les fonctions  $X(t)$  telles que

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right] (X(t), t) = \frac{d}{dt} [u(X(t), t)]$$

On rappelle que

$$\frac{d}{dt} [u(X(t), t)] = \frac{\partial u}{\partial t}(X(t), t) + \frac{dX}{dt}(t) \frac{\partial u}{\partial x}(X(t), t).$$

Ainsi si  $u$  est une solution de (1.4) alors nécessairement les courbes caractéristiques vérifient

$$\frac{dX}{dt}(t) = c(X(t), t), \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (1.15)$$

Les courbes caractéristiques ne sont donc en général pas des droites. On peut s'intéresser maintenant à la famille des courbes caractéristiques  $\{X_{x_0}, x_0 \in \mathbb{R}\}$  par la valeur notée  $x_0$  qu'elles prennent en 0. Chaque courbe caractéristique satisfait donc l'EDO

$$\begin{cases} \frac{dX_{x_0}}{dt}(t) = c(X_{x_0}(t), t), & t \in \mathbb{R}^+ \\ X_{x_0}(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.16)$$

L'hypothèse (1.6) est précisément l'hypothèse qui nous permet d'appliquer le célèbre théorème de Cauchy-Lipschitz relatif à la résolution des équations différentielles ordinaires. Nous renvoyons le lecteur à [Jean, 2017] pour une démonstration.



**Théoreme 1.10**

Supposons que  $c$  vérifie l'hypothèse (1.6). Pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ , le problème (1.16) admet une unique solution

$$t \mapsto X_{x_0}(t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}).$$

On utilise maintenant la même démarche que dans le cas de la vitesse constante. On suppose qu'il existe une solution classique et on cherche une expression de cette solution à l'aide de la méthode des caractéristiques. Ainsi, comme le long des courbes caractéristiques  $\{X_{x_0}(t), x_0 \in \mathbb{R}\}$ , la solution classique vérifie l'équation de transport (1.4)-(i) on a

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right] (X_{x_0}(t), t) = 0,$$

et par définition des courbes caractéristiques (voir Définition 1.9), on déduit que

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{d}{dt} [u(X_{x_0}(t), t)] = 0.$$

Comme dans le cas constant, nous avons

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad u(X_{x_0}(t), t) = u(X_{x_0}(0), 0) = u^0(x_0)$$

où on a utilisé pour établir la deuxième inégalité la condition initiale pour  $u$  (voir (1.4)-(ii)) et la condition initiale pour  $X_{x_0}$  (voir (1.16)). Ceci étant vrai pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ , nous concluons :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad u(X_{x_0}(t), t) = u^0(x_0)$$

La solution de l'équation de transport est donc constante le long des courbes caractéristiques.

Cherchons maintenant à établir une expression de la solution classique  $u(x, t)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ . Fixons donc  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . Existe-t-il une courbe caractéristique qui passe par le point  $(x, t)$ ? Si oui, est ce qu'il en existe une seule? La réponse est beaucoup moins évidente que pour le cas de la vitesse constante, où les courbes sont des droites parallèles! Répondre à ces questions revient naturellement à chercher si il existe une unique solution de l'EDO

$$\begin{cases} \frac{dX}{ds}(s) = c(X(s), s), & s \in \mathbb{R}^+ \\ X(t) = x. \end{cases} \quad (1.17)$$

Notons que comme le temps  $t$  fixé est maintenant utilisé, nous allons noter  $s$  la variable temporelle dans l'EDO.

L'existence et l'unicité de la solution de cette EDO est également donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

**Théoreme 1.11**

Supposons que  $c$  vérifie l'hypothèse (1.6). Pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ , le problème (1.17) admet une unique solution

$$s \mapsto X(s; x, t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}).$$

L'application  $X(\cdot; \cdot, \cdot)$  ainsi définie est appelée flot de l'équation différentielle (1.15).

Nous pouvons facilement relier les notations des théorèmes 1.10 et 1.11 :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall s \in \mathbb{R}^+, \quad X_{x_0}(s) \equiv X(s; x_0, 0). \quad (1.18)$$

Nous savons donc maintenant que pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ , il existe une unique solution  $s \rightarrow X(s; x, t)$  du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial s}(s; x, t) = c(X(s; x, t), s), & s \in \mathbb{R}, & (i) \\ X(t; x, t) = x. & & (ii) \end{cases} \quad (1.19)$$

Notons qu'il faut déterminer la solution de (1.19) aussi bien pour  $s < t$  que pour  $s > t$ .

**Remarque 1.12**

Dans le cas où  $c$  est constant, il est facile de montrer que

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \forall s \in \mathbb{R}^+, \quad X(s; x, t) = x + c(s - t).$$

On a en particulier  $X(0; x, t) = x - ct$ . On retrouve l'expression du pied de la caractéristique qui passe par le point  $(x, t)$ .

Nous pouvons maintenant mettre en place la méthode des caractéristiques. Supposons que (1.4) ait une solution classique. Pour calculer sa valeur en  $(x, t)$ , nous savons maintenant qu'il existe une unique courbe caractéristique  $\mathcal{C}(x, t)$  qui passe par le point  $(x, t)$ . On montre comme précédemment que  $u$  est constante le long de la caractéristique  $\mathcal{C}(x, t)$  :

$$\forall s \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{d}{ds} [u(X(s; x, t), s)] = 0.$$

Autrement dit :

$$\forall s \in \mathbb{R}^+, \quad u(x, t) = u(X(s; x, t), s).$$

En particulier, en prenant  $s = 0$ , on introduit naturellement le pied de la caractéristique  $\mathcal{C}(x, t)$ , à savoir  $(X(0; x, t), 0)$  et on obtient en utilisant la condition initiale :

$$u(x, t) = u^0(X(0; x, t)). \quad (1.20)$$

Pour montrer que la fonction ainsi définie est bien solution classique de (1.4), il faut établir quelques propriétés des courbes caractéristiques.

### 1.4.2 Propriétés des courbes caractéristiques

Nous appellerons courbe caractéristique de (1.4) toute courbe intégrale de (1.19) pour  $(x, t)$  fixé, c'est à dire la courbe du plan  $(y, s)$  (paramétrée par  $s$ ) définie par :

$$\mathcal{C}(x, t) = \left\{ (y, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad y = X(s; x, t) \right\}.$$

La courbe  $\mathcal{C}(x, t)$  est la caractéristique de (1.4) qui passe par le point  $(x, t)$ . C'est l'équivalent des droites caractéristiques du cas précédent.

Nous allons maintenant établir quelques propriétés des courbes caractéristiques qui se traduisent en travers de celle de la fonction  $X$  et leur démonstration est simplement un exercice d'application (répétée) du théorème de Cauchy-Lipschitz et principalement du résultat d'unicité associé.

La première propriété précise ce qui est presque une tautologie, à savoir que deux courbes caractéristiques  $\mathcal{C}(x, t)$  et  $\mathcal{C}(x', t')$  coïncident si et seulement si  $(x, t)$  et  $(x', t')$  appartiennent à une même trajectoire de l'équation différentielle (1.15).

#### Proposition 1.13

$$\mathcal{C}(x, t) = \mathcal{C}(x', t') \iff x' = X(t'; x, t) \iff x = X(t; x', t'). \quad (1.21)$$

En termes du flot  $X$ , cela traduit la relation fondamentale.

$$\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad X(s; x, t) = X(s; X(t'; x, t), t'). \quad (1.22)$$

Cette propriété exprime une propriété (assez intuitive d'ailleurs) dite de semi-groupe de l'équation différentielle (1.15) qui exprime le fait qu'intégrer (1.15) de  $s$  à  $t$  en partant de la position  $x$  équivaut à intégrer (1.15) d'abord entre  $t$  et  $t'$  pour calculer  $X(t'; x, t)$ , puis repartir de  $t'$  pour aller jusqu'au temps  $s$  à partir de la nouvelle position « initiale »  $X(t'; x, t)$  au temps  $t'$ .

**PREUVE DE LA PROPOSITION 1.13 :** Démontrer (1.22) est essentiellement un jeu d'écriture. Fixons  $t, t'$  et  $x$  et introduisons les deux fonctions de la variable réelle  $s$

$$Y_1(s) = X(s; x, t), \quad Y_2(s) = X(s; X(t'; x, t), t').$$

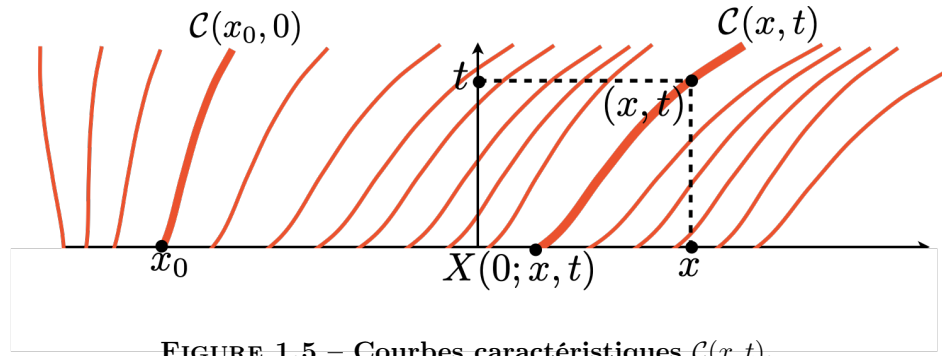
Par définition de  $X(\cdot; \cdot, \cdot)$  (voir (1.19)),  $Y_1$  et  $Y_2$  satisfont la même équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{dY_1}{ds}(s) = c(Y_1(s), s), \quad \frac{dY_2}{ds}(s) = c(Y_2(s), s).$$

De plus si on regarde en  $s = t'$ , il vient grâce à (1.19)-(ii)

$$Y_2(t') = X(t'; X(t'; x, t), t') = X(t'; x, t) = Y_1(t').$$

Grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz (et plus précisément le résultat d'unicité), nous savons que  $Y_1$  et  $Y_2$  coïncident pour tout  $s$ , ce que nous voulions démontrer.

FIGURE 1.5 – Courbes caractéristiques  $\mathcal{C}(x, t)$ .

Démontrons la première équivalence de (1.21). La seconde se déduisant de la même façon. L'égalité  $C(x, t) = C(x', t')$  entraîne en particulier que  $(x', t')$  appartient à  $C(x, t)$  ce qui veut dire que  $x' = X(t'; x, t)$ . La réciproque repose sur (1.22). En effet, si  $x' = X(t'; x, t)$ , on a

$$\left\{ \begin{array}{ll} C(x', t') &= \{ (s, X(s; x', t')), s \in \mathbb{R} \}, & \text{(par définition)} \\ &= \{ (s, X(s; X(t'; x, t), t')), s \in \mathbb{R} \}, & \text{(par hypothèse)} \\ &= \{ (s, X(s; x, t)), s \in \mathbb{R} \}, & \text{(par (1.22))} \\ &= C(x, t). & \text{(par définition)} \end{array} \right.$$

■

Par ailleurs, à un instant  $t$  donné, l'ensemble des courbes caractéristiques  $\mathcal{C}(x, t)$  forme, quand  $x$  décrit  $\mathbb{R}$  un ensemble de courbes disjointes qui remplissent le plan : on dit qu'elles forment un **fibrage du plan** (voir le schéma de la figure 1.5).

#### Proposition 1.14

$$\mathcal{C}(x, t) \cap \mathcal{C}(x', t) = \emptyset \text{ pour } x \neq x' \text{ et } \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \mathcal{C}(x, t) = \mathbb{R}^2. \quad (1.23)$$

Cela se traduit en termes de l'application  $X$  par la propriété suivante.

$$\text{Pour tout } (s, t), \text{ l'application } x \mapsto X(s; x, t) \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}. \quad (1.24)$$

et l'inverse est donnée par

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}, \quad y = X(s; x, t) \Leftrightarrow x = X(t; y, s), \quad (1.25)$$

Ceci exprime que pour revenir de  $x$  à  $x$ , on peut tout d'abord aller au point  $X(s; x, t)$  en intégrant de  $t$  à  $s$  en partant du point  $x$  à l'instant  $t$ , puis revenir en  $x$  en intégrant en marche arrière de  $s$  à  $t$ , en partant du point  $X(s; x, t)$  à l'instant  $s$ .

**PREUVE DE LA PROPOSITION 1.14 :** L'injectivité de  $X(s; \cdot, t)$  est une conséquence de Cauchy-Lipschitz : si  $X(s; x, t) = X(s; x', t)$ , les fonctions  $\tau \rightarrow X(\tau; x, t)$  et  $\tau \rightarrow X(\tau; x', t)$  seraient deux solutions de (1.15) qui coïncideraient en  $\tau = s$ . D'après le théorème d'unicité, on en déduit qu'elles sont égales pour tout  $\tau$  et donc pour  $\tau = t$  ce qui donne  $x = x'$  compte tenu de (1.19-(ii)).

Si nous choisissons  $t = s$  et  $t' = t$  dans (1.22) nous obtenons, compte tenu de (1.19-(ii)),

$$x = X(s; X(t; x, s), t),$$

ce qui démontre à la fois la surjectivité de  $X(s; \cdot, t)$  et la formule (1.25).

Finalement, la propriété (1.23) ne fait que traduire géométriquement la bijectivité des applications  $X(s; \cdot, t)$ . ■

Enfin, sous l'hypothèse (1.7), on peut démontrer (mais ce n'est pas si évident que cela) que  $X$  est également une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  par rapport aux variables  $x$  et  $t$  et que les fonctions

$$\begin{cases} s \rightarrow \dot{X}_x(s; x, t) := \frac{\partial X}{\partial x}(s; x, t), \\ s \rightarrow \dot{X}_t(s; x, t) := \frac{\partial X}{\partial t}(s; x, t), \end{cases}$$

sont respectivement les solutions des équations différentielles linéaires

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{X}_x}{\partial s}(s; x, t) - \frac{\partial c}{\partial x}(X(s; x, t), s) \dot{X}_x(s; x, t) = 0, & s \in \mathbb{R}, \\ \dot{X}_x(t; x, t) = 1, \end{cases} \quad (1.26)$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{X}_t}{\partial s}(s; x, t) - \frac{\partial c}{\partial x}(X(s; x, t), s) \dot{X}_t(s; x, t) = 0, & s \in \mathbb{R}, \\ \dot{X}_t(t; x, t) = -c(x, t). \end{cases} \quad (1.27)$$

Ces équations s'intègrent « à la main » et on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial x}(s; x, t) = \exp \left( \int_t^s \frac{\partial c}{\partial x}(X(\tau; x, t), \tau) d\tau \right), & (i) \\ \frac{\partial X}{\partial t}(s; x, t) = -c(x, t) \exp \left( \int_t^s \frac{\partial c}{\partial x}(X(\tau; x, t), \tau) d\tau \right). & (ii) \end{cases} \quad (1.28)$$

En particulier on voit que  $s$  étant fixé la fonction  $(x, t) \rightarrow X(s; x, t)$  vérifie une équation aux dérivées partielles qui n'est autre que l'équation de transport.

#### Proposition 1.15

Supposons que  $c$  vérifie l'hypothèse (1.7). Alors,  $x \mapsto X(s; x, t)$  et  $t \mapsto X(s; x, t)$  sont des fonctions  $\mathcal{C}^1$  et on a

$$\forall s \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{\partial X}{\partial t}(s; x, t) + c(x, t) \frac{\partial X}{\partial x}(s; x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+. \quad (1.29)$$

**AUTRE PREUVE DE (1.29):** On peut démontrer (1.29) à partir de (1.22). En effet, dérivons (1.22) par rapport à  $t'$ ,  $(x, s, t)$  étant fixés. En utilisant le théorème de dérivée composée, il vient :

$$0 = \frac{\partial X}{\partial t}(s; X(t'; x, t), t') + \frac{\partial X}{\partial x}(s; X(t'; x, t), t') \frac{\partial X}{\partial t}(t'; x, t),$$

c'est dire, compte tenu de (1.19-(i))

$$\frac{\partial X}{\partial t}(s; X(t'; x, t), t') + c(X(t'; x, t), t') \frac{\partial X}{\partial x}(s; X(t'; x, t), t') = 0.$$

En choisissant  $t' = t$  et en utilisant (1.19-(ii)), nous aboutissons à (1.29). ■

#### Remarque 1.16

L'expression (1.28) montre que

$$\frac{\partial X}{\partial x}(s; x, t) > 0,$$

et par conséquent que, pour tout  $(s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , la fonction  $x \rightarrow X(s; x, t)$  est strictement croissante. On peut ainsi retrouver le résultat d'injectivité de cette fonction (voir la proposition 1.14).

#### Remarque 1.17

Si  $c$  ne vérifie que l'hypothèse (1.6), on peut montrer que  $X$  admet presque partout des dérivées partielles par rapport aux variables  $x$  et  $t$  qui sont toujours caractérisées par les équations (1.26) et (1.27), la dérivée en  $x$  de  $c$  étant prise au sens des distributions.

### 1.4.3 Caractère bien posé

Nous avons maintenant tous les éléments pour montrer qu'il existe une unique solution classique de (1.4).

#### Théoreme 1.18

Supposons que la fonction  $c$  vérifie (1.6). Pour toute donnée initiale  $u^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ , il existe une unique solution  $u \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  du problème (1.4) qui est donnée par

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad u(x, t) = u^0(X(0; x, t)).$$

**PREUVE:** Nous allons démontrer le résultat pour  $c$  vérifiant l'hypothèse plus restrictive (1.7). En effet, dans ce cas, nous allons pouvoir utiliser la proposition 1.15. Le cas plus général se traite de manière similaire en remplaçant les dérivées du flot prises au sens classique par des dérivées prises au sens des distributions (voir la remarque (1.17)).

**Existence :** on pose pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ ,  $U(x, t) = u_0(X(0; x, t))$ . Comme  $u^0$  est  $\mathcal{C}^1$  et d'après

la proposition 1.15, on a que  $U \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  avec (en utilisant la formule de dérivation des fonctions composées) :

$$(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad \frac{\partial U}{\partial x}(x, t) = \frac{du^0}{dx}(X(0; x, t)) \frac{\partial X}{\partial x}(0; x, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x, t) = \frac{du^0}{dx}(X(0; x, t)) \frac{\partial X}{\partial t}(0; x, t)$$

où on a utilisé que  $u^0$  ne dépend que d'une variable donc sa dérivée est droite. Ceci nous permet de déduire que

$$(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x, t) + c(x, t) \frac{\partial U}{\partial x}(x, t) = \frac{du^0}{dx}(X(0; x, t)) \left[ \frac{\partial X}{\partial t}(0; x, t) + c(x, t) \frac{\partial X}{\partial x}(0; x, t) \right] = 0$$

où on a utilisé la Proposition 1.15. Ceci prouve que  $U$  vérifie (1.4)-(i). Par définition  $X(0; x, 0) = x$  donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $U(x, 0) = u^0(x)$ , soit (1.4)-(ii).

**Unicité :** nous avons vu précédemment que s'il existe une solution classique, elle vérifie nécessairement (1.20) et ce pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ . ■

#### Remarque 1.19

En utilisant la remarque 1.12, on retrouve avec ce théorème, le cas particulier de la vitesse constante (voir le théorème 1.7).

On peut démontrer aisément à partir de la formule que certaines propriétés de l'équation de transport à coefficients constants sont préservées.

#### Proposition 1.20

La solution  $u$  se propage à vitesse finie (voir la figure 1.6)

$$\text{supp } u^0 \subset [a, b] \quad \implies \quad \text{supp } u(\cdot, t) \subset [X(t; a, 0), X(t; b, 0)] \quad (1.30)$$

Elle vérifie la propriété de stabilité suivante

$$\forall t \geq 0, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} u(x, t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} u^0(x), \quad \inf_{x \in \mathbb{R}} u(x, t) = \inf_{x \in \mathbb{R}} u^0(x), \quad \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)} = \|u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad (1.31)$$

En revanche certaines propriétés sont perdues. Ainsi, comme les caractéristiques peuvent s'écartier ou se rapprocher au cours du temps, la solution ne se propage pas à vitesse constante (elle peut « ralentir » ou « accélérer ») et le profil (ou graphe) de la solution  $u(\cdot, t)$  va se déformer au cours du temps. De ce fait, on n'a plus en général conservation de la norme  $L^p$  de la solution pour  $p < +\infty$ .

De plus, d'après la proposition, il y a stabilité dans  $L^\infty$  mais en général, celle-ci n'est pas vraie dans  $\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ . En effet, cela va dépendre du caractère borné ou non des quantités données

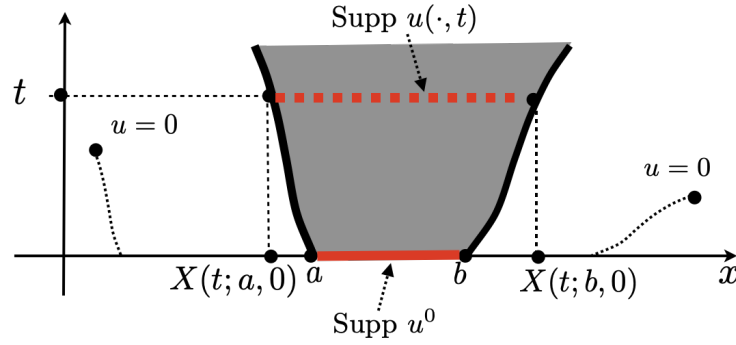


FIGURE 1.6 – Vitesse de propagation finie, cas variable.

dans (1.28) (voir la preuve du théorème 1.18). Comme  $c$  vérifie l'hypothèse (1.7), on montre que

$$\forall T > 0, \quad \left\| \frac{\partial X}{\partial x}(0; \cdot) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \leq C(T) = e^{TL}$$

où  $L$  est la constante qui apparaît dans (1.7). Ceci implique que

$$\left\| \frac{\partial U}{\partial x} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \leq C(T) \left\| \frac{du^0}{dx} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

La constante peut donc dépendre de l'instant final  $T$ , et cette constante pourrait être non bornée quand  $T \rightarrow +\infty$ . De plus, comme la dérivée partielle de  $u$  par rapport à  $t$  est liée à sa dérivée par rapport à  $x$  au facteur  $-c(x, t)$  près, si  $c$  n'est pas bornée par rapport à  $x$ , cette dérivée partielle n'est en général même pas dans  $L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))$ .

En conclusion, le résultat de stabilité dans  $C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  (et donc le caractère bien posé) ne peut pas être établi en toute généralité. Il faut étudier cet aspect au cas par cas.

## 1.5 Systèmes hyperboliques linéaires

### 1.5.1 Systèmes hyperboliques linéaires

Pour simplifier, nous nous limiterons dans ce qui suit aux systèmes hyperboliques linéaires à coefficients constants.

Considérons un système du premier ordre composé de  $n$  équations du premier ordre avec  $n$  inconnues  $\{u_j, j = 1, \dots, n\}$ , qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t}(x, t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x}(x, t) = 0, & i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u_i(x, 0) = u_i^0(x), & i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.32)$$



où  $(u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0)$  sont des données initiales. On cherche ici la solution  $(u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t))$ , avec  $x \in \mathbb{R}$  et  $t \in \mathbb{R}^+$ . La matrice de taille  $n$  par  $n$

$$\mathbb{A} := (a_{ij})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in M_{n \times n}(\mathbb{R}),$$

est donnée et le système (1.32) s'écrit sous forme matricielle

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, t) + \mathbb{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}^0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.33)$$

où pour tout  $(x, t)$ ,  $\mathbf{u}(x, t) \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur colonne où  $\mathbf{u}_i(x, t) = u_i(x, t)$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et pour tout  $x$ ,  $\mathbf{u}^0(x) \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur colonne tel que  $\mathbf{u}_i^0(x) = u_i^0(x)$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Un exemple pour  $n = 2$  est l'équation des ondes 1D (1.2), voir la Section 1.1.2, où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -c \\ -c & 0 \end{bmatrix}$$

#### Définition 1.21: Système hyperbolique

Considérons le système linéaire (1.32) (ou (1.33)),

1. ce système est dit hyperbolique si et seulement si la matrice  $\mathbb{A}$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ . On note  $\lambda_l$ ,  $1 \leq l \leq n$  ses valeurs propres ordonnées,
2. ce système est dit strictement hyperbolique si les  $n$  valeurs propres sont distinctes, on a alors  $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ .

Si le système (1.33) est hyperbolique, il existe une matrice  $\Lambda$  diagonale et une matrice de passage  $\mathbb{P}$  telle que  $\mathbb{A} = \mathbb{P} \Lambda \mathbb{P}^{-1}$ , avec :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Posons pour tout  $(x, t)$ ,  $\mathbf{v}(x, t) = \mathbb{P}^{-1} \mathbf{u}(x, t)$  et pour tout  $x$ ,  $\mathbf{v}^0(x) = \mathbb{P}^{-1} \mathbf{u}^0(x)$ . En multipliant la première équation de (1.33) par  $\mathbb{P}^{-1}$ , on trouve un nouveau système hyperbolique où l'inconnue est  $\mathbf{v}$  et la matrice qui apparait est  $\Lambda$ . La matrice  $\Lambda$  étant diagonale, ce système s'écrit comme  $n$  équations de transport découplées dont les inconnues  $v_j(x, t)$  sont les composantes de  $\mathbf{v}(x, t)$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_j}{\partial t}(x, t) + \lambda_j \frac{\partial v_j}{\partial x}(x, t) = 0, & j = 1, 2, \dots, n, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ v_j(x, 0) = v_j^0(x), & j = 1, 2, \dots, n, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On en déduit le résultat suivant.

**Théoreme 1.22**

Supposons que le système (1.33) soit hyperbolique. La matrice  $\mathbb{A}$  s'écrit donc  $\mathbb{A} = \mathbb{P} \Lambda \mathbb{P}^{-1}$  où  $\Lambda$  est la matrice diagonale de valeurs propres  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ .

Alors pour tout  $\mathbf{u}^0 \in (\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}))^n$ , ce problème de Cauchy est bien posé et l'unique solution classique est donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(x, t) = \mathbb{P} \mathbf{v}(x, t), \\ v_j(x, t) = v_j^0(x - \lambda_j t), \\ \mathbf{v}^0(x) = \mathbb{P}^{-1} \mathbf{u}^0(x). \end{cases}$$

Ainsi, l'étude des systèmes hyperboliques linéaires en dimension un se ramène facilement à l'étude de plusieurs équations de transport découplées.

**1.5.2 L'équation des ondes en dimension 1**

Nous allons donner ici des résultats spécifiques à l'équation des ondes 1D :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u^0(x), & x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u^1(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.34)$$

Nous avons vu à la section 1.1.2 que l'équation des ondes (1.34) se met sous la forme d'un système d'équations d'ordre 1 (les dérivées ne sont que d'ordre 1) :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbb{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0,$$

où

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & -c \\ -c & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.35)$$

Il est facile de voir que le système obtenu est hyperbolique. Nous pouvons donc appliquer le résultat de la section précédente et nous obtenons la très célèbre formule de d'Alembert.

**Théoreme 1.23: La formule de d'Alembert**

Toute solution de l'équation des ondes homogène (1.34) se décompose sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad u(x, t) = u^+(x, t) + u^-(x, t).$$

—  $u^+(x, t) = f(x - ct)$  est une onde progressive se propageant à la vitesse  $c$  dans la

direction  $x > 0$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad u^+(x, t + T) = u^+(x - cT, t), \quad T > 0$$

(le graphe de  $x \rightarrow u^+(x, t + T)$  se déduit de celui de  $x \rightarrow u^+(x, t)$  par une simple translation de  $cT$  vers la droite). Une telle solution est constante sur les droites  $\{x = x_0 + ct, x_0 \in \mathbb{R}\}$ . Cette famille de droites constitue ce que l'on appelle la première famille de droites caractéristiques associée à l'équation des ondes (1.34).

—  $u^-(x, t) = g(x + ct)$  est une onde progressive se propageant à la vitesse  $c$  dans la direction  $x < 0$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad u^-(x, t + T) = u^-(x + cT, t)$$

(le graphe de  $x \rightarrow u^-(x, t + T)$  se déduit de celui de  $x \rightarrow u^-(x, t)$  par une simple translation de  $L = cT$  vers la gauche). Une telle solution est constante sur les droites  $\{x = x_0 - ct, x_0 \in \mathbb{R}\}$  qui constitue la seconde famille de droites caractéristiques associée à l'équation des ondes (1.34).

Plus précisément, nous avons

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (u^0(x + ct) + u^0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u^1(s) ds. \quad (1.36)$$

**PREUVE:** On diagonalise aisément la matrice  $\mathbb{A}$  donnée dans (1.35) sous la forme  $\mathbb{A} = \mathbb{P} \Lambda \mathbb{P}^{-1}$ , où :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix} \quad \mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbb{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Avec  $\mathbf{v}(x, t) = \mathbb{P}^{-1} \mathbf{u}(x, t)$  et  $\mathbf{v}_0(x) = \mathbb{P}^{-1} \mathbf{u}_0(x)$ , on a de manière évidente :

$$\mathbf{v}_0(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u^1(x) - c \frac{\partial u^0}{\partial x}(x) \\ u^1(x) + c \frac{\partial u^0}{\partial x}(x) \end{pmatrix}$$

et par application de la méthode des caractéristiques :

$$\mathbf{v}(x, t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u^1(x - ct) - c \frac{\partial u^0}{\partial x}(x - ct) \\ u^1(x + ct) + c \frac{\partial u^0}{\partial x}(x + ct) \end{pmatrix}$$

d'où l'on déduit immédiatement que :

$$\mathbf{u}(x, t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u^1(x - ct) + u^1(x + ct) - c \frac{\partial u^0}{\partial x}(x - ct) + c \frac{\partial u^0}{\partial x}(x + ct) \\ -u^1(x - ct) + u^1(x + ct) + c \frac{\partial u^0}{\partial x}(x - ct) + c \frac{\partial u^0}{\partial x}(x + ct) \end{pmatrix}$$

Alors, en intégrant par rapport au temps la première composante du vecteur  $\mathbf{u}$  ci-dessus, on obtient :

$$u(x, t) - u^0(x) = \frac{1}{2} \int_0^t u^1(x + cs) ds + \frac{1}{2} \int_0^t u^1(x - cs) ds + \frac{c}{2} \int_0^t \frac{\partial u^0}{\partial x}(x + cs) ds - \frac{c}{2} \int_0^t \frac{\partial u^0}{\partial x}(x - cs) ds,$$
soit, après deux changements de variable évidents :

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_x^{x+ct} u^1(s) ds - \frac{1}{2c} \int_x^{x-ct} u^1(s) ds + \frac{1}{2} u^0(x + ct) + \frac{1}{2} u^0(x - ct),$$

et donc la décomposition demandée avec :

$$u^+(x, t) = \frac{1}{2} u^0(x - ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^x u^1(s) ds \quad \text{et} \quad u^-(x, t) = \frac{1}{2} u^0(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_x^{x+ct} u^1(s) ds,$$

ce qui donne la célèbre formule de d'Alembert donnée dans le théorème. ■

La formule (1.36) montre que la valeur de la solution  $u$  au point  $x$  à l'instant  $t$  ne dépend que des valeurs des données initiales dans l'intervalle  $[x - ct; x + ct]$ . Cet intervalle est aussi la base du cône caractéristique (ou cône de dépendance)  $D(x, t)$  issu du point  $(x, t)$  qui est le cône délimité par les deux droites caractéristiques de l'équation des ondes qui passent par le point  $(x, t)$  (voir la figure 1.7) :

$$D(x, t) = \left\{ (y, s), 0 \leq s \leq t, |y - x| \leq c(t - s) \right\}.$$

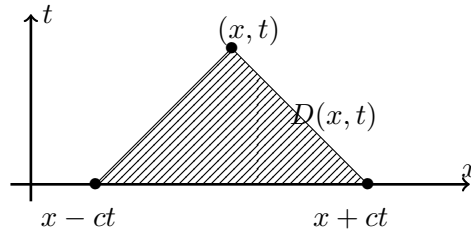


FIGURE 1.7 – Le cône de dépendance  $D(x, t)$  associé au point  $(x, t)$ .

On en déduit que la solution **se propage à vitesse finie** au sens où, si on part des données à support compact, la solution reste à support compact à tout instant. Plus précisément (voir la figure 1.8) :

$$\text{Supp } u^0 \cup \text{Supp } u^1 \subset [a, b] \Rightarrow \text{Supp } u(\cdot, t) \subset [a - ct; b + ct]$$

Enfin, il est naturel d'associer à toute solution  $u$  de (1.34) la densité d'énergie :

$$e(x, t) = \frac{1}{2} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 (x, t) + c^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 (x, t) \right).$$

On dit que la solution  $u$  est d'énergie finie (les solutions qui ont un sens physique sont généralement d'énergie finie) dès que :

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}} e(x, t) dx < +\infty,$$

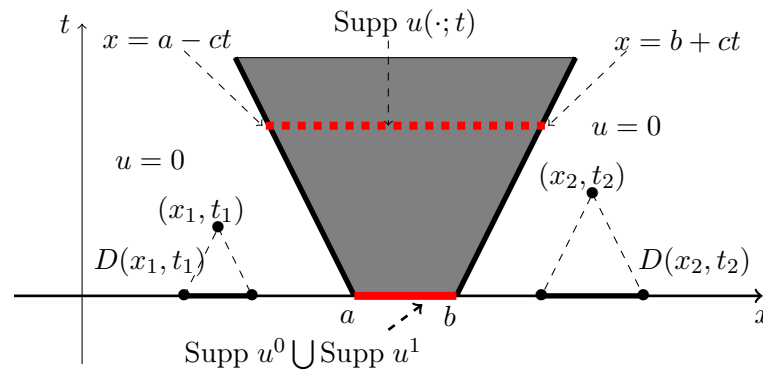


FIGURE 1.8 – Propagation à vitesse finie pour l'équation des ondes

où  $E(t)$  est par définition l'énergie totale de la solution.

#### Théoreme 1.24: Conservation d'énergie

Il y a conservation d'énergie au cours du temps :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{dE}{dt}(t) = 0.$$

**PREUVE:** En multipliant l'équation des ondes par  $\frac{\partial u}{\partial t}$ , on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Nous observons ensuite après avoir intégré en espace que :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx \right),$$

alors que, moyennant une intégration par parties :

$$-c^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx = \frac{c^2}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right),$$

Ainsi en ajoutant ces deux dernières égalités, on obtient le résultat espéré. ■

## 1.6 Exercices

**Exercice 1 (Equation d'advection avec un terme d'absorption)** On considère l'équation d'advection avec un terme d'absorption :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = -\alpha u & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.37)$$

où  $\alpha > 0$  et  $u^0 \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}) = \{v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), v' \in L^\infty(\mathbb{R})\}$ .

**Question** Résoudre ce problème en adaptant la méthode des caractéristiques.

**Exercice 2 (Equation des ondes)** On considère le problème de Cauchy pour l'équation des ondes en une dimension d'espace.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, t = 0) = u^0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = u^1(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.38)$$

On supposera que  $c > 0$ .

**Question 1.** Mettre le problème sous forme d'un système du premier ordre

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbb{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad (1.39)$$

assorti de la condition initiale,

$$\mathbf{u}(x, t = 0) = \mathbf{u}^0(x),$$

où l'on précisera la matrice  $\mathbb{A}$ , le vecteur  $\mathbf{u}$  et la condition initiale  $\mathbf{u}^0$ . Est ce que ce système est hyperbolique ?

**Question 2.** En diagonalisant  $\mathbb{A}$ , mettre le système précédent sous la forme de deux équations de transport indépendantes.

En déduire l'expression de la solution  $u(x, t)$ .

**Question 3.** On suppose que le support des fonctions  $u^0$  et  $u^1$  est inclus dans un intervalle  $[a, b]$  et on pose

$$\begin{cases} D^+ = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, & x > b + ct\} \\ D^- = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, & x < a - ct\} \\ D^0 = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, & b - ct < x < a + ct\} \end{cases}$$

Montrer que la solution est constante dans chacun de ses domaines et préciser la valeur de ces constantes. Commenter le résultat quand la moyenne de  $u^1$  est nulle. Question 3

**Question 3.** On s'intéresse maintenant à la résolution de l'équation (1.38) sur le demi-espace  $\mathbb{R}_+$ . Pourquoi le problème est-il mal posé ?

On impose donc une condition sur le bord  $x = 0$  :

$$w(0, t) = \lambda v(0, t), \quad \forall t > 0, \quad (1.40)$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$  est un paramètre,  $v(x, t)$  désigne la composante de  $U(x, t)$  dans la base propre de  $C$  qui se propage à la vitesse  $-c$  et  $w(x, t)$  celle se propageant à la vitesse  $c$ .

(a) Donner l'expression de la solution en fonction de  $u^0, u^1$  et  $\lambda$ .

(b) Formuler le principe des images. En particulier, on montrera que

- le problème avec condition au bord de Dirichlet  $u(0, t) = 0$  est la restriction au demi-espace  $x > 0$  du problème de Cauchy sur  $\mathbb{R}$  obtenu en prolongeant les conditions initiales  $u^0(x)$  et  $u^1(x)$  par imparité ;
- le problème avec condition au bord de Neumann  $\partial_x u(0, t) = 0$  est la restriction au demi-espace  $x > 0$  du problème de Cauchy sur  $\mathbb{R}$  obtenu en prolongeant les conditions initiales  $u^0(x)$  et  $u^1(x)$  par parité.

**Exercice 3 (Equation d'advection avec condition au bord)** On s'intéresse à la résolution de l'équation d'advection sur un intervalle semi-infini :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}^+, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (1.41)$$

où  $u^0 \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^+) = \{v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+), v' \in L^\infty(\mathbb{R}^+)\}$ .

**Question 1.** On suppose que  $c < 0$ . Tracer les caractéristiques. Montrer que le problème (1.41) admet une unique solution.

**Question 2.** On suppose que  $c > 0$ . Montrer qu'il n'y a pas unicité de la solution du problème (1.41).

**Question 3.** Pour pallier le défaut d'unicité, on ajoute la condition

$$u(0, t) = g(t), \quad \text{pour } t > 0, \quad (1.42)$$

où  $g \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^+)$ . Montrer que le problème (1.41) admet une unique solution de classe  $\mathcal{C}^1$  que l'on déterminera si et seulement si on a :

$$g(0) = u^0(0), \quad \text{et} \quad g'(0) + cu^0'(0) = 0. \quad (1.43)$$

**Question 4.** (Estimation d'énergie). On se propose ici de retrouver la nécessité d'imposer une condition sur le bord  $t = 0$  lorsque  $c > 0$  par une méthode d'énergie pour que le problème admette une unique solution. On suppose que  $u^0$  est à support compact pour simplifier.

Montrer que toute solution de (1.41) d'énergie finie vérifie l'identité d'énergie :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+} |u(x, t)|^2 dx \right) = \frac{c}{2} |u(0, t)|^2, \quad \forall t > 0, \quad (1.44)$$

Etudier donc l'unicité de la solution en distinguant  $c < 0$  et  $c > 0$ .

**Exercice 4 (Equation d'advection avec coefficients variables)** On considère l'équation de transport linéaire en dimension 1 :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.45)$$

où  $c(x, t) = \sin x \sin t$ .

**Question 1.** Ecrire l'équation différentielle ordinaire pour les courbes caractéristiques  $s \mapsto X(s; x_0, 0)$  passant par  $(x_0, 0)$ .

**Question 2.** Montrer sans faire de calculs que

- (a)  $X(s; x_0 + 2\pi, 0) = X(s; x_0, 0) + 2\pi$  ;
- (b)  $X(s; -x_0, 0) = -X(s; x_0, 0)$  ;
- (c)  $x_0 = k\pi, k \in \mathbb{Z} \implies X(s; x_0, 0) = x_0, \forall s$ .



Déduire, à partir de (a) et (b) qu'il suffit de déterminer les courbes caractéristiques  $s \mapsto X(s; x_0, 0)$  pour  $x_0 \in [0, \pi]$  pour les connaître pour tout  $x_0$ .

Déduire à partir de (c) que

$$x_0 \in ]0, \pi[ \implies X(s; x_0, 0) \in ]0, \pi[ \text{ pour tout } s > 0.$$

**Question 3.** Résoudre l'équation différentielle ordinaire que vous avez trouvée à la question 1 pour  $x_0 \in [0, \pi]$ .

Indication : différencier  $\ln \tan \frac{x}{2}$ .

**Question 4.** Tracer les 5 courbes caractéristiques  $X(s; x_0, 0)$  pour

$$x_0 = -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \quad s \in [0, 4\pi]$$

Pour  $x_0 = \pm\pi/2$ , après avoir montré que la fonction  $s \mapsto X(s; x_0, 0)$  est strictement monotone pour  $s \in ]0, \pi[$ , on se contentera de donner l'allure des courbes et éviter une trop longue étude de fonction.

**Question 5.** Si  $\text{Supp } u^0 = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , trouver  $\text{Supp } u(\cdot, t)$  en fonction de  $t$ .

**Exercice 5 (Equation de transport à vitesse variable)** On considère l'équation de transport à vitesse variable

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x) \end{cases}$$

où  $u^0 \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$  et  $c(x, t)$  sera définie dans chaque question.

**Question 1.** On suppose que  $c(x, t) = x$ . Est ce que le problème est bien posé dans  $\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ ? Tracer les caractéristiques dans le plan  $(x, t)$ . Calculer la solution classique en tout point  $x$  et tout temps  $t$ .

**Question 2.** On suppose que  $c(x, t) = 1$  pour  $x \leq 1$  et  $c(x, t) = x$  pour  $x \geq 1$ . Est ce que le problème est bien posé? Tracer les caractéristiques dans le plan  $(x, t)$ . Calculer la solution classique en tout point  $x$  et tout temps  $t$ .

**Question 3.** On va considérer maintenant un cas où la fonction  $c(x)$  est discontinue en  $x = 0$ . On sort alors du cadre du cours. Plus précisément, on suppose maintenant que  $c(x, t) = 1$  pour  $x \leq 0$  et  $c(x, t) = x$  pour  $x > 0$ .

**Question 3a.** On cherche une solution  $u(x, t)$  qui soit une solution classique dans chacun des demi-espaces  $x < 0$  et  $x > 0$ . Montrer, à l'aide de la méthode des caractéristiques que la fonction  $u$  est alors entièrement déterminée. Montrer que cette fonction est discontinue en général.

**Question 3b.** A quelle condition sur la donnée initiale  $u^0$ , la fonction est-elle continue à travers  $x = 0$ ? Montrer que dans ce cas, il s'agit d'une solution "classique" au sens où  $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  et où l'égalité

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

est satisfaite en tout point de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ .

**Question 4.** On reprend la question précédente avec  $c(x, t) = -1$  pour  $x \leq 0$  et  $c(x, t) = x$  pour  $x > 0$ .

**Question 4a.** Montrer que la recherche d'une solution classique par morceaux ne la détermine entièrement que dans une zone du demi-plan  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  que l'on précisera. Donner la forme générale d'une telle fonction.

**Question 4b.** Montrer que la fonction  $u$  est entièrement définie si on lui impose d'être globalement continue. Montrer que cette fonction est de classe  $C^1$  si la dérivée de  $u^0$  est nulle à l'origine et qu'il s'agit alors bien d'une solution classique au sens défini à la question 3.b.



# Problèmes hyperboliques non linéaires : étude des lois de conservation scalaires

## 2.1 Lois de conservation

### 2.1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux équations scalaires de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (f(u)) = 0, \quad (2.1)$$

où  $f$  est une fonction régulière de  $u$ . Comme nous l'expliquons au paragraphe 2.1.2, cette équation traduit la conservation de la quantité  $u$ . On dit qu'il s'agit d'une loi de conservation.

#### Remarque 2.1: L'équation de Burgers

L'exemple typique souvent rencontré dans la littérature est l'équation aux dérivées partielles de Burgers :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad (2.2)$$

c'est à dire  $f(u) = u^2/2$ .

Notre objectif est de résoudre le problème de Cauchy, qui consiste à trouver une fonction  $u(x, t)$  telle que l'on ait :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (f(u)) = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où la condition initiale  $u^0$  est une fonction donnée.

Notre but dans ce chapitre est d'ébaucher la théorie de ce problème. Nous montrerons tout d'abord comment, quand la condition initiale est assez régulière, déterminer la solution classique, quand elle existe, par la **méthode des caractéristiques** (voir la section 2.2.1). Cependant, de

par le caractère non-linéaire de l'équation, de telles solutions classiques n'existent pas toujours globalement en temps : il peut exister un temps fini, appelé **temps d'explosion** où la solution classique tend à devenir discontinue. Ces discontinuités sont appelées des chocs. Après ce temps d'explosion, la solution physique  $u$  ne peut être qu'une solution faible du problème, c'est à dire une solution au sens des distributions (voir la section 2.3.1). Nous montrons notamment que la vitesse de propagation des chocs doit vérifier une condition, appelée **condition de Rankine-Hugoniot** (voir la section 2.3.2).

Mais on vérifie aisément qu'il n'y a pas unicité de la solution faible du problème de Cauchy. L'unique solution physique est celle qui vérifie une condition supplémentaire dite **condition d'entropie** (section 2.3.3). Pour conclure (section 2.4), nous calculons explicitement la solution dans le cas du **problème dit de Riemann à 2 états** où la condition initiale  $u^0$  est de la forme :

$$u^0(x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0, \\ u_d & \text{si } x > 0. \end{cases} .$$

Nous étudierons ensuite le problème de Riemann à 3 états. Cette étude théorique du problème continu est un préalable indispensable à l'étude des schémas d'approximation par différences finies que nous présenterons dans le chapitre 4. En effet, une méthode numérique de discrétisation devra tenir compte au mieux des propriétés de la solution du problème continu.

Nous considérerons la plupart du temps une fonction  $f$  régulière mais **quelconque**. Toutefois, on verra que, lorsque la fonction  $f$  est **strictement convexe** (dont le prototype  $f(u) = u^2/2$  donne l'**équation de Burgers**) ou **strictement concave**, un certain nombre de résultats prennent une forme plus simple. En particulier, nous nous limiterons à ces cas pour l'étude du problème de Riemann.

### 2.1.2 Construction d'une équation de conservation

L'équation (2.1) résulte en fait de l'écriture d'une simple loi de conservation.

En effet, considérons par exemple une répartition linéique de matière. Notons  $u(x, t)$  la densité de matière en  $x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) à l'instant  $t$  ( $t \geq 0$ ) et soit  $F(x, t)$  le flux de matière passant par le point  $x$  à l'instant  $t$ . Alors, la variation de la quantité de matière dans l'intervalle  $[x_1, x_2]$  entre les temps  $t_1$  et  $t_2$  est égale à la différence entre le flux de matière entrant en  $x_1$  et le flux sortant en  $x_2$  pendant cette période. Autrement dit :

$$\int_{x_1}^{x_2} \{u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)\} d\xi = \int_{t_1}^{t_2} \{F(x_1, s) - F(x_2, s)\} ds. \quad (2.3)$$

Ceci s'écrit également :

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \frac{u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)}{t_2 - t_1} d\xi = \frac{-1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{F(x_1, s) - F(x_2, s)}{x_1 - x_2} ds.$$

Lorsque  $(x_2 - x_1)$  et  $(t_2 - t_1)$  tendent vers 0, si les fonctions  $u$  et  $F$  sont assez régulières, cette identité intégrale devient l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) = 0. \quad (2.4)$$

Supposons de plus que le flux  $F$  soit lui-même une fonction de la densité  $u$  :

$$F(x, t) = f(u(x, t)). \quad (2.5)$$

Alors l'équation (2.4) prend la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(u(x, t)) = 0. \quad (2.6)$$

On dit que l'équation (2.6) est sous **forme conservative**, par opposition à sa forme non conservative :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + a(u(x, t)) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0 \quad (2.7)$$

où  $a(u) = f'(u)$ . C'est donc une équation de transport non linéaire de vitesse  $a(u)$ .

Remarque 2.2: L'équation de Burgers sous sa forme non conservative

L'équation de Burgers donnée dans (2.2) s'écrit sous sa forme non conservative

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.8)$$

En réalité, la loi de conservation scalaire (2.6) a surtout été étudiée parce qu'elle constitue un modèle simple pour l'étude des **systèmes de lois de conservation** qui modélisent de nombreux phénomènes physiques. En voici quelques exemples.

Exemple 1 : La circulation automobile

L'équation (2.6) fournit un modèle simple pour la circulation automobile sur une route à une seule voie :  $u$  représente la quantité de voitures par centaine de mètres et  $F$  le flux de voitures par minute qui passent à l'heure  $t$  devant la borne  $x$ . On suppose que chaque conducteur ajuste la vitesse de sa voiture en fonction uniquement de la vitesse de la voiture qui le précède. Alors la conservation de la quantité de voitures (il n'y a ni station-service, ni itinéraire de délestage) se traduit par l'équation (2.6).

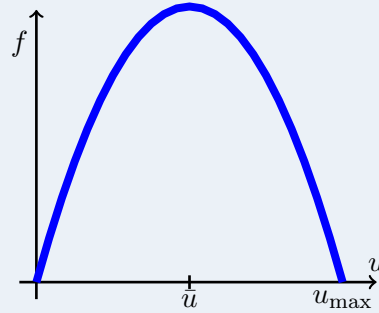
Si toutes les voitures roulaient à une vitesse constante donnée  $c$ , on aurait :

$$\begin{cases} f(u) = c u \\ \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

et on retrouve l'équation de transport qui est linéaire.

En réalité, le flux de voitures  $F$  est une fonction  $f$  non-linéaire de la densité de voitures  $u$ . Essayons d'imaginer à quoi peut ressembler cette fonction...

Bien sûr, le flux de voitures est nul si la densité est elle-même nulle, mais il est également nul si la densité est trop importante ( $u$  voisin de la densité de saturation  $u_{\max}$ ) : on a alors un embouteillage. Enfin, on observe un flux maximum au voisinage d'une densité intermédiaire idéale  $\bar{u}$ .



### Exemple 2 : La dynamique des gaz

Considérons un fluide parfait compressible. Alors un écoulement unidimensionnel est modélisé, en coordonnées eulériennes, par :

— l'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0;$$

— l'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) = 0;$$

— l'équation de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \frac{\partial}{\partial x} ((\rho e + p)u) = 0;$$

où  $\rho$  représente la densité du fluide,  $u$  la vitesse et  $e$  l'énergie totale spécifique. La pression  $p$  est donnée par une équation d'état en fonction des quantités  $\rho$ ,  $u$  et  $e$ .

L'étude de ce système de trois équations et trois inconnues présente de nombreuses difficultés théoriques dont certaines n'ont pas encore été résolues à ce jour. C'est pourquoi on s'intéresse à l'équation scalaire (2.6) qui, bien que beaucoup plus simple à étudier, présente les mêmes caractères fondamentaux que le système précédent.

### 2.1.3 Ajout d'un terme de viscosité

Jusque là, nous avons fait l'hypothèse que le flux  $F(x, t)$  avait la forme (2.5). Pour beaucoup de problèmes issus de la physique, il est plus réaliste de supposer que l'on a :

$$F(x, t) = f(u(x, t)) - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \quad (2.9)$$

où  $\varepsilon$  est un petit paramètre strictement positif. L'équation (2.6) devient alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (2.10)$$

Le terme

$$-\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

permet de tenir compte des effets de **dissipation de l'énergie** et de **dispersion**. Par analogie avec la dynamique des gaz, on dit qu'il s'agit d'un **terme de viscosité**.

Pour l'exemple de la circulation automobile, l'expression du flux (2.9) traduit le fait que le conducteur ne tient pas seulement compte de la densité de voitures  $u$  là où il se trouve mais qu'il anticipe en fonction de ce qu'il aperçoit devant lui.

L'équation (2.6) est en fait la limite de l'équation visqueuse (2.10) lorsque le paramètre de viscosité  $\varepsilon$  tend vers 0. Or, contrairement à l'équation (2.6), l'équation (2.10) admet une solution unique et très régulière. Cette remarque, très importante, nous permettra, plus tard, de sélectionner la solution physique parmi toutes les solutions faibles de l'équation (2.6).

### 2.1.4 Des équations de Hamilton-Jacobi Bellman aux lois de conservations

Il existe un autre type d'équation hyperbolique non-linéaire appelé équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) et qui ont la forme

$$\frac{\partial w}{\partial t} + H\left(\frac{\partial w}{\partial x}, x, t\right) = 0. \quad (2.11)$$

Ces équations sont souvent associées à des problèmes de contrôle optimal. Ils correspondent aussi à une formulation en mécanique classique proche de la mécanique quantique (le mouvement d'une particule peut être représenté par une onde). Considérons maintenant une fonction  $H$ , appelée Hamiltoniens, de la forme  $(p, x, t) \mapsto H(p)$ . Formellement soit  $w$  une solution régulière de (2.11), en dérivant (2.11) par rapport à la variable spatiale  $x$ , on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} H(u) = 0.$$

où on a noté  $u = \frac{\partial w}{\partial x}$ . On retrouve alors (2.1) dont  $w$  est donc une primitive et le flux  $f$  est le hamiltonien  $H$ .



## Exemple d'équation HJB : Propagation de feux de forêts

Dans un feu de forêt sur  $\mathbb{R}^d$ , on définit la zone brûlée par

$$\Gamma(t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \phi(x, t) = 0 \right\},$$

la fonction  $\phi$  étant alors appelée fonction d'ensemble de niveau associée au front. La vitesse de propagation du front suit la normale  $n \in \mathbb{R}^d$  au front et donnée par

$$v(x, t) = F(x, t)n(x, t) \text{ où } n = \frac{\nabla\phi(x, t)}{\|\nabla\phi(x, t)\|}.$$

Si on suit alors une ligne de propagation  $\{x(t) \in \Gamma(t)\}$  orthogonale au front, on obtient à partir de l'équation caractéristique

$$\phi(x(t)) = \phi(x(0)) \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial t}(x(t), t) + \nabla\phi(x(t), t) \cdot n(x(t), t) = 0,$$

ce qui donne finalement l'équation HJB de la propagation du front :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \|\nabla\phi(x, t)\| = 0.$$

Notons ici que le hamiltonien n'est pas  $C^2$ . Ce cas ne rentre donc pas dans le cadre du cours où le flux est supposé régulier.

## 2.2 Solutions classiques : méthode des caractéristiques

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, & (i) \\ u(x, 0) = u^0(x), & x \in \mathbb{R}, & (ii) \end{cases} \quad (2.12)$$

où la condition initiale  $\mathbf{u}^0$  est une fonction  $\mathcal{C}^1$  de  $x$ . Rappelons que la fonction  $f$  est supposée être très régulière (disons au moins de classe  $C^2$ ) et posons :

$$a(u) = f'(u), \quad (2.13)$$

de sorte que  $a$  est une fonction **croissante** dès que  $f$  est **convexe**.

### Remarque 2.3

Dans le cas linéaire,  $f(u) = cu$ ,  $a(u) = f'(u) = c$  n'est autre que la vitesse de propagation (constante) des solutions de l'équation de transport. En quelque sorte, dans le cas non linéaire, on peut dire que la vitesse de propagation  $a(u)$  dépend de la solution !

### 2.2.1 Solutions classiques au problème de Cauchy

#### Définition 2.4: Solution classique

On dit que  $u$  est une solution classique de (2.12) dans un domaine ouvert  $\mathcal{Q}$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  si  $c$ 'est une fonction  $\mathcal{C}^1$  de  $x$  et de  $t$  dans  $\mathcal{Q}$  et si elle satisfait (2.12)-(i) point par point dans  $\mathcal{Q}$  et la condition initiale (2.12)-(ii) .

Nous allons montrer que le problème (2.12) admet, au moins pour  $t < T \leq +\infty$ , une solution classique (on parle de solution classique locale si  $T < +\infty$ ) et que celle-ci, comme pour le problème linéaire, peut être construite par la méthode des droites caractéristiques.

#### Remarque 2.5: Cas d'une donnée initiale continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Dans tout ce paragraphe, nous supposons que la donnée initiale  $u^0$  est  $\mathcal{C}^1$  et nous nous intéresserons aux solutions classiques du problème (2.12). Cependant, tous les résultats que nous allons établir peuvent se généraliser à une donnée initiale  $u^0$  continue qui est seulement  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. La méthode des caractéristiques permet alors de construire une fonction  $u$  continue et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux qui vérifie l'équation (2.12)-(i) point par point dans tout ouvert où elle est  $\mathcal{C}^1$ , et telle que la condition initiale (2.12)-(ii) soit satisfaite. Nous verrons au paragraphe suivant qu'une telle fonction est la solution physique du problème (on parlera de solution faible entropique).

#### 2.2.1.1 Droites caractéristiques

Soit  $u$  une solution classique de l'équation (2.12). Alors  $u$  satisfait l'équation sous forme non conservative :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.14)$$

où  $a(u)$  est donné par (2.13).

Nous allons maintenant utiliser la définition des courbes caractéristiques, donnée dans la Définition 1.9 : les courbes caractéristiques  $(X(t), t)$  du plan  $(x, t)$  vérifient

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] (X(t), t) &= \frac{d}{dt} [u(X(t), t)] && \text{(par définition)} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} (X(t), t) + X'(t) \frac{\partial u}{\partial x} (X(t), t) && \text{(en dérivant } t \mapsto u(X(t), t)). \end{aligned}$$

Par identification, on obtient donc  $X'(t) = a(u(X(t), t))$ . En ajoutant la donnée d'une position initiale, nous notons  $X_{x_0}$  la courbe caractéristique de pied  $x_0$ , définie par :

$$\begin{cases} \frac{dX_{x_0}}{dt}(t) = a(u(X_{x_0}(t), t)), & t \in \mathbb{R}^+ \\ X_{x_0}(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.15)$$

Comme dans le cas linéaire, la solution est constante le long des caractéristiques. En effet, comme le long des courbes caractéristiques  $\{X_{x_0}(t), x_0 \in \mathbb{R}\}$ , la solution classique vérifie l'équation (2.12)-(i)

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] (X_{x_0}(t), t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

et par définition des courbes caractéristiques, on déduit de ces deux égalités que

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dt} [u(X_{x_0}(t), t)] = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Comme dans le cas linéaire, nous déduisons que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad u(X_{x_0}(t), t) = u(X_{x_0}(0), 0) = u^0(x_0)$$

où on a utilisé pour établir la deuxième égalité la condition initiale pour  $u$  (voir (2.12)-(ii)) et la condition initiale pour  $X_{x_0}$  (voir (2.15)). Ceci étant vrai pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ , nous concluons :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad u(X_{x_0}(t), t) = u^0(x_0)$$

L'équation des courbes caractéristiques se simplifie donc en

$$\begin{cases} \frac{dX_{x_0}}{dt}(t) = a(u^0(x_0)), & t > 0 \\ X_{x_0}(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.16)$$

équation qui s'intègre facilement

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad X_{x_0}(t) = a(u^0(x_0))t + x_0. \quad (2.17)$$

Les courbes caractéristiques sont donc des droites comme dans le cas linéaire avec une vitesse  $c$  constante. Mais contrairement à ce dernier cas, ces droites ne sont pas nécessairement parallèles : leur pente  $a(u^0(x_0))$  dépendent de leur pied  $x_0$  et de la condition initiale.

Nous venons de démontrer le résultat suivant.

#### Proposition 2.6

Soit une solution classique  $u$  de l'équation (2.12). Alors les droites de la forme (2.17) sont appelées droites caractéristiques pour  $u$  de l'équation (2.12). De plus,  $u$  est constante le long de chacune de ces droites.

#### 2.2.1.2 Construction d'une solution classique du problème de Cauchy

Supposons que  $u$  est, au moins pour  $t < T$ , une solution classique du problème (2.12). Considérons alors un point  $x_0 \in \mathbb{R}$ , la droite caractéristique passant par  $(x_0, 0)$  a pour équation :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad X_{x_0}(t) = x_0 + a(u^0(x_0))t,$$

et le long de cette droite, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad u(X_{x_0}(t, t) = u^0(x_0).$$

On cherche maintenant à déterminer  $u(x, t)$  pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . Il s'agit maintenant de savoir si il existe au moins une caractéristique qui passe par le point  $(x, t)$  (pour récupérer la valeur  $u^0(x_0)$  de la condition initiale au pied  $x_0$  de cette caractéristique) et si il en existe qu'une seule (sinon deux valeurs pourraient être affectées à  $u(x, t)$ ). En d'autres termes, cela revient à chercher si les caractéristiques  $\{X_{x_0}(t), x_0 \in \mathbb{R}\}$  remplissent tout le demi plan  $\{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$  (dans ce cas une caractéristique au moins passera par tout point  $(x, t)$ ) et si les caractéristiques ne se rencontrent pas (dans ce cas il n'y en aura qu'une seule pour tout point  $(x, t)$ ).

Dans le cas linéaire, nous rappelons (voir la section 1.2.2) que les droites caractéristiques sont toutes parallèles, les réponses aux interrogations précédentes sont donc évidentes. En revanche, dans le cas non linéaire, les droites caractéristiques ne sont pas parallèles : elles pourraient ne pas remplir le demi-plan  $\{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$  et surtout elles pourraient se rencontrer. Nous allons voir qu'en règle générale, elles remplissent tout le demi plan. Par contre, elles peuvent se rencontrer : cela dépend de  $a$  et de la condition initiale ! Ceci nous amène à introduire la fonction

$$a^0(x) := a(u^0(x)). \quad (2.18)$$

Notons que  $a^0(x)$  peut s'interpréter comme la vitesse de propagation initiale de la solution au point  $x$  : nous l'appellerons vitesse initiale.

Pour répondre aux interrogations ci-dessus, nous introduisons l'application continue

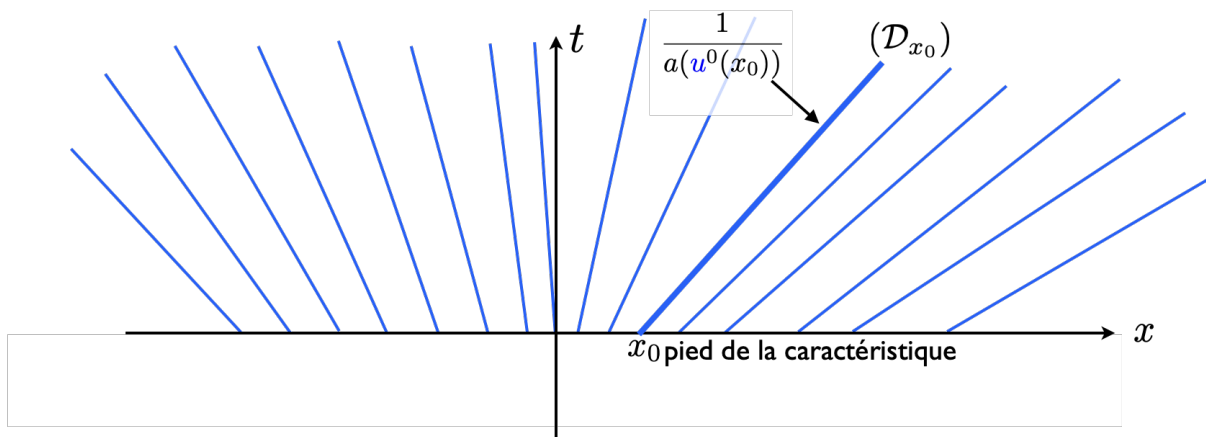
$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad F_t : x_0 \in \mathbb{R} \mapsto X_{x_0}(t) = x_0 + a^0(x_0)t \in \mathbb{R}. \quad (2.19)$$

Il est facile de voir que

- si à  $t$  fixé,  $F_t$  est surjective alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe au moins un  $x_0 \in \mathbb{R}$  telle que  $F_t(x_0) = x$ , ou encore  $X_{x_0}(t) = x$  : la droite caractéristique de pied  $x_0$  passe bien par le point  $(x, t)$  ;
- si à  $t$  fixé,  $F_t$  est injective alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe au plus un  $x_0 \in \mathbb{R}$  telle que  $F_t(x_0) = x$ , ou encore  $X_{x_0}(t) = x$  : il existe au plus une droite caractéristique qui passe par le point  $(x, t)$ .

### 2.2.1.3 Le cas d'une vitesse initiale croissante : existence d'une unique solution globale

Nous traitons le cas tout d'abord où la fonction  $a^0$ , définie par (2.18), est croissante comme représenté sur la figure 2.1. On voit que dans ce cas les droites remplissent tout le demi-plan  $\{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$  et ne se croisent jamais. On en déduit le résultat suivant.



**FIGURE 2.1** – Droites caractéristiques  $\{\mathcal{D}_{x_0}, x_0 \in \mathbb{R}\}$  représentées dans le plan  $(x, t)$  :  $x = a(u^0(x_0))t + x_0 \Rightarrow t = (x - x_0)/a(u^0(x_0))$ .

#### Remarque 2.7

On rappelle que les droites caractéristiques sont toujours représentées dans le plan  $(x, t)$  et non dans le plan  $(t, x)$ . La pente de la droite d'équation (2.17) est donc  $1/a(u^0(x_0))$ . En particulier, si  $a(u^0(x_0)) = 0$ , la droite caractéristique issue de  $x_0$  est verticale.

#### Théoreme 2.8: Existence d'une solution classique globale

Supposons  $u^0 \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$ . Si  $a^0$ , définie par (2.18), est croissante sur  $\mathbb{R}$ , le problème de Cauchy (2.12) admet une unique solution classique globale dans  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  qui est donnée par

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad u(x, t) = u^0(F_t^{-1}(x))$$

où  $F_t$  donnée par (2.19) est bijective pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ .

**DÉMONSTRATION:** Montrons que la fonction définie par (2.19) définit une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . En effet :

$$\frac{dF_t}{dx_0}(x_0) = 1 + \frac{da^0}{dx_0}(x_0)t \geq 0. \quad (2.20)$$

Donc  $F_t$  est strictement croissante, elle est donc injective. De plus, comme  $u^0$  est bornée,  $a^0$  est également bornée et

$$\lim_{x_0 \rightarrow \pm\infty} F_t(x_0) = \pm\infty.$$

Comme  $F_t$  est continue, elle est nécessairement surjective.

Pour tout couple  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ , il existe donc un unique  $x_0(x, t) := F_t^{-1}(x)$  tel que :

$$x = x_0(x, t) + a^0(x_0(x, t))t. \quad (2.21)$$

Si la solution classique existe, elle est donc donnée par :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad u(x, t) = u^0(F_t^{-1}(x)).$$

Vérifions que  $u$  est effectivement solution de l'équation (2.12)-(i). On a :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{du^0}{dx}(F_t^{-1}(x)) \frac{\partial F_t^{-1}}{\partial x}(x, t) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{du^0}{dx}(F_t^{-1}(x)) \frac{\partial F_t^{-1}}{\partial t}(x, t) \end{cases}$$

et donc

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + a(u(x, t)) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{du^0}{dx}(F_t^{-1}(x)) \left[ \frac{\partial F_t^{-1}}{\partial t}(x, t) + a^0(F_t^{-1}(x)) \frac{\partial F_t^{-1}}{\partial x}(x, t) \right] \quad (2.22)$$

Or, en dérivant respectivement par rapport à  $x$  et  $t$  la relation

$$x = F_t^{-1}(x) + a^0(F_t^{-1}(x)) t.$$

il vient :

$$\begin{cases} 1 = \frac{\partial F_t^{-1}}{\partial x}(x, t) \left[ 1 + \frac{da^0}{dx}(F_t^{-1}(x)) t \right] \\ -a^0(F_t^{-1}(x)) = \frac{\partial F_t^{-1}}{\partial t}(x, t) \left[ 1 + \frac{da^0}{dx}(F_t^{-1}(x)) t \right] \end{cases} \quad (2.23)$$

Mais par hypothèse :

$$\frac{da^0}{dx}(F_t^{-1}(x)) \geq 0$$

donc la quantité entre crochets dans (2.23) reste strictement positive pour tout  $t \geq 0$  et on déduit de (2.22) que l'équation (2.12)-(i) est donc vérifiée pour tout temps positif.

Comme  $F_0^{-1}(x) = x$ ,  $u$  vérifie la condition initiale (2.12)-(ii). ■

#### Remarque 2.9: Cas convexe

Lorsque  $f$  est convexe,  $a$  est croissante et la condition «  $a^0$  est croissante » devient simplement «  $u^0$  est croissante »

#### 2.2.1.4 Exemple

Considérons par exemple la condition initiale suivante :

$$u^0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{\alpha} & \text{si } 0 \leq x \leq \alpha \\ 1 & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}$$

où  $\alpha$  est un réel strictement positif. Nous nous permettons de considérer une donnée initiale qui n'est que  $\mathcal{C}^1$  par morceaux en vertu de la remarque 2.5. On veut résoudre le problème de

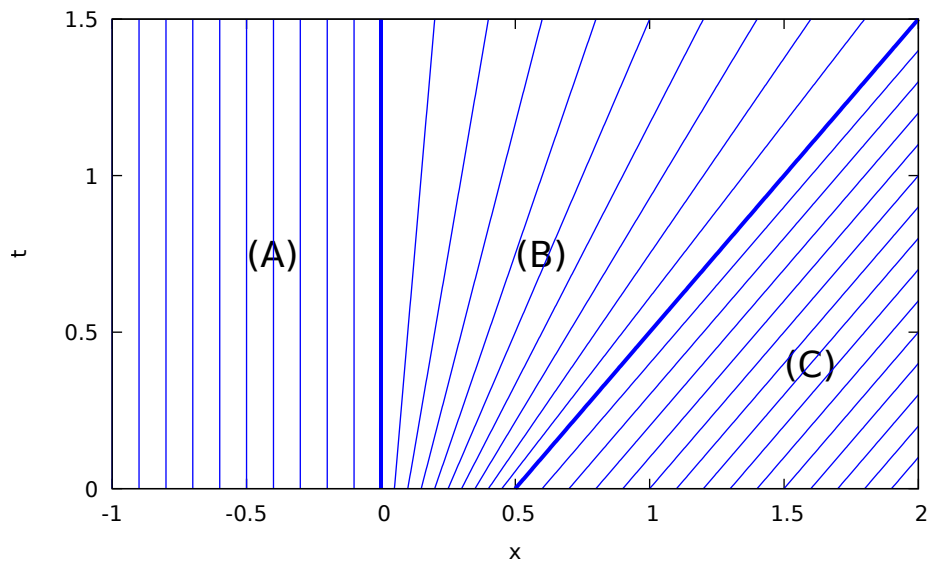


FIGURE 2.2 – Droites caractéristiques de l'exemple pour  $\alpha = 1/2$ .

Cauchy (2.12) pour l'équation de Burgers ( $f(u) = u^2/2$  et  $a(u) = u$ ). D'après (2.17), la droite caractéristique de pied  $x_0$  a pour équation :

$$X_{x_0}(t) = x_0 + u^0(x_0)t, \quad t \in \mathbb{R}$$

soit avec la condition initiale considérée (voir la figure 2.2)

$$\begin{cases} X_{x_0}(t) = x_0 & \text{si } x_0 \leq 0 & \text{(zone (A))} \\ X_{x_0}(t) = x_0 + \frac{x_0}{\alpha} t & \text{si } 0 \leq x_0 \leq \alpha & \text{(zone (B))} \\ X_{x_0}(t) = x_0 + t & \text{si } x_0 \geq \alpha & \text{(zone (C))} \end{cases} .$$

La solution  $u$  est alors donnée par (voir la figure 2.3) :

$$u(x, t) = u^0(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{\alpha + t} & \text{si } 0 \leq x \leq \alpha + t \\ 1 & \text{si } x \geq \alpha + t \end{cases} .$$

On remarque que pour tout  $t$  fixé, la fonction  $u$  reste croissante en  $x$ .

### 2.2.2 Solutions classiques locales et naissance d'un choc

Nous abandonnons maintenant l'hypothèse que la vitesse initiale  $a^0$  définie par (2.18) est une fonction croissante. Dans ce cas, les solutions classiques peuvent ne pas exister pour tout temps mais seulement localement.

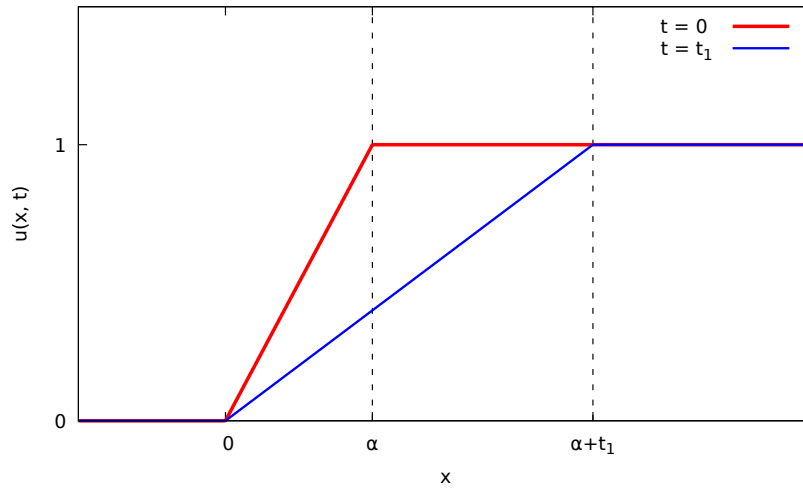


FIGURE 2.3 – Allure de la solution à deux instants.

Dans cette section, pour des raisons purement techniques, nous ferons l'hypothèse supplémentaire, peu restrictive en pratique :

$$\text{La fonction } x \mapsto u^0(x) \text{ est bornée sur } \mathbb{R}. \quad (2.24)$$

On en déduit bien sûr que la vitesse initiale  $a^0$  est elle-même bornée.

### 2.2.2.1 Existence d'une solution classique locale

#### Théorème 2.10: Temps d'apparition d'un choc

Si la dérivée de  $a^0$  prend des valeurs strictement négatives, alors il n'existe pas de solution classique pour tout temps  $t > 0$ . Il n'existe qu'une solution classique pour  $0 \leq t < T^*$  où  $T^*$ , appelé le temps maximal, est donné par :

$$T^* = - \left( \inf_{x_0 \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{da^0}{dx}(x_0) \right\} \right)^{-1}. \quad (2.25)$$

La solution classique  $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, T^*])$  est quant à elle donnée par

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad u(x, t) = u^0(F_t^{-1}(x)) \quad (2.26)$$

où  $F_t$  donnée par (2.19) est bijective pour tout  $t < T^*$ .

#### Remarque 2.11

L'hypothèse assure que  $0 < T^* < +\infty$ .



**DÉMONSTRATION:** Nous commençons par montrer l'existence d'une unique solution classique locale pour  $0 < t < T^*$ . On reprend en fait la démonstration du théorème 2.8. Pour tout  $t < T^*$ , la fonction  $x_0 \rightarrow F_t(x_0)$  est strictement croissante (sa dérivée - cf. (2.20) - est supérieure à  $1 - t/T^*$ ) et tend vers  $\pm\infty$  quand  $x_0 \rightarrow \pm\infty$  (le lecteur notera que c'est l'hypothèse technique (2.24) qui permet de le garantir). Elle définit donc à nouveau une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  (à condition que  $t < T^*$ ). Pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T^*[$ , il existe donc un unique  $x_0(x, t) := F_t^{-1}(x)$  qui vérifie (2.21). Comme dans la preuve du théorème 2.8, cela permet d'établir l'existence d'une solution classique  $u$  pour  $t \in [0, T^*[$ .

On verra dans la Proposition 2.12 que, d'après les formules (2.23), les dérivées de la solution classique tendent vers l'infini lorsque  $t$  tend vers  $T^*$ . Démontrons directement que la solution classique ne peut exister au delà du temps  $T^*$ .

Soit  $t_{max}$ , le temps maximum  $t_{max}$  d'existence d'une solution classique, défini par

$$t_{max} = \sup\{ t > 0 / \text{il existe une solution classique sur } \mathbb{R}^+ \times [0, t[ \}$$

Nous savons déjà que  $t_{max} \geq T^*$ . Comme  $a^0$  n'est pas une fonction croissante, on sait qu'il existe  $x_2 > x_1$  tels que  $a^0(x_1) > a^0(x_2)$ . Alors, les droites caractéristiques issues des points  $x_1$  et  $x_2$  se croisent à l'instant  $\bar{t}$  et au point  $\bar{x}$  donnés par :

$$\begin{cases} \bar{t} = \frac{x_2 - x_1}{a^0(x_1) - a^0(x_2)} > 0, \\ \bar{x} = x_1 + a^0(x_1)\bar{t} = x_2 + a^0(x_2)\bar{t} \end{cases}$$

S'il existait une solution classique  $u$  jusqu'à l'instant  $\bar{t}$ , elle devrait donc vérifier simultanément  $u(\bar{x}, \bar{t}) = u^0(x_1)$  et  $u(\bar{x}, \bar{t}) = u^0(x_2)$ , ce qui est impossible donc  $\bar{t} \geq t_{max}$ .

Soit  $x_0$  tel que  $d_x a^0(x_0) < 0$ . Pour  $h > 0$  assez petit on a nécessairement  $a^0(x_0 + h) < a^0(x_0)$  et donc d'après ce qui précède avec  $x_1 = x_0$  et  $x_2 = x_0 + h$

$$t_{max} \leq \frac{h}{a^0(x_0) - a^0(x_0 + h)} \implies t_{max} \leq - \left( \frac{da^0}{dx}(x_0) \right)^{-1} \quad (\text{en faisant tendre } h \text{ vers } 0).$$

Ceci étant vrai pour tout  $x_0$ , on en déduit que  $t_{max} \leq T^*$  ■

Quand  $t$  s'approche de  $T^*$ , par le théorème 2.10, la solution reste  $L^\infty$  mais elle tend à devenir discontinue.

#### Proposition 2.12: Apparition de discontinuités

Quand  $t$  tend vers  $T^*$ , la solution classique se comporte

$$\lim_{t \rightarrow T^*} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \lim_{t \rightarrow T^*} \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(\cdot, t) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = +\infty.$$

**DÉMONSTRATION:** Pour simplifier, nous démontrons le résultat dans le cas où l'infimum apparaissant dans la définition (2.25) de  $T^*$  est atteint

$$\exists x^*, \quad T^* = - \left( \frac{da^0}{dx}(x^*) \right)^{-1}. \quad (2.27)$$

Si ce n'est pas le cas, il faudrait raisonner sur des suites tendant vers  $\pm\infty$ . On rappelle que pour  $t < T^*$ , la solution est donnée par (2.26) et donc sa dérivée par rapport  $x$  est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t < T^*, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{du^0}{dx}(F_t^{-1}(x)) \frac{\partial F_t^{-1}}{\partial x}(x).$$

avec

$$F_t^{-1}(x) + a^0(F_t^{-1}(x))t = x.$$

En dérivant cette dernière relation par rapport à  $x$ , on trouve

$$1 = \frac{\partial F_t^{-1}}{\partial x}(x) \left[ 1 + \frac{da^0}{dx}(F_t^{-1}(x))t \right].$$

Ceci donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t < T^*, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{du^0}{dx}(F_t^{-1}(x)) \left[ 1 + \frac{da^0}{dx}(F_t^{-1}(x))t \right]^{-1}.$$

On se place sur la caractéristique de pied  $x^*$  et pour  $t < T^*$  : soit  $x = X_{x^*}(t)$  qui s'écrit également  $x = F_t(x^*)$ . Quand  $t$  tend vers  $T^*$ , on a donc  $F_t^{-1}(x)$  qui tend vers  $x^*$  et donc  $\frac{da^0}{dx}(F_t^{-1}(x))$  tend vers  $-1/T^*$  d'après (2.27). Ceci implique

$$\frac{\partial u}{\partial x}(F_t(x^*), t) = \frac{du^0}{dx}(x^*) \left[ 1 - \frac{t}{T^*} \right]^{-1} \xrightarrow{t \rightarrow T^*} +\infty$$

D'après l'équation (2.12)-(i), la dérivée par rapport au temps explose aussi. ■

### Remarque 2.13

La naissance d'une discontinuité est un phénomène purement non-linéaire, qui peut se produire même si  $u^0$  est très régulière.

#### 2.2.2.2 Exemple

Considérons cette fois la condition initiale suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u^0(x) = e^{-x^2/2}.$$

Pour l'équation de Burgers ( $a(u) = u$ ), les droites caractéristiques ont pour équation :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad X_{x_0}(t) = e^{-x_0^2/2}t + x_0, \quad t > 0.$$

Le temps critique  $T^*$  (qui correspond au temps pour lequel des droites caractéristiques se rencontrent, voir la figure 2.4) peut être calculé explicitement et est égal à  $T^* = \sqrt{e}$ . (voir la figure 2.5). Ce temps  $T^*$  défini par (2.25) correspond à l'infimum de la fonction  $d_x u^0$  qui est atteint en  $x_0^* = 1$ . La discontinuité va apparaître au temps  $t = T^*$  et au point (appelé point d'explosion)  $x^* = X_{x_0^*}(T^*) = 2$ .

La solution  $u$ , est représentée à différents instants dans la figure 2.6.

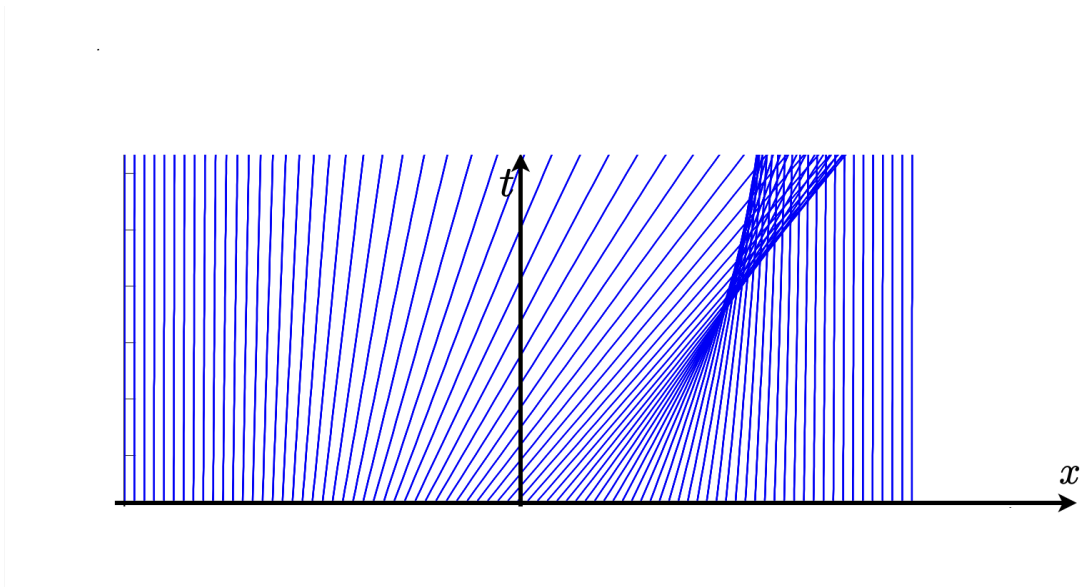


FIGURE 2.4 – Droites caractéristiques de l'exemple de la section 2.2.2.2.

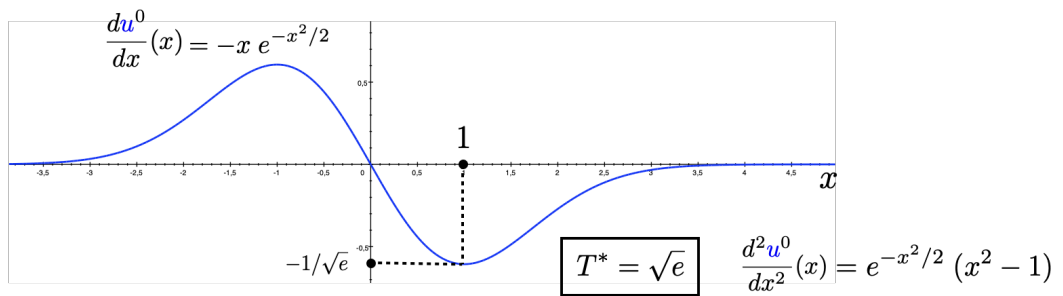


FIGURE 2.5 – Représentation de la dérivée de la condition initiale de l'exemple de la section 2.2.2.2.

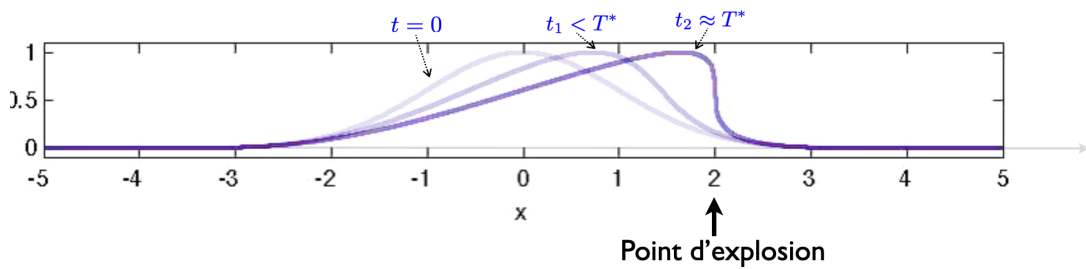


FIGURE 2.6 – Solution correspondant à l'exemple de la section 2.2.2.2 à  $t = 0$ ,  $0 < t_1 < T^*$  et  $t_2 \approx T^*$ .

## 2.3 Solutions faibles - Solutions entropiques

On a vu au paragraphe précédent que, même si la donnée initiale  $u^0$  est très régulière, il peut ne pas exister de solution classique au problème de Cauchy (2.12) pour tout temps  $t > 0$ . À partir d'un temps critique  $T^*$ , la solution  $u$  devient discontinue. Pour pouvoir définir une solution au delà de ce temps, il faut introduire une notion plus faible de solution autorisant des discontinuités. En quel sens, peut-on prolonger la notion de solution au delà du temps  $T^*$ ? Les solutions faibles que nous allons construire seront en particulier des solutions au sens des distributions.

### 2.3.1 Solutions faibles

Rappelons-nous que l'équation (2.12)-(i) a été obtenue comme conséquence de la loi de conservation intégrale (2.3). Or cette dernière a un sens pour les fonctions discontinues. Nous allons donc repartir de cette idée en reformulant cette notion à l'aide de fonctions tests.

Soit  $u$  une solution classique de (2.12) et  $\varphi$  une fonction  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$  à support compact (c'est notre fonction test). Alors, on a, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{t=0}^{+\infty} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) \right) \varphi \, dt \, dx \\ &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{t=0}^{+\infty} \left( -u \frac{\partial \varphi}{\partial t} - f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dt \, dx - \int_{x=-\infty}^{+\infty} u^0(x) \varphi(x, 0) \, dx. \end{aligned}$$

Cette égalité ne fait plus appel explicitement aux dérivées de  $u$  et a donc un sens même si  $u$  n'est pas a priori régulière : il suffit par exemple que  $u$  soit localement intégrable ! Cette observation nous conduit à introduire la notion de solution faible qui va seulement imposer à la solution d'être localement bornée (donc en particulier localement intégrable) sur  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ .

#### Définition 2.14: Solution faible

Soit  $u^0 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$ . Une fonction  $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ , est appelée solution faible du problème de Cauchy (2.12) si elle satisfait

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{t=0}^{+\infty} \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx \, dt + \int_{x=-\infty}^{+\infty} u^0(x) \varphi(x, 0) dx = 0 \quad (2.28)$$

pour tout  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^1$  à support compact dans  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ .

Le lemme suivant assure la cohérence des définitions 2.4 et 2.14.

#### Lemme 2.15: Lien solution faible - solution classique

Si  $u$  est une solution classique du problème de Cauchy (2.12), alors c'est une solution faible. Réciproquement, si  $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$  est une solution faible du problème de

Cauchy (2.12), alors c'est une solution classique.

**DÉMONSTRATION:** La première partie a été démontrée précédemment. Réciproquement, soit  $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$  une solution faible de (2.12). Alors, d'après (2.28), on a :

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{t=0}^{+\infty} \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dt dx = 0$$

pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times ]0, +\infty[)$ . Autrement dit, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) = 0 \quad \text{au sens des distributions.} \quad (2.29)$$

Mais comme  $u$  est régulière, ceci est en fait vérifié au sens classique, point par point.

Soit maintenant une fonction  $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$  à support compact dans  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ . En intégrant (2.28) par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{t=0}^{+\infty} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) \right) \varphi dt dx + \int_{x=-\infty}^{+\infty} (u^0(x) - u(x, 0)) \varphi(x, 0) dx \\ &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} (u^0(x) - u(x, 0)) \varphi(x, 0) dx \quad \text{d'après (2.29).} \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout  $\varphi$ , on en déduit (2.12)-(ii). ■

### 2.3.2 Solutions $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Condition de choc

Dans cette section, nous allons nous intéresser à une classe particulière de solutions faibles, les solutions  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et nous allons caractériser ces solutions de manière plus explicite que la définition 2.14.

**Définition 2.16:** Fonction  $\mathcal{C}^1$  par morceaux

Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert borné de  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ . Une fonction  $(x, t) \mapsto v(x, t)$  est dite  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $\mathcal{O}$  s'il existe un nombre fini de courbes  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_p$  de la forme :

$$\Sigma_i := \{x = \sigma_i(t), \quad t \in [t_i^-, t_i^+]\} \quad \text{où } \sigma_i \text{ est une fonction } \mathcal{C}^1 \text{ de } t$$

telles que  $v$  soit égale à la restriction d'une fonction de  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$  dans l'adhérence de chaque composante connexe  $\mathcal{O}_j$  de  $\mathcal{O} \setminus \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cdots \cup \Sigma_p$ , (voir les schémas représentés dans les figures 2.7, 2.8, 2.9 et 2.10.)

Les courbes  $\Sigma_i$  sont appelées les lignes de chocs ou discontinuités de la fonction.

Une fonction  $v(x, t)$  est dite  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$  si elle est  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur tout ouvert borné de  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ .

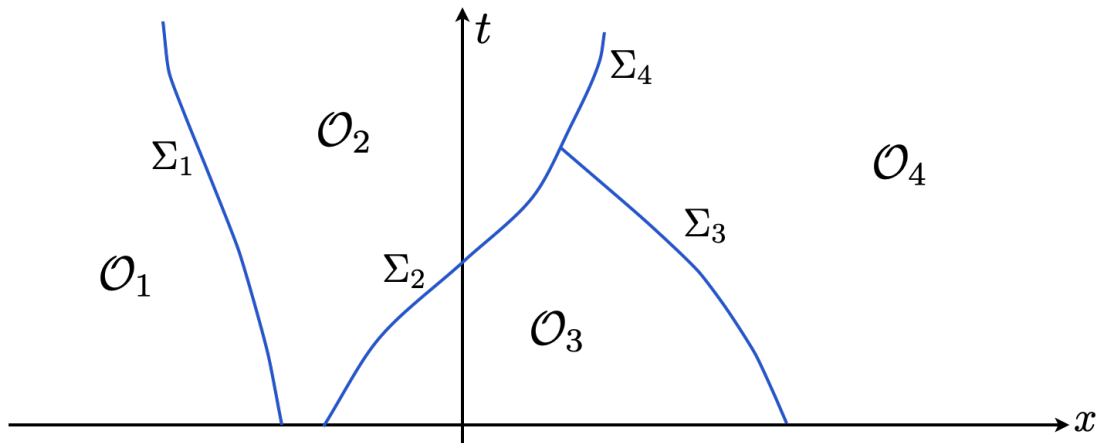


FIGURE 2.7 – Représentation de lignes de chocs  $\Sigma_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  dans le plan  $(x, t)$  et des composantes connexes  $\mathcal{O}_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  sur lesquelles  $v$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Les lignes de chocs peuvent avoir un temps fini d'existence (voir  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_3$ ) et peuvent apparaître au cours du temps (voir  $\Sigma_4$ ).

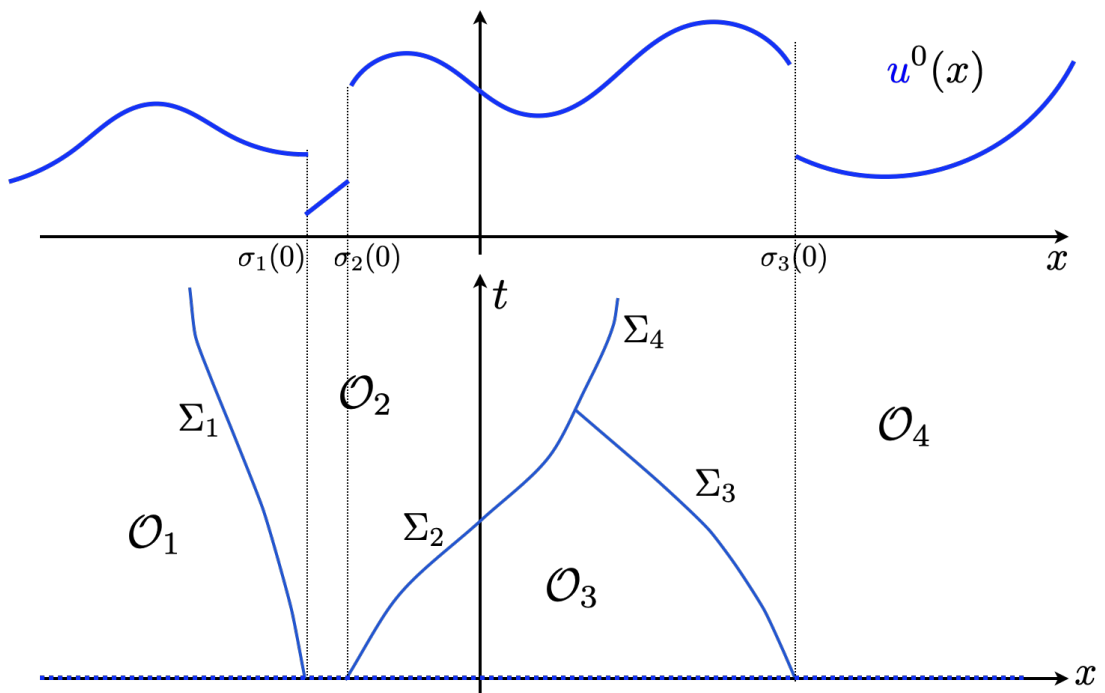


FIGURE 2.8 – Les lignes de chocs  $\Sigma_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  prennent leur valeurs à  $t = 0$  aux points de discontinuités de la condition initiale.

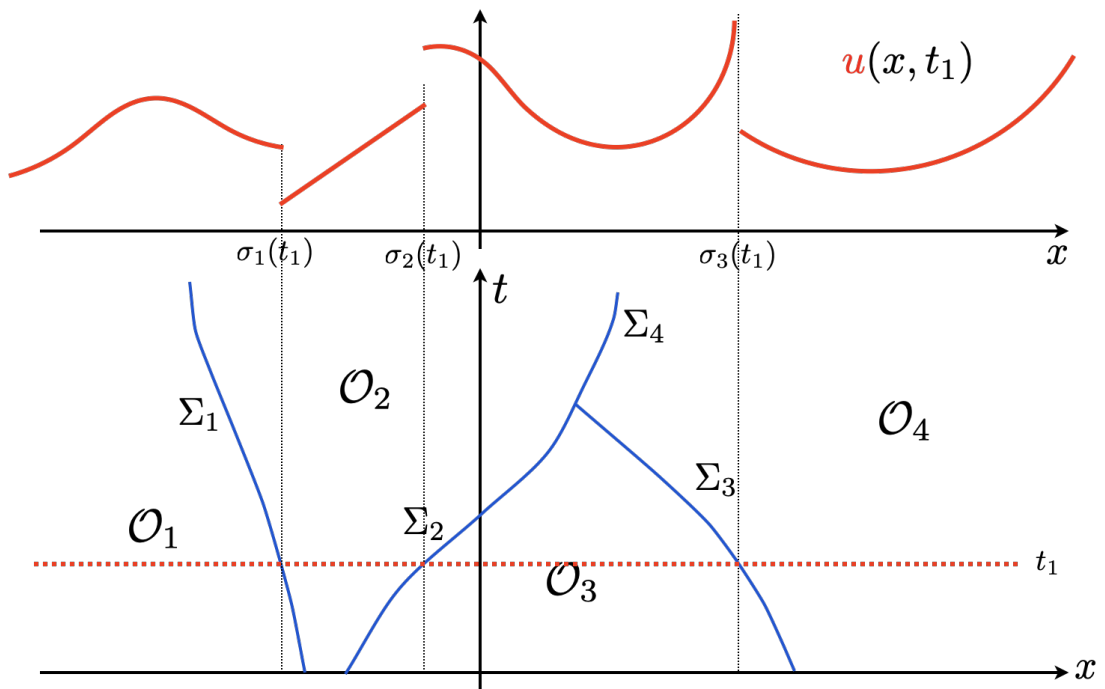


FIGURE 2.9 – A un instant noté (ici noté  $t_1$ ), la solution est discontinue aux points  $\sigma_i(t_1)$  et est  $\mathcal{C}^1$  en dehors..

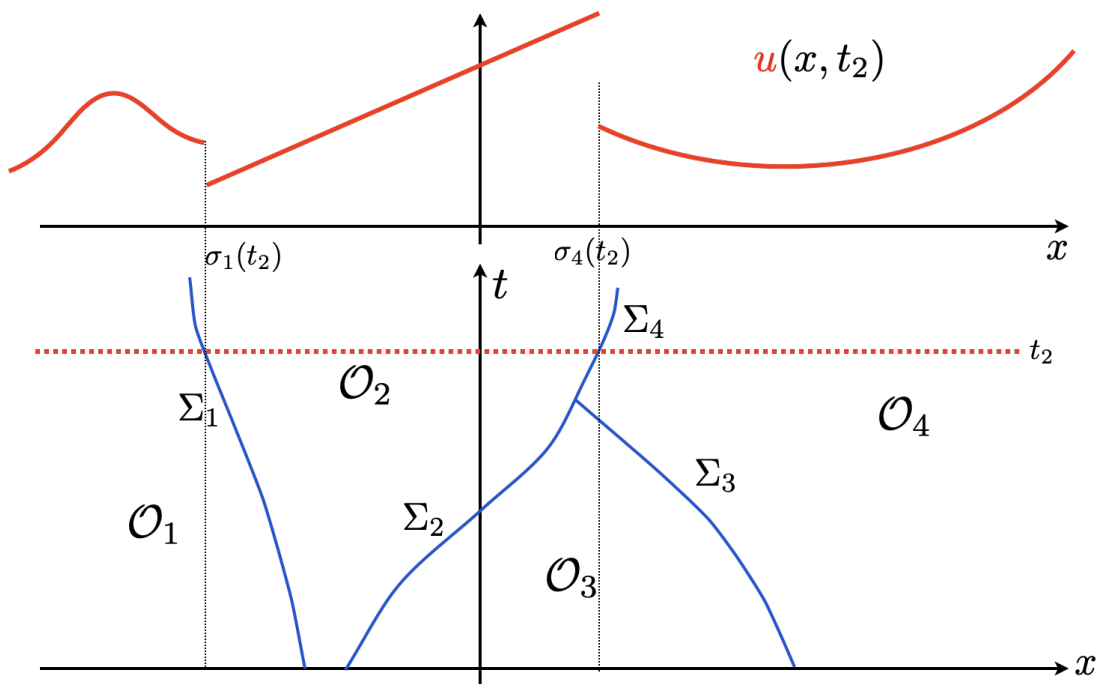


FIGURE 2.10 – A un instant noté (ici noté  $t_2$ ), la solution est discontinue aux points  $\sigma_i(t_2)$  et est  $\mathcal{C}^1$  en dehors.

Notons que si une fonction  $v$ ,  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, peut admettre, à travers un nombre fini de courbes  $\Sigma_j$ , des discontinuités en valeur ou en dérivée; cette fonction, ainsi que ses dérivées en temps et en espace admettent nécessairement des limites de part et d'autre de ces courbes.

Nous pouvons maintenant considérer des solutions du problème qui soient seulement  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. Nous allons voir que les discontinuités d'une telle solution ne sont pas arbitraires.

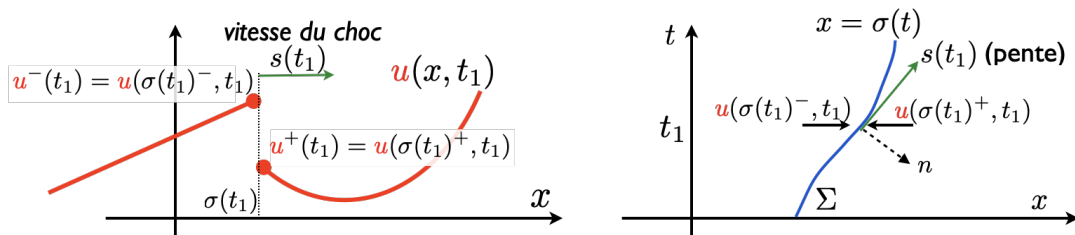
Pour fixer les notations, si  $u$  est une fonction  $\mathcal{C}^1$  par morceaux dans le plan  $(x, t)$  et  $\Sigma$  une courbe de discontinuité de  $u$  de la forme  $(\sigma(t), t)$ , on note (voir la figure 2.11) :

—  $n$  la normale unitaire à  $\Sigma$  en  $(\sigma(t), t)$  orientée vers les  $x$  positifs, de sorte que :

$$n = \begin{pmatrix} n_x \\ n_t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -s \end{pmatrix} \text{ où } s = \sigma'(t). \quad (2.30)$$

—  $u^-$  et  $u^+$  les valeurs de  $u$  « à gauche » et « à droite » de  $\Sigma$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \begin{cases} u^-(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\sigma(t) - \varepsilon, t), \\ u^+(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\sigma(t) + \varepsilon, t). \end{cases} \quad (2.31)$$



**FIGURE 2.11** – Au temps  $t_1$ , la fonction prend de part et d'autre du point de discontinuité  $(\sigma(t_1), t_1)$  les valeurs notées  $u^-(t_1)$  (pour la valeur juste avant) et  $u^+(t_1)$  (pour la valeur juste après). La pente à la ligne de choc  $\Sigma$  au temps  $t_1$  est notée  $s(t_1) := \sigma'(t_1)$  : c'est la vitesse du choc au temps  $t_1$ .

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant.

**Théorème 2.17:** Solutions  $\mathcal{C}^1$  par morceaux - condition de Rankine-Hugoniot

Soit  $u$  une fonction  $\mathcal{C}^1$  par morceaux dans  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ . Alors  $u$  est une solution faible du problème de Cauchy (2.12) si et seulement si :

(i)  $u$  est une solution classique de (2.12) dans tout ouvert où elle est  $\mathcal{C}^1$  ;

(ii)  $u$  satisfait la condition de Rankine Hugoniot à travers chaque ligne de choc  $\Sigma := \{x = \sigma(t), \quad t^- \leq t \leq t^+\}$  :

$$\forall t^- \leq t \leq t^+, \quad s(t) [u^+(t) - u^-(t)] = f(u^+(t)) - f(u^-(t)) \quad (2.32)$$



où  $s(t) := \sigma'(t)$  est la vitesse du choc à l'instant  $t$  et  $u^\pm(t)$  définies dans (2.31) sont les valeurs prises par  $u$  avant et après le choc.

Par analogie à la dynamique des gaz, la condition sur la vitesse du choc est généralement appelée **condition de Rankine Hugoniot**.

**DÉMONSTRATION:** Soit  $u$  une fonction  $\mathcal{C}^1$  par morceaux dans le plan  $(x, t)$  et  $\Sigma$  une courbe de discontinuité de  $u$ . Soit alors  $K$  un ouvert borné que la courbe  $\Sigma$  partage en deux composantes connexes  $K^-$  et  $K^+$ . Pour simplifier, on supposera que  $K$  est contenu dans le demi-plan  $t > 0$  mais ceci n'est pas restrictif. Enfin, on suppose que  $u$  est  $\mathcal{C}^1$  dans l'adhérence de chacun des ouverts  $K^-$  et  $K^+$ .

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ . Comme  $u$  est régulière sur  $K^-$  et  $K^+$  :

$$\int_{K^-} \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt = - \int_{K^-} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (f(u)) \right) \varphi dx dt + \int_{\Sigma} (u^- n_t + f(u^-) n_x) \varphi d\gamma,$$

et de même :

$$\int_{K^+} \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt = - \int_{K^+} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (f(u)) \right) \varphi dx dt - \int_{\Sigma} (u^+ n_t + f(u^+) n_x) \varphi d\gamma.$$

D'où finalement :

$$\begin{aligned} \int_K \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt &= - \int_{K^- \cup K^+} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (f(u)) \right) \varphi dx dt \\ &\quad - \int_{\Sigma} \{ (u^+ - u^-) n_t + (f(u^+) - f(u^-)) n_x \} \varphi d\gamma. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Le théorème s'en déduit. En effet, si  $u$  est une solution faible du problème (2.12), elle satisfait l'équation (2.12) au sens des distributions dans  $K$  et au sens classique dans  $K^-$  et  $K^+$ . Autrement dit :

$$\int_K \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_{K^- \cup K^+} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (f(u)) \right) dx dt = 0.$$

D'après (2.33), on a donc :

$$\int_{\Sigma} \{ (u^+ - u^-) n_t + (f(u^+) - f(u^-)) n_x \} \varphi d\gamma = 0.$$

Comme ceci est vrai pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ , on en déduit en utilisant l'expression exacte de la normale (2.30) :

$$(u^+ - u^-)(-\sigma'(t)) + f(u^+) - f(u^-) = 0 \quad \text{le long de } \Sigma \cap K.$$

Réciproquement, si  $u$  satisfait (i) et (ii), on a d'après (2.33) :

$$\int_K \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt = 0$$

pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ , donc  $u$  est solution faible du problème. ■

On peut réécrire la relation (2.32) sous la forme synthétique d'un taux d'accroissement

$$s[u] = [f(u)] \quad \text{où } s = \sigma'(t),$$

à rapprocher de la dérivée de  $f(u)$ ,  $a(u)$  qui permet d'obtenir la vitesse de propagation des caractéristiques.

## Remarque 2.18: Equation de transport - équation de Burgers

Considérons deux cas particuliers.

- Dans le cas particulier de l'équation de transport, on a :  $f(u) = cu$ . La condition de choc s'écrit donc :  $s(t) = c$  pour tout  $t$ . Autrement dit, dans le cas linéaire, les discontinuités se propagent nécessairement le long des caractéristiques. Ainsi, si  $u^0$  est une fonction seulement  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, la fonction  $u$  donnée par  $u(x, t) = u^0(x - ct)$  est une solution faible de l'équation.
- Dans le cas de l'équation de Burgers, la condition de Rankine-Hugoniot s'écrit :

$$s(t) = \frac{u^+(t) + u^-(t)}{2}.$$

Autrement dit, la vitesse du choc est la moyenne de la vitesse des caractéristiques de part et d'autre.

Nous sommes maintenant en mesure de justifier rigoureusement la remarque 2.5.

Corollaire 2.19: Cas des fonctions  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et continues

Soit  $u$  une fonction  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et continue dans  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ . Si  $u$  est une solution classique du problème (2.12) dans tout domaine où elle est  $\mathcal{C}^1$ , alors c'est une solution faible du problème (2.12).

**DÉMONSTRATION:** En effet, la condition de choc (2.32) est automatiquement toujours satisfaite car on a toujours  $u^+ = u^-$ . ■

## 2.3.2.1 Exemple

On considère l'équation (2.12) pour le flux de Burgers  $f(u) = u^2/2$ , avec la condition initiale donnée par

$$u^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \alpha, \\ 0 & \text{si } x > \alpha. \end{cases}$$

qui est discontinue en  $x = \alpha$ . Nous allons construire une solution faible qui s'écrit

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \sigma(t), \\ 0 & \text{si } x > \sigma(t). \end{cases}$$

En tant que fonction constante par morceaux, on a bien  $u$  qui vérifie (2.12)-(i) là où elle est  $\mathcal{C}^1$ , c'est à dire  $\{(x, t), x < \sigma(t)\}$  et  $\{(x, t), x > \sigma(t)\}$ . Pour que  $u$  soit une solution faible, la vitesse de propagation de la ligne de choc est donnée par

$$\sigma'(t) = 1/2.$$

Pour que  $u$  vérifie la condition initiale (2.12)-(ii), il faut enfin que  $\sigma(0) = \alpha$ . Ainsi,

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < t/2 + \alpha, \\ 0 & \text{si } x > t/2 + \alpha \end{cases}$$

est une solution faible de ce problème.

### 2.3.3 Solutions entropiques

#### 2.3.3.1 Non unicité de la solution faible - un exemple

Grâce à la notion de solution faible, nous avons calculé une solution globale au problème de Cauchy (2.12) dans des situations où il n'existait pas de solution classique. La question qui se pose alors est de savoir si cette solution faible globale est unique.

L'exemple suivant montre que ce n'est malheureusement pas le cas.

Considérons l'équation de Burgers pour la donnée initiale suivante :

$$u^0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (2.34)$$

Nous pouvons alors calculer une solution continue au problème de Cauchy : pour cela, il suffit de considérer l'exemple de la section 2.2.1.4 et de faire tendre  $\alpha$  vers 0. On obtient :

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x}{t} & \text{si } 0 \leq x \leq t, \\ 1 & \text{si } x \geq t, \end{cases}$$

On vérifie aisément a posteriori que  $u$  est une solution faible du problème, car elle est continue et c'est une solution classique de l'équation de Burgers là où elle est  $\mathcal{C}^1$ .

Mais en suivant la démarche de l'exemple de la section 2.3.2.1, nous pouvons aussi calculer une solution discontinue. La vitesse de propagation du choc est donnée par la relation  $\sigma'(t) = \frac{1}{2}$ . D'après la condition initiale, on a  $\sigma(0) = 0$ . La solution qui en résulte est donc :

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{t}{2}, \\ 1 & \text{si } x > \frac{t}{2}. \end{cases}$$

## Remarque 2.20

Il est intéressant de noter qu'une condition initiale discontinue peut donner naissance à une solution continue. C'est encore un phénomène purement non-linéaire.

Nous avons pu construire une deuxième solution au problème en introduisant une discontinuité. En fait, on peut même construire une infinité de solutions en introduisant plusieurs courbes de discontinuité issues du point  $(0,0)$ . Ainsi, pour tout  $\gamma < 1$ , la fonction suivante est solution du problème :

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{\gamma}{2} t, \\ \gamma & \text{si } \frac{\gamma}{2} t < x < \frac{t}{2}, \\ 1 - \gamma & \text{si } \frac{t}{2} < x < (1 - \frac{\gamma}{2}) t, \\ 1 & \text{si } x > (1 - \frac{\gamma}{2}) t. \end{cases}$$

On pourrait introduire plusieurs courbes de discontinuité issue de n'importe quel point et en tout temps (dans ce cas il en faut au moins 3). Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , par exemple  $a > 0$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{t}{2}, \\ 1 & \text{si } \frac{t}{2} < x < \sigma_1(t) \\ u_1 & \text{si } \sigma_1(t) < x < \sigma_2(t), \\ u_2 & \text{si } \sigma_2(t) < x < \sigma_3(t), \\ 1 & \text{si } x > \sigma_3(t) \end{cases}$$

où d'après la relation de Rankine Hugoniot pour  $i = 1, 2, 3$ ,  $\sigma_i(t) = \lambda_i t + a$  avec

$$\lambda_1 = \frac{1 + u_1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{u_2 + 1}{2}$$

La solution a un sens seulement si  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$  qui est assuré dès que  $u_2 > 1$  et  $u_1 < 1$  (soit  $\lambda_1 < 1$  et  $\lambda_3 > 1$ ). Si on ne souhaite pas que les deux lignes de choc, définies respectivement à partir de  $t \mapsto t/2$  et  $t \mapsto \sigma_1(t)$ , se rencontrent, il faut que  $\lambda_1 > 1/2$ . Cela laisse encore beaucoup de degrés de liberté pour choisir les constantes.

En fait, nous allons voir dans la suite que pour ce problème (c'est à dire l'équation de Burgers avec la condition initiale (2.34)) la solution physique est la solution continue.

### 2.3.3.2 Passage à la limite dans l'équation dissipative

Nous allons maintenant présenter un critère qui permettra de trier les solutions faibles pour extraire l'unique solution physique du problème.

Comme nous l'avions signalé, l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) = 0 \quad (2.35)$$

est un cas particulier (pour  $\varepsilon = 0$ ) de l'équation **visqueuse** ou **dissipative** :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u_\varepsilon)) - \varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} = 0, \quad (2.36)$$

où  $\varepsilon$  est un petit paramètre strictement positif.

Nous admettrons que le problème de Cauchy constitué de l'équation (2.36) et de la condition initiale

$$u(x, 0) = u^0(x) \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R} \quad (2.37)$$

où  $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ , possède une solution unique  $u_\varepsilon$  qui appartient à  $L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ . De plus,  $u_\varepsilon$  est très régulière sur  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ . Nous pouvons enfin caractériser la solution physique de (2.35-2.37), comme limite de  $u_\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. On admettra ce résultat (sauf la dernière partie) qui nécessite des outils qui dépassent le cadre de ce cours. Voir [Godlewski and Raviart, 2013] pour plus de détails.

#### Théoreme 2.21

Soit  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  la suite de solutions de (2.36) alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)} \leq C \quad (2.38)$$

et

$$u_\varepsilon \longrightarrow u \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0 \text{ presque partout dans } \mathbb{R} \times [0, +\infty[, \quad (2.39)$$

De plus,  $u$  est solution au sens des distributions de l'équation (2.35).

**DÉMONSTRATION:** En utilisant (2.38), (2.39) et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on vérifie aisément que  $u_\varepsilon \rightarrow u$  et que  $f(u_\varepsilon) \rightarrow f(u)$ , au sens des distributions, c'est-à-dire dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ .

Comme la dérivation est une opération continue dans l'espace des distributions, on en déduit que :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x}(f(u_\varepsilon)) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(f(u))$$

dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ . Le lemme s'en déduit. ■

Pour caractériser la limite  $u$  des solutions de l'équation visqueuse, on utilise un critère qui repose sur la notion mathématique d'**entropie**, définie comme suit.

## Définition 2.22: Entropie

On appelle entropie pour l'équation (2.35) tout couple  $(U, F)$  de fonctions  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que :

- (i)  $U$  est une fonction strictement convexe,
- (ii)  $F'(u) = U'(u) f'(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}$ .

Dès que  $U(\cdot)$  et  $F(\cdot)$  sont deux fonctions régulières reliées par la relation (ii) ci-dessus, si  $u$  est une solution classique de l'équation (2.35) on a :

$$U'(u) \frac{\partial u}{\partial t} + U'(u) f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

d'où :

$$\frac{\partial}{\partial t} U(u) + \frac{\partial}{\partial x} F(u) = 0. \quad (2.40)$$

En revanche, si  $u$  est une solution faible de (2.35), par exemple  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, elle ne satisfait pas en général l'équation (2.40) au sens des distributions. En effet, il faudrait pour cela que la relation  $s[U(u)] = [F(u)]$  soit satisfaite le long de toute courbe de discontinuité de  $u$ . Cela est généralement incompatible avec la relation de Rankine-Hugoniot.

Par contre, lorsque  $U$  est **convexe**, on peut montrer que, si la solution faible  $u$  est la limite des solutions  $u_\varepsilon$  de l'équation avec viscosité, l'égalité (2.40) devient une inégalité au sens des distributions. Plus précisément, on peut démontrer le théorème suivant.

## Théorème 2.23

Soit  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  une suite de solutions régulières de (2.36) vérifiant (2.38) et (2.39), et soit  $(U, F)$  une entropie pour l'équation (2.35). Alors  $u$  vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t} U(u) + \frac{\partial}{\partial x} F(u) \leq 0 \quad (2.41)$$

au sens des distributions.

**DÉMONSTRATION:** Comme  $u_\varepsilon$  est une solution régulière de (2.36), on a :

$$U'(u_\varepsilon) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + U'(u_\varepsilon) f'(u_\varepsilon) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} - \varepsilon U''(u_\varepsilon) \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} = 0,$$

qui s'écrit aussi :

$$\frac{\partial}{\partial t} U(u_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x} F(u_\varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(u_\varepsilon) = -\varepsilon U''(u_\varepsilon) \left( \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \right)^2.$$

Par des arguments similaires à ceux de la démonstration du lemme ??, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} U(u_\varepsilon) \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} U(u), \quad \frac{\partial}{\partial x} F(u_\varepsilon) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} F(u) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(u_\varepsilon) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(u) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times [0, +\infty[).$$

En revanche, le terme  $\varepsilon U''(u_\varepsilon) \left( \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \right)^2$  ne peut être traité de façon similaire.

Malgré la présence du facteur  $\varepsilon$ , ce terme ne tend pas nécessairement vers 0 au sens des distributions. Cela est dû au fait que les hypothèses n'empêchent pas  $\partial_x u_\varepsilon$  de tendre vers  $+\infty$ . Cependant, comme  $U$  est convexe, on a :

$$\left\langle -\varepsilon U''(u_\varepsilon) \left( \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \right)^2, \varphi \right\rangle \leq 0$$

pour toute fonction  $\varphi$  positive de  $\mathcal{D}(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ . A la limite, on obtient donc :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} U(u) + \frac{\partial}{\partial x} F(u), \varphi \right\rangle \leq 0$$

pour toute fonction  $\varphi$  positive de  $\mathcal{D}(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ . ■

La condition (2.41) est appelée **condition d'entropie**.

On peut maintenant définir la notion de solution entropique.

#### Définition 2.24: Solution entropique

Une solution faible  $u$  du problème de Cauchy (2.35-2.37) est appelée solution entropique si elle satisfait la condition d'entropie (2.41) pour toute entropie  $(U, F)$  de l'équation (2.35).

### 2.3.3.3 Solutions entropiques $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Chocs entropiques

Pour les solutions  $\mathcal{C}^1$  par morceaux étudiées au paragraphe 2.3.2, la recherche de solutions entropiques va limiter les chocs admissibles : ce sont les chocs entropiques.

#### Théoreme 2.25: Condition d'entropie pour les fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Soit  $u$  une fonction  $\mathcal{C}^1$  par morceaux dans  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$  solution faible de (2.35-2.37), c'est à dire qui vérifie :

- $u$  est une solution classique du problème de Cauchy (2.35-2.37) là où elle est  $\mathcal{C}^1$ .
- $u$  vérifie le long de toute courbe de discontinuité  $\Sigma$  :

$$\sigma'(t)(u^+(t) - u^-(t)) = f(u^+(t)) - f(u^-(t)).$$

Alors  $u$  est une solution entropique si et seulement si, pour toute entropie  $(U, F)$ , le long de toute courbe de discontinuité  $\Sigma(\sigma(t), u^-(t), u^+(t))$  on a

$$\sigma'(t) [U(u^+(t)) - U(u^-(t))] \geq F(u^+(t)) - F(u^-(t)). \quad (2.42)$$

**DÉMONSTRATION:** Soit  $u$  une fonction  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et  $(U, F)$  une entropie pour l'équation (2.35).

En reprenant les notations et la démarche du théorème 2.17, on vérifie aisément que, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(K)$  :

$$\begin{aligned} \int_K \left( U(u) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + F(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt &= - \int_{K^- \cup K^+} \left( \frac{\partial}{\partial t} U(u) + \frac{\partial}{\partial x} F(u) \right) \varphi dx dt \\ &\quad - \int_{\Sigma} \{ (U(u^+) - U(u^-)) n_t + (F(u^+) - F(u^-)) n_x \} \varphi d\gamma. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Soit  $u$  une solution faible du problème satisfaisant la condition d'entropie (2.41). On a donc

$$\int_K \left( U(u) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + F(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_{K^- \cup K^+} \left( \frac{\partial}{\partial t} U(u) + \frac{\partial}{\partial x} F(u) \right) \varphi dx dt = 0$$

pour toute fonction  $\varphi$  positive de  $\mathcal{D}(K)$ . On a également

$$\int_{K^- \cup K^+} \left( \frac{\partial}{\partial t} U(u) + \frac{\partial}{\partial x} F(u) \right) \varphi dx dt = 0,$$

car  $u$  est solution classique dans  $K^-$  et  $K^+$  et donc elle vérifie (2.40). D'après (2.43), on a, en utilisant l'expression exacte de la normale donnée (2.30),

$$(U(u^+) - U(u^-)) (-\sigma'(t)) + (F(u^+) - F(u^-)) \leq 0$$

au sens des distributions le long de  $\Sigma$ . Autrement dit, on a :

$$\sigma'(t) (U(u^+) - U(u^-)) \geq (F(u^+) - F(u^-)) \quad \text{dans } \mathcal{D}'.$$

■

Un corollaire évident est que si  $u$  est une solution faible continue alors elle n'a pas de courbes de discontinuité : elle est donc entropique.

#### Corollaire 2.26

Si  $u$  est une solution faible continue alors elle est entropique.

Le critère (2.42) est relativement peu pratique pour vérifier qu'un choc est entropique ou non. Heureusement, on peut en donner une forme équivalente plus simple, à commencer par le cas où  $f$  est convexe ou concave.

#### Théorème 2.27: Choc entropique. Cas convexe-concave

La solution faible  $u$  est une solution entropique si et seulement si le long de toute courbe de discontinuité  $\Sigma(\sigma(t), u^-(t), u^+(t))$  on a

$$u^-(t) > u^+(t) \quad \text{si } f \text{ est strictement convexe.} \quad (2.44)$$

$$u^-(t) < u^+(t) \quad \text{si } f \text{ est strictement concave.} \quad (2.45)$$

Avant de démontrer ce théorème, nous allons montrer que la fonction  $f$  soit convexe ou concave, les conditions ci-dessus signifient que lorsqu'il y a choc, les caractéristiques doivent **converger**



vers la ligne de choc et non s'en écarter. On rappelle que  $a$  désigne la dérivée de  $f$ .

### Lemme 2.28

Soit  $u$  une solution entropique du problème de Cauchy (2.35-2.37), qui est  $\mathcal{C}^1$  par morceaux dans  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ . Alors,  $u$  vérifie le long de toute courbe de discontinuité  $\Sigma(\sigma(t), u^-(t), u^+(t))$  :

$$a(u^+(t)) < \sigma'(t) < a(u^-(t)).$$

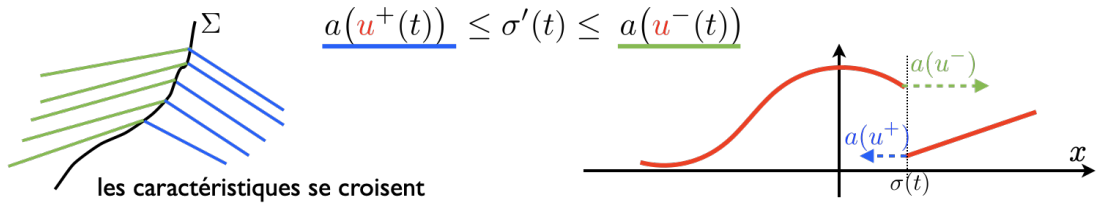


FIGURE 2.12 – Si  $f$  est convexe ou concave, en tout temps, le long des chocs entropiques, la vitesse de l'information en amont  $a(u^-(t))$  est supérieure à la vitesse du choc  $\sigma'(t)$  elle même supérieure à la vitesse aval  $a(u^+(t))$ .

**DÉMONSTRATION:** Il suffit de faire la preuve pour  $f$  convexe, la démonstration étant similaire pour  $f$  concave. Comme  $f$  est strictement convexe, la fonction :

$$u \mapsto \frac{f(u) - f(u^+)}{u - u^+}$$

est continue et strictement croissante sur  $[u^+, u^-]$ . Il en résulte que :

$$a(u^+) < \frac{f(u^-) - f(u^+)}{u^- - u^+}.$$

Mais, par la relation de Rankine-Hugoniot, ceci s'écrit :  $a(u^+) < \xi'(t)$ . On démontre de même la seconde inégalité. ■

### Remarque 2.29: Cas particulier de l'équation de Burgers

Dans le cas de l'équation de Burgers, en utilisant la remarque 2.18 la relation du lemme 2.28

$$u^+(t) < \frac{u^-(t) + u^+(t)}{2} < u^-(t).$$

La condition d'entropie permet donc d'éliminer les solutions discontinues non physiques de l'exemple section 2.3.3.1.

**DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.27:** Démontrons le résultat pour  $f$  convexe, le résultat pour

$f$  concave se démontrant de la même façon. Nous partons de la fin de la démonstration du théorème 2.25. Considérons l'application  $G$  suivante :

$$u \mapsto G(u) = \frac{f(u) - f(u^-)}{u - u^-} (U(u) - U(u^-)) - (F(u) - F(u^-)).$$

Nous allons montrer que  $G$  est une fonction décroissante de  $u$ . Admettons-le pour l'instant. Comme on a  $G(u^-) = 0$  et que (2.42) s'écrit  $G(u^+) \geq 0$ , il résulte de la décroissance de  $G$  que les conditions (2.42) et (2.45) sont équivalentes, ce qui démontre le théorème.

Prouvons maintenant que  $G$  est décroissante. On a :

$$G'(u) = \frac{f'(u)(u - u^-) - (f(u) - f(u^-))}{(u - u^-)^2} (U(u) - U(u^-)) + \frac{f(u) - f(u^-)}{u - u^-} U'(u) - F'(u).$$

Mais comme  $F'(u) = U'(u)f'(u)$ , ceci s'écrit aussi

$$\begin{aligned} G'(u) &= \frac{f'(u)(u - u^-) - (f(u) - f(u^-))}{(u - u^-)^2} (U(u) - U(u^-)) + \frac{f(u) - f(u^-) - f'(u)(u - u^-)}{u - u^-} U'(u) \\ &= \frac{(f'(u)(u - u^-) - f(u) + f(u^-)) (U(u) - U(u^-) - U'(u)(u - u^-))}{(u - u^-)^2}. \end{aligned}$$

Or  $f$  et  $U$  sont convexes, d'où :

$$f'(u)(u - u^-) - (f(u) - f(u^-)) < 0 \quad \text{et} \quad U'(u)(u - u^-) - (U(u) - U(u^-)) < 0 \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

ce qui achève la démonstration. ■

#### Remarque 2.30: Entropie et dynamique des gaz

En dynamique des gaz, la condition d'entropie se déduit du second principe de la thermodynamique. En effet, ce principe implique que l'entropie augmente à travers un choc, de l'amont vers l'aval de l'écoulement. Il en résulte que la vitesse normale relative du fluide diminue de l'amont vers l'aval. C'est ce qui justifie l'appellation « condition d'entropie ».

Nous donnons maintenant la version générale du théorème 2.27. Sa démonstration est toutefois plus délicate que celle du théorème 2.27 et sera admise ici.

#### Théorème 2.31: Choc entropique. Cas général

La fonction  $u$  est une solution entropique si et seulement si le long de toute courbe de discontinuité  $\Sigma(\sigma(t), u^-(t), u^+(t))$  on a  $\forall \alpha \in [0, 1]$

$$\begin{cases} f(\alpha u^- + (1 - \alpha)u^+) \geq \alpha f(u^-) + (1 - \alpha)f(u^+) & \text{si } u^+ > u^-, \\ f(\alpha u^- + (1 - \alpha)u^+) \leq \alpha f(u^-) + (1 - \alpha)f(u^+) & \text{si } u^+ < u^-. \end{cases} \quad (2.46)$$

## Remarque 2.32: Interprétation géométrique

La condition s'interprète facilement d'un point de vue géométrique. Un choc  $\Sigma(\sigma(t), u^-(t), u^+(t))$  est entropique si et seulement si une des deux conditions suivantes est réalisée :

- (i)  $u^+ > u^-$  et le graphe de  $u \mapsto f(u)$  est au dessus de sa corde sur le segment  $[u^-, u^+]$ ,
- (ii)  $u^+ < u^-$  et le graphe de  $u \mapsto f(u)$  est en dessous de sa corde sur le segment  $[u^-, u^+]$ .

Le graphe d'une fonction convexe étant toujours en dessous de sa corde et on retombe bien sur la condition  $u^+ < u^-$ .

## 2.3.4 Existence et unicité de la solution entropique

D'un point de vue mathématique, le gros avantage de la notion de solution entropique est qu'elle permet d'obtenir un résultat d'unicité. Pour conclure, nous allons énoncer, sans le démontrer, le résultat fondamental de la théorie des lois de conservation scalaire qui assure l'existence et l'unicité d'une solution entropique au problème de Cauchy.

## Théorème 2.33: Existence et unicité de la solution entropique

Soit  $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Alors le problème de Cauchy (2.12) admet une solution entropique unique  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$  qui vérifie l'estimation

$$\text{pour presque tout } t \in \mathbb{R}^+, \quad \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Si  $u$  et  $v$  sont les solutions entropiques associées aux conditions initiales  $u^0$  et  $v^0$ , on a pour tout  $x_1 < x_2$  et pour presque tout  $t \in \mathbb{R}^+$

$$\int_{x_1}^{x_2} |u(x, t) - v(x, t)| dx \leq \int_{x_1 - At}^{x_2 + At} |u^0(x) - v^0(x)| dx \quad (2.47)$$

où

$$A = \max \{ |f'(\xi)| \text{ où } |\xi| \leq \max(\|u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \|v^0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}) \}.$$

## Remarque 2.34: Vitesse de propagation

L'inégalité (2.47) signifie que la valeur de  $u$  au point  $(x, t)$  ne dépend que des valeurs de  $u^0$  dans l'intervalle  $[x - At, x + At]$ . Autrement dit, la solution entropique a une vitesse de propagation finie.

## Remarque 2.35: A propos de la démonstration du théorème

La démonstration de ce théorème est longue et difficile et fait appel à des outils et des arguments mathématiques qui dépassent largement le cadre de ce cours. Nous renvoyons à [Godlewski and Raviart, 2013] pour la démonstration détaillée de ce théorème. Signalons toutefois que

- La démonstration du résultat d'existence est constructive et fait appel à la technique de viscosité. Les principales étapes sont les suivantes (pour une donnée  $u^0$  assez régulière) :
  - On démontre tout d'abord, pour tout  $\epsilon > 0$ , l'existence et l'unicité de la solution (régulière) de (2.12).
  - A l'aide d'estimation a priori et de techniques de compacité, on montre le théorème 2.21 : cette solution  $u_\epsilon$  satisfait (2.38) et (2.39).
  - On utilise le théorème pour passer à la limite et montrer que la limite  $u$  est bien solution entropique de (2.12).
- Le résultat d'unicité est bien entendu une conséquence immédiate du résultat de « stabilité  $L^1$  » (2.47). Il n'est pas très difficile de voir que (2.47) découle de l'inégalité au sens des distributions (pour tout couple  $(u, v)$  de solutions entropiques,  $\text{sgn}(\cdot)$  désigne la fonction « signe »)

$$\frac{\partial}{\partial t} |u - v| + \frac{\partial}{\partial x} \left( \text{sgn}(u - v) (f(u) - f(v)) \right) \leq 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times ]0, +\infty[)$$

dont la démonstration, qui est elle beaucoup plus délicate, fait appel aux entropies de Kruzkov  $U_k(x) = |u - k|$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

## Théorème 2.36: Monotonie

Si  $u$  et  $v$  sont les solutions entropiques de (2.12) associées aux conditions initiales  $u^0$  et  $v^0$ , on a

$$u^0 \geq v^0 \quad \Rightarrow \quad \text{p.p. } t \in \mathbb{R}^+, \quad u(\cdot, t) \geq v(\cdot, t). \quad (2.48)$$

On en déduit en particulier que

$$\begin{cases} x \rightarrow u^0(x) \text{ croissante} & \Leftrightarrow \text{p.p. } t \in \mathbb{R}^+, \quad x \rightarrow u(x, t) \text{ croissante,} \\ A \leq u^0(x) \leq B \text{ p.p. } x \in \mathbb{R} & \Leftrightarrow \text{p.p. } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad A \leq u(x, t) \leq B. \end{cases} \quad (2.49)$$

**DÉMONSTRATION:** Nous allons seulement démontrer (2.49) à partir de (2.48).

Posons pour tout  $h > 0$ ,  $u_h^0(x) := u^0(x + h)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Par invariance par translation en espace de l'EDP,  $u_h$  définie par  $u_h(x, t) = u(x + h, t)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , est une solution faible de l'EDP qui est entropique. Par unicité c'est la solution du problème avec comme condition initiale  $u_h^0$ . Par définition, si  $u^0$  est croissante alors  $u_h^0 \geq u^0$  pour tout  $h > 0$ . Par le principe de comparaison, on a donc  $u_h(\cdot, t) \geq u(\cdot, t)$  pour tout  $t$  et qui se réécrit  $u(x + h, t) \geq u(x, t)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $t \geq 0$  et ce pour tout  $h$ . Cela signifie que  $x \mapsto u(x, t)$  est croissante pour tout  $t \geq 0$ .

Supposons maintenant que  $v^0 = A$  (resp.  $v^0 = B$ ) alors la solution entropique est  $v(x, t) = A$  pour tout  $(x, t)$  (resp.  $v(x, t) = B$  pour tout  $(x, t)$ ). Par le principe de comparaison, on déduit que si  $A \leq u^0 \leq B$  alors  $A \leq u \leq B$ . ■

## 2.4 Le problème de Riemann

Dans cette section, nous nous limitons pour simplifier au cas où  $f$  est strictement convexe. L'extension au cas où  $f$  est strictement concave est simple. L'extension au cas général est plus délicate et dépasse le cadre de ce cours. Dans les cinq premières parties de cette section, nous considérons le problème de Riemann à 2 états. Dans la dernière partie, nous nous intéresserons au problème de Riemann à 3 états et on utilisera les résultats établis dans les sections précédentes.

### 2.4.1 Présentation du problème

Pour illustrer les résultats obtenus dans ce chapitre, nous allons calculer la solution entropique du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < A, \\ u_d & \text{si } x > A, \end{cases} \end{cases} \quad (2.50)$$

où  $u_g$ ,  $u_d$  et  $A$  sont données.

#### Remarque 2.37: Lien avec la dynamique des gaz

On dit qu'il s'agit d'un problème de Riemann par analogie à un problème étudié par ce dernier en dynamique des gaz : on considère un gaz dans un tube cylindrique très fin et très long. On suppose que le tube est séparé en deux par une membrane et que le gaz qui est au repos n'a pas les mêmes pressions et densités des deux côtés de la membrane. A l'instant  $t = 0$ , la membrane est déchirée et l'on s'intéresse à l'écoulement qui s'en suit.

Pour l'étude du problème général également, il nous faudra distinguer deux cas suivant que  $u_g < u_d$  ou  $u_g > u_d$ .

### 2.4.2 Une solution auto-semblable

Avant tout, nous allons établir la proposition suivante.

**Proposition 2.38: Solution auto-semblable**

La solution faible entropique  $u$  du problème de Riemann (2.50) est auto-semblable, c'est-à-dire qu'elle est de la forme

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad u(x, t) = \mathcal{U} \left( \frac{x - A}{t} \right).$$

**DÉMONSTRATION:** On commence par montrer le résultat pour  $A = 0$ . Il suffit de montrer que, pour tout  $\alpha > 0$  :

$$u(x, t) = u(\alpha x, \alpha t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

Soit  $\alpha > 0$ . Posons  $u_\alpha(x, t) = u(\alpha x, \alpha t)$ . Si  $u$  est solution faible de (2.50), il est facile de voir que  $u_\alpha$  est solution faible également, où on utilise notamment que  $u^0(x) = u^0(\alpha x)$  pour tout  $x$ . De plus, il est facile de voir que si  $u$  est entropique alors  $u_\alpha$  est entropique. Par unicité de la solution faible entropique (voir le théorème 2.33), on a donc  $u = u_\alpha$  pour tout  $\alpha > 0$ .

Pour  $A \neq 0$ , il suffit d'appliquer ce qui précède à  $v(x, t) = u(x + A, t)$ . ■

**Proposition 2.39: Solution auto-semblable**

Une fonction de la forme

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad u(x, t) = \mathcal{U} \left( \frac{x - A}{t} \right), \quad \forall t > 0.$$

est solution classique de (2.12) dans le domaine  $\alpha < \frac{x - A}{t} < \beta$  si et seulement si

$$\mathcal{U}'(\xi) = 0 \quad \text{ou} \quad \mathcal{U}(\xi) = a^{-1}(\xi) \quad \forall \xi \in (\alpha, \beta). \quad (2.51)$$

Notons que si  $f$  est strictement convexe alors  $a$  est strictement croissante et donc inversible.

**DÉMONSTRATION:** Si  $u$  est donnée par l'expression ci-dessus alors

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -\frac{(x - A)}{t^2} \mathcal{U}' \left( \frac{x - A}{t} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{t} \mathcal{U}' \left( \frac{x - A}{t} \right)$$

donc si  $u$  est solution classique dans le domaine  $\alpha < \frac{x - A}{t} < \beta$  alors

$$\frac{1}{t} \mathcal{U}' \left( \frac{x - A}{t} \right) \left[ -\frac{(x - A)}{t} + a \left( \mathcal{U} \left( \frac{x - A}{t} \right) \right) \right]$$

d'où le résultat. ■

Nous pouvons maintenant résoudre explicitement le problème.

### 2.4.3 Cas où $u_g > u_d$ : la solution est une onde de choc

On commence par tracer les caractéristiques qui sont d'équation pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $X_{x_0}(t) = a(u^0(x_0))t + x_0$  si bien qu'il y a deux zones à considérer dans lesquelles les caractéristiques sont parallèles (voir la figure 2.13)

$$\forall t > 0, \quad X_{x_0}(t) = \begin{cases} a(u_g)t + x_0 & \text{si } x < A \\ a(u_d)t + x_0 & \text{si } x > A \end{cases} \quad (2.52)$$

Comme  $u_g > u_d$ , et  $f$  est convexe (donc  $a$  est croissante), on a  $a(u_g) > a(u_d)$ . Les caractéristiques des 2 zones se croisent pour  $t > 0$ . Quand les caractéristiques se croisent, nous allons voir que la solution faible entropique contient nécessairement un choc (ou une ligne de discontinuité). On construit donc la fonction

$$\forall t > 0, \quad u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < \sigma(t) \\ u_d & \text{si } x > \sigma(t). \end{cases} \quad (2.53)$$

Cette fonction est solution classique là où elle est  $\mathcal{C}^1$  (puisqu'elle est constante). C'est une solution faible du problème à condition que la ligne de choc  $\Sigma := \{x = \sigma(t), u^- = u_g, u^+ = u_d\}$  vérifie la relation de Rankine Hugoniot, soit ici

$$\sigma'(t) = \frac{f(u_g) - f(u_d)}{u_g - u_d}.$$

Pour que cette fonction vérifie bien  $u(x, 0) = u^0(x)$ , il faut en plus que  $\sigma(0) = A$ . On a ainsi

$$\sigma(t) = \frac{f(u_g) - f(u_d)}{u_g - u_d} t + A$$

La solution obtenue est l'unique solution entropique puisque le long de la ligne de discontinuité, on a  $u_g > u_d$  (on rappelle que  $f$  est convexe.)

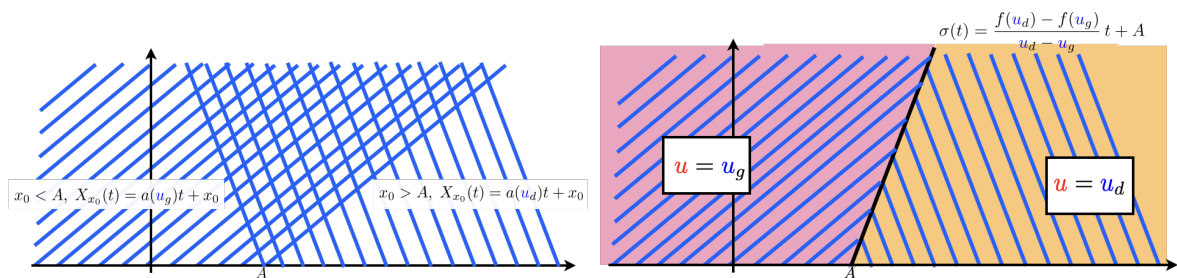


FIGURE 2.13 – Cas  $u_g > u_d$  : les caractéristiques se croisent pour  $t > 0$  (à gauche), la solution faible entropique est un choc (à droite).

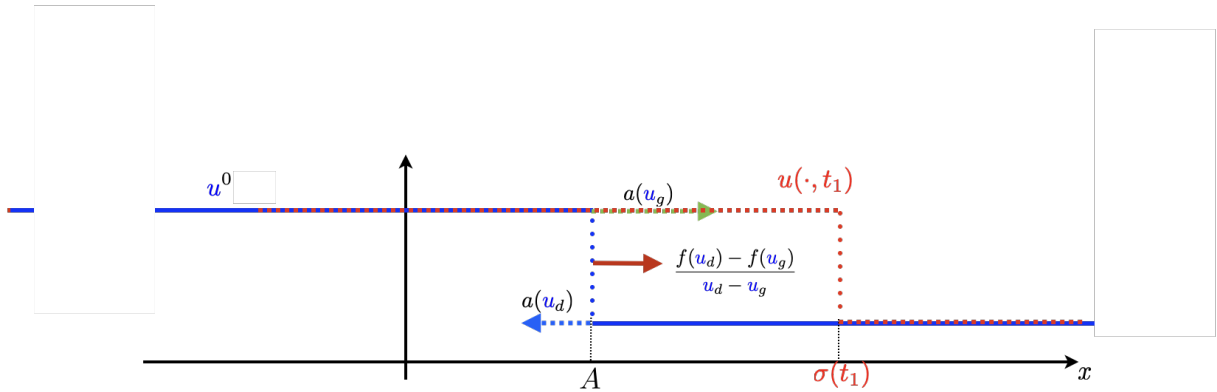


FIGURE 2.14 – Cas  $u_g > u_d$  : représentation de la solution : un choc se propage à la vitesse qui est donnée par la relation de Rankine Hugoniot.

#### 2.4.4 Cas où $u_g < u_d$ : la solution est une onde de détente

On commence par tracer les caractéristiques : il y a deux zones à considérer dans lesquelles les caractéristiques sont parallèles

$$\forall t > 0, \quad X_{x_0}(t) = \begin{cases} a(u_g)t + x_0 & \text{si } x < A \\ a(u_d)t + x_0 & \text{si } x > A \end{cases} \quad (2.54)$$

Comme  $u_g < u_d$ , et  $f$  est convexe (donc  $a$  est croissante), on a  $a(u_g) < a(u_d)$  : il y a une zone dans le demi plan  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  qui n'est pas remplie par les caractéristiques. On va introduire des caractéristiques fictives d'équation  $X_{x_0}(t) = ct + A$  avec  $c$  qui varie  $[a(u_g), a(u_d)]$ . Sur chacune de ces caractéristiques, la solution est constante : elle ne dépend que de  $c = (x - A)/t$ . D'après la Proposition 2.39, la solution dans cette zone s'écrit

$$u(x, t) = a^{-1}\left(\frac{x - A}{t}\right), \quad a(u_g) \leq \frac{x - A}{t} \leq a(u_d).$$

Nous proposons donc la fonction

$$\forall t > 0, \quad u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < a(u_g)t + A \\ a^{-1}\left(\frac{x - A}{t}\right) & \text{si } a(u_g)t + A < x < a(u_d)t + A, \\ u_d & \text{si } x > a(u_d)t + A. \end{cases} \quad (2.55)$$

C'est une solution faible car elle est solution classique dans les domaines où elle est  $\mathcal{C}^1$  et elle est continue. Elle vérifie également la condition initiale. C'est la solution faible entropique car elle est continue.

On dit qu'il s'agit d'une onde de détente.



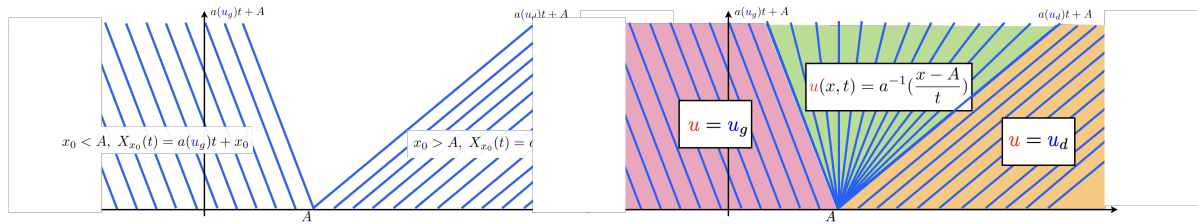


FIGURE 2.15 – Cas  $u_g < u_d$  : il existe une zone non recouverte par les caractéristiques (à gauche), on introduit des caractéristiques "fictives" sur lesquelles la solution reste constante. (à droite).

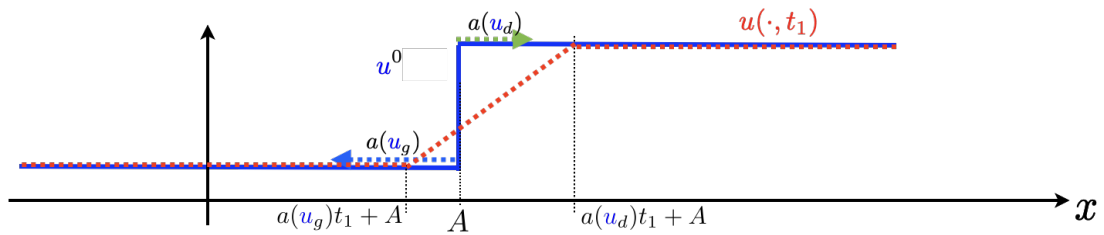


FIGURE 2.16 – Cas  $u_g < u_d$  : représentation de la solution : une onde de détente apparaît.

#### Remarque 2.40

On aurait pu introduire un choc plutôt qu'une onde de détente :

$$\forall t > 0, \quad u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < \sigma(t) \\ u_d & \text{si } x > \sigma(t). \end{cases} \quad (2.56)$$

avec la ligne de choc qui vérifie la relation de Rankine Hugoniot

$$\sigma(t) = \frac{f(u_g) - f(u_d)}{u_g - u_d} t + A,$$

pour que cette fonction soit une solution faible. Mais ce n'est pas la solution entropique car elle ne vérifie pas le théorème 2.27 puisque  $u_g < u_d$  alors que  $f$  est convexe.

### 2.4.5 Solution du problème de Riemann à 2 états

En résumé, la solution entropique du problème de Riemann (2.50) peut être notée :

$$w_R \left( \frac{x - A}{t}; u_g, u_d \right)$$

- Si  $u < v$  :

$$w_R(\xi; u, v) = \begin{cases} u & \text{si } \xi \leq a(u) \\ a^{-1}(\xi) & \text{si } a(u) \leq \xi \leq a(v) \\ v & \text{si } \xi \geq a(v) \end{cases}$$

- Si  $u > v$  :

$$w_R(\xi; u, v) = \begin{cases} u & \text{si } \xi < s, \\ v & \text{si } \xi > s, \end{cases} \quad \text{où } s = \frac{f(u) - f(v)}{u - v}.$$

Cette notation est réutilisée dans la section 4.3.4.

### 2.4.6 Problème de Riemann à 3 états pour l'équation de Burgers

Nous proposons maintenant de résoudre explicitement quelques problèmes de Riemann à 3 états. Nous nous restreignons pour simplifier au cas de l'équation de Burgers :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x). \end{cases} \quad (2.57)$$

avec comme condition initiale

$$u^0(x) = \begin{cases} u_1, & \text{si } x \leq 0, \\ u_2, & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ u_3, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Nous allons adopter un processus qu'on adoptera de façon assez systématique pour la construction de la solution entropique  $C^1$  par morceaux d'une loi de conservation scalaire :

1. Étape inductive : on propose une solution en s'inspirant de la méthode des caractéristiques.
2. Étape déductive : on démontre que la solution proposée est bien solution entropique du problème. D'après le cours, comme il y a unicité, la solution construite est LA solution faible entropique recherchée.

#### 2.4.6.1 Cas d'une condition initiale croissante $u_1 < u_2 < u_3$

On commence par naïvement tracer dans le plan  $(x, t)$  les caractéristiques associées à la donnée initiale  $u_0$  qui passent par  $(x_0, 0)$ , lorsque  $x$  varie dans  $\mathbb{R}$ . On obtient trois faisceaux de droites parallèles respectivement pour  $x_0 \in ]-\infty, 0]$ ,  $x_0 \in ]0, 1]$  et  $x_0 \in ]1, +\infty[$ . Ces droites décrivent la trajectoire d'un point mobile se déplaçant aux vitesses respectives  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  : elles ont pour équations  $X_{x_0}(t) = x_0 + u_j t, j = 1, 2, 3$ <sup>1</sup>. Elles décrivent trois domaines  $D_1, D_2$  et  $D_3$  du

1. Attention, ce résultat n'est vrai que parce qu'on considère l'équation de Burgers. Pour l'équation générale  $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ , on aurait toujours trois faisceaux de droites mais d'équations  $x = x_0 + a(u_j) t$ . Ici, pour Burgers,  $f(u) = u^2/2$ , donc  $a(u) = u$ .

demi-espace  $\{(x, t), x \in \mathbb{R}, t > 0\}$  définies par

$$\begin{cases} D_1 := \{(x, t), x \leq u_1 t, & t > 0\}, \\ D_2 := \{(x, t), u_2 t < x \leq u_2 t + 1 & t > 0\}, \\ D_3 := \{(x, t), u_3 t + 1 < x < +\infty, & t > 0\}. \end{cases}$$

Notons que deux caractéristiques correspondent à  $x_0 = 0$  et  $x_0 = 1$ . Il n'y a aucune intersection car  $u_1 \leq u_2 \leq u_3$ . La méthode des caractéristiques suggère alors immédiatement la valeur de la solution cherchée dans chacun des trois domaines définis plus haut, à savoir

$$u(x, t) = u_1 \text{ si } (x, t) \in D_1, \quad u(x, t) = u_2 \text{ si } (x, t) \in D_2, \quad u(x, t) = u_3 \text{ si } (x, t) \in D_3. \quad (2.58)$$

Il reste alors à compléter la solution dans les zones suivantes (si non vides)

$$D_{12} := \{(x, t), u_1 t < x < u_2 t, t > 0\}, \quad D_{23} := \{(x, t), u_2 t + 1 < x < u_3 t + 1, t > 0\}.$$

Cela se fait comme dans la section 2.4.4 en introduisant une onde de détente<sup>2</sup>  $(x - A)/t$  dans chacun de ces domaines, autrement dit (voir l'illustration Fig. 2.17, dessin de gauche)

$$u(x, t) = \frac{x}{t} \text{ si } (x, t) \in D_{12}, \quad \text{et} \quad u(x, t) = \frac{x-1}{t} \text{ si } (x, t) \in D_{23}. \quad (2.59)$$

Il est immédiat de vérifier que la fonction  $u(x, t)$  définie par (2.58-2.59) est continue dans le demi-espace  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . C'est par ailleurs une solution classique là où elle est de classe  $C^1$ , c'est à dire à l'intérieur de chacun des domaines  $D_j, 1 \leq j \leq 3, D_{12}$  et  $D_{23}$ . D'après les résultats du cours, nous pouvons donc affirmer qu'il s'agit de la solution faible entropique du problème.

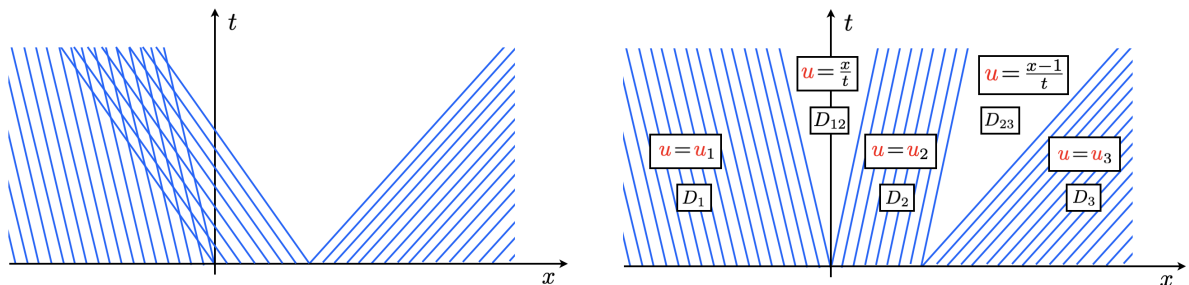


FIGURE 2.17 – A gauche :  $u_2 < u_1 < u_3$ . A droite :  $u_1 < u_2 < u_3$ .

#### 2.4.6.2 Cas d'une condition initiale décroissante $u_1 > u_2 > u_3$

Pour les applications numériques de cette section, nous avons utilisé  $u_1 = 2, u_2 = 1, u_3 = 0$ .

2. Attention, ce résultat n'est vrai que parce qu'on considère l'équation de Burgers. Pour l'équation générale  $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ , l'équation de l'onde de détente est  $a^{-1}((x - A)/t)$ . Ici, pour Burgers,  $f(u) = u^2/2$ , donc  $a(u) = u$  et  $a^{-1}(u) = u$ !

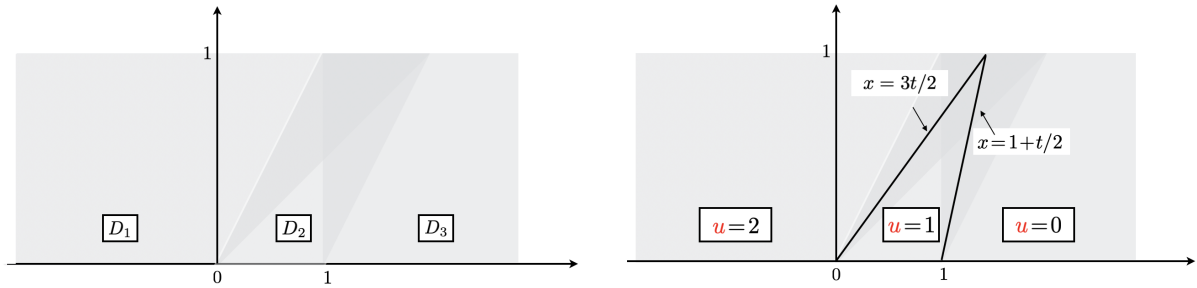
Cette fois, les trois zones  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$  s'intersectent comme il est visible sur la figure 2.18, dessin de gauche. Pour gérer les conflits, c'est à dire, pour  $t$  assez petit, les intersections  $D_1 \cap D_2$  et  $D_2 \cap D_3$ , on va introduire deux lignes de chocs,  $\Sigma_1$  dans  $D_1 \cap D_2$ ,  $\Sigma_2$  dans  $D_2 \cap D_3$ , prenant respectivement naissance aux points  $(0, 0)$  et  $(1, 0)$ . D'après la relation de Rankine Hugoniot, ces chocs ont donc pour équations respectives

$$\sigma_1(t) := \frac{u_1 + u_2}{2} t \quad \text{et} \quad \sigma_2(t) := 1 + \frac{u_3 + u_2}{2} t, \quad t > 0,$$

Ces deux chocs se rencontrent en un temps  $t^*$  donné par

$$\sigma_1(t^*) = \sigma_2(t^*) \quad \text{soit} \quad t^* = \frac{2}{u_1 - u_3} \quad \text{et} \quad x^* := \sigma_1(t^*) = \frac{u_1 + u_2}{u_1 - u_3}.$$

Pour poursuivre au delà du temps  $t^*$ , on remarque que  $x \mapsto u(x, t^*)$  ne prend plus que deux



**FIGURE 2.18** – Pour  $u_1 = 2$ ,  $u_2 = 1$ ,  $u_3 = 0$ , : les domaines  $D_j$  (à gauche), avec les lignes de chocs pour  $t < t^* = 2$ .

valeurs à savoir  $u_1$  pour  $x < x^*$  et  $u_3$  pour  $x > x^*$ . Autrement dit, en prenant  $t = t^*$  comme nouveau temps initial, tout se passe comme si on devait résoudre un nouveau problème de Riemann. On introduit alors un troisième choc droit prenant naissance en  $(x^*, t^*)$  avec une vitesse donnée par la relation de Rankine Hugoniot. L'équation de ce troisième choc est donc

$$\sigma_3(t) := x^* + (t - t^*) \frac{u_1 + u_3}{2}$$

La solution proposée va s'écrire

$$\text{si } t < t^*, \quad u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x < \sigma_1(t) \\ u_2 & \text{si } \sigma_1(t) < x < \sigma_2(t) \\ u_3 & \text{si } x > \sigma_2(t) \end{cases} \quad (2.60)$$

$$\text{si } t > t^*, \quad u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x < \sigma_3(t) \\ u_3 & \text{si } x > \sigma_3(t) \end{cases}$$

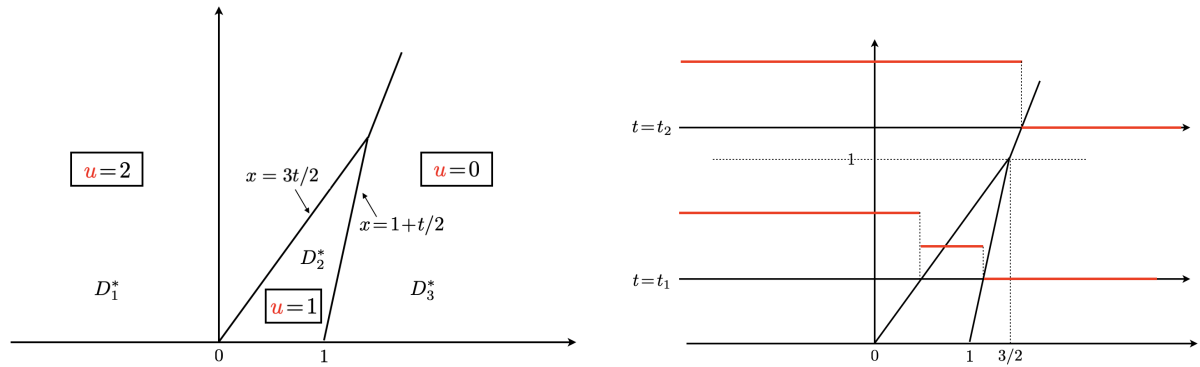
Dit autrement, nous introduisons

$$\begin{cases} D_1^* = \{(x, t), x < \sigma_1(t) \text{ si } t \leq t^*, x < \sigma_3(t) \text{ si } t > t^*\}, \\ D_2^* = \{(x, t), \sigma_1(t) < x < \sigma_2(t) \text{ et } t \leq t^*\}, \\ D_3^* = \{(x, t), x > \sigma_2(t) \text{ si } t \leq t^*, x > \sigma_3(t) \text{ si } t > t^*\}. \end{cases}$$

auquel cas la solution est

$$u(x, t) = u_1 \text{ dans } D_1^*, \quad u(x, t) = u_2 \text{ dans } D_2^*, \quad u(x, t) = u_3 \text{ dans } D_3^*. \quad (2.61)$$

Cette solution est illustrée par la figure 2.19.



**FIGURE 2.19** – Pour  $u_1 = 2$ ,  $u_2 = 1$ ,  $u_3 = 0$ , : La solution. A gauche dans le plan  $(x, t)$ . A droite : graphes à  $t$  fixé.

Il faut vérifier a posteriori qu'on a construit LA solution faible entropique. C'est bien une solution faible car c'est une solution classique partout où elle est de classe  $C^1$  et la relation de Rankine-Hugoniot est satisfaite à travers chaque ligne de choc. C'est bien la solution entropique car tous les chocs sont "descendants" (et qu'on a affaire à une loi de conservation convexe).

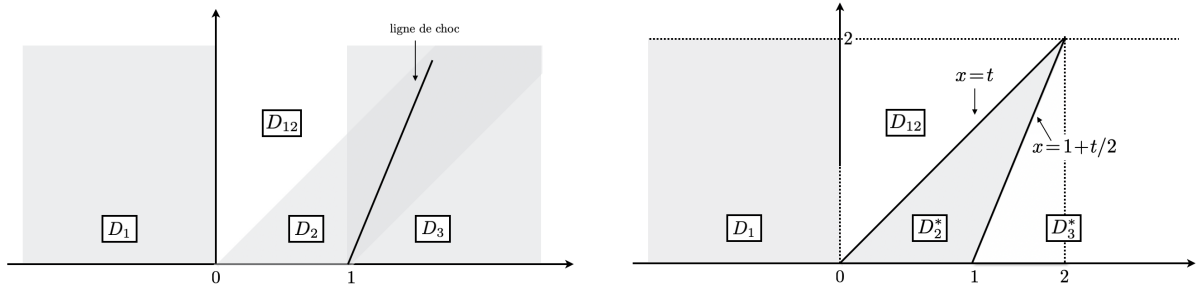
### 2.4.6.3 Cas d'une condition initiale non monotone.

On suppose ici  $u_1 < u_2$  et  $u_2 > u_3$ . Le dernier cas  $u_1 > u_2$  et  $u_2 < u_3$  est laissé en exercice au lecteur. Pour les applications numériques, nous utiliserons les valeurs  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 1$  et  $u_3 = 0$ . La construction de la solution faible est alors sensiblement plus complexe et va se faire par fenêtres de temps successives. Commençons à décrire ce qui va se passer pour  $t > 0$  suffisamment petit. Nous allons adopter la démarche intuitive suggérée plus haut en proposant une construction pas à pas de la solution.

Les observations qui suivent sont supportées par le dessin de gauche de la figure 2.20. Comme  $u_2 > u_3$ , les domaines  $D_2 := \{(x, t), u_2 t < x < u_2 t + 1\}$  et  $D_3 := \{(x, t), x > u_3 t + 1\}$  s'intersectent. Du coup, dans le domaine  $D_1 := \{(x, t), x < u_1 t\}$ , la méthode des caractéristiques suggère sans ambiguïté que la solution soit constante égale à  $u_1$  et si pour  $t$  assez petit, elle suggère qu'elle va prendre la valeur  $u_2$  dans le sous-domaine de  $D_2$  qui n'intersecte pas  $D_3$  et qu'elle va prendre la valeur  $u_3$  dans le sous-domaine de  $D_3$  qui n'intersecte pas  $D_2$ , elle ne permet pas de départager entre la valeur  $u_2$  et la valeur  $u_3$  dans l'intersection  $D_2 \cap D_3$ , laquelle prend naissance dès  $t > 0$ . Par ailleurs, la région  $D_{12}$  qui apparait en blanc dans la figure 2.21, ne

contient aucune caractéristique.

Mais examinons tout d'abord la problématique soulevée par l'intersection  $D_2 \cap D_3$ . Comme les



**FIGURE 2.20 – Pour  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 1$  et  $u_3 = 0$ . Gauche : domaines  $D_j$  et ligne de choc . Droite : domaines  $D_j^*$ .**

caractéristiques se croisent, nous introduisons une ligne de choc, d'équation  $x = \sigma_1(t)$  qui va passer par le point de naissance de l'intersection  $D_2 \cap D_3$ , c'est à dire  $(x = 1, t = 0)$  (autrement dit on va imposer  $\sigma_1(0) = 1$ ) et qui va partager  $D_2 \cap D_3$  en deux parties, l'une à gauche de cette ligne, à l'intérieur de laquelle on va attribuer à la solution la valeur  $u_2$  - ne serait-ce que pour assurer la continuité avec le domaine  $D_2 \setminus (D_2 \cap D_3)$  - l'autre à droite de cette ligne dans laquelle on proposera, par un raisonnement symétrique, la valeur  $u_3$ . En résumé, au moins pour  $t$  assez petit, nous proposerons

$$u(x, t) = u_2 \text{ si } (x, t) \in D_2 \cap D_3 \text{ et } x < \sigma_1(t), \quad u(x, t) = u_3 \text{ si } (x, t) \in D_2 \cap D_3 \text{ et } x > \sigma_1(t).$$

On crée ainsi un choc puisque la solution va passer brutalement de  $u_2$  à  $u_3$  à travers  $x = \sigma_1(t)$ . Maintenant, pour déterminer la forme  $x = \sigma_1(t)$ , on utilise la relation de Rankine-Hugoniot qui va assurer qu'on a bien alors construit (au moins localement) une solution faible :

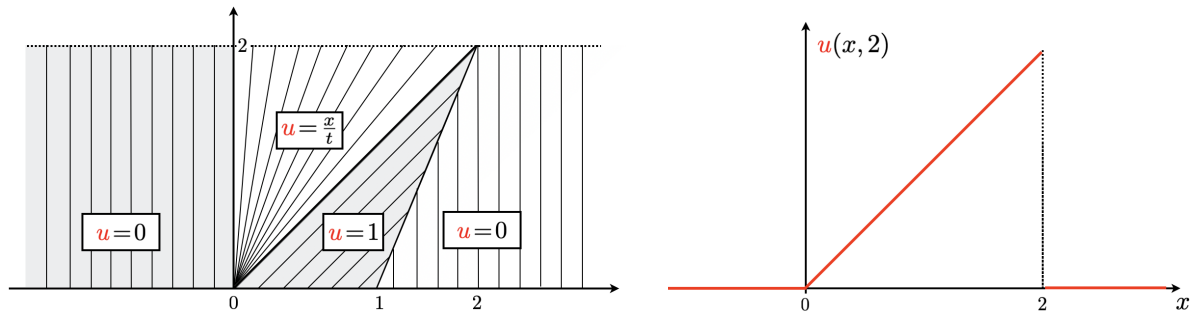
$$\sigma_1(t) = \frac{u_2 + u_3}{2} t + 1,$$

Tout va se passer comme si on avait remplacé, pour  $t$  assez petit les domaines intersectants  $D_2$  et  $D_3$  par les domaines  $D_2^*$  et  $D_3^*$  définis par (voir la figure 2.20, dessin de droite)

$$\begin{cases} D_2^* = \{(x, t) \in D_2, x < \sigma_1(t)\} \equiv \{(x, t), u_2 t \leq x < \sigma_1(t)\}, \\ D_3^* = \{(x, t) \in D_3, x > \sigma_1(t)\} \equiv \{(x, t), x > \sigma_1(t)\}, \end{cases}$$

qui sont tels que chaque point de  $D_j^*$  appartient à une caractéristique et une seule issue d'un point  $(x_0, 0) \in D_j$ .

Finalement, dans la région  $D_{12} := \{(x, t), u_1 t < x < u_2 t\}$  on va introduire une onde de détente  $u(x, t) = x/t$  et donc finalement proposer :  $u(x, t) = u_1$  dans  $D_1$ ,  $u(x, t) = x/t$  dans  $D_{12}$ ,  $u(x, t) = u_2$  dans  $D_2^*$ ,  $u(x, t) = 0$  dans  $D_3^*$ .



**FIGURE 2.21** – Pour  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 1$  et  $u_3 = 0$ . La solution pour  $t \leq t^* = 2$  (gauche). Graphe à  $t = 2$  (droite)

Jusqu'à quel instant cette description va-t-elle rester valable ? La figure 2.21 donne la réponse. Le domaine  $D_2^*$  est borné en temps : il disparaît au moment  $t^*$  où la ligne  $x = u_2 t$  (caractéristique issue de  $x_0 = 0$ ), qui borne  $D_2^*$  sur sa gauche, rencontre la ligne de choc  $x = \sigma_1(t)$  qui le borne sur sa droite :

$$u_2 t^* = \sigma_1(t^*) \quad \text{soit} \quad t^* = \frac{2}{u_2 - u_3}.$$

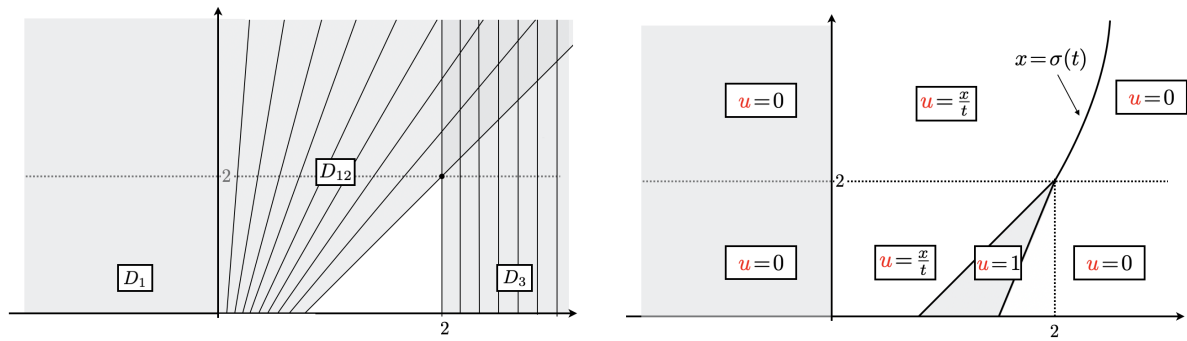
Le point de rencontre est  $x = u_2 t^*$ ,  $t = t^*$ . Nous allons donc être en mesure de décrire la solution jusqu'à l'instant  $t^*$  (voir aussi la figure 2.21, dessin de gauche) :

$$\begin{cases} - \text{Pour } (x, t) \in D_1 \text{ et } t \leq t^*, & u(x, t) = u_1, \\ - \text{Pour } (x, t) \in D_{12} \text{ et } t \leq t^*, & u(x, t) = x/t, \\ - \text{Pour } (x, t) \in D_2^* \text{ et } t \leq t^*, & u(x, t) = u_2, \\ - \text{Pour } (x, t) \in D_3^* \text{ et } t \leq t^*, & u(x, t) = u_3. \end{cases} \quad (2.62)$$

À partir de l'instant  $t = t^*$ , instant auquel la solution est donnée par le graphe de la figure 2.21 (droite) (cette fonction peut du reste être vue comme une nouvelle condition initiale à l'instant  $t = t^*$ ), on est confronté à une situation similaire à celle rencontrée à l'instant  $t = 0$ . Dans le demi espace  $t > t^*$ , les domaines  $D_{12}$  et  $D_3$  s'intersectent. Si on va naturellement proposer  $u(x, t) = x/t$  dans  $D_{12} \setminus D_{12} \cap D_3$  et  $u(x, t) = u_3$  dans  $D_3 \setminus D_{12} \cap D_3$ , il faut arbitrer entre  $x/t$  et  $u_3$  dans  $D_{12} \cap D_3$ . Cela va se faire en introduisant une nouvelle ligne de choc  $x = \sigma_2(t)$ ,  $t \geq 2$  qui va partir du point  $(x^*, t^*)$ . Pour  $t \geq t^*$ , on va donc proposer (voir aussi la figure 2.22)

$$\begin{cases} - \text{Pour } (x, t) \in D_1 \text{ et } t \geq t^*, & u(x, t) = u_1, \\ - \text{Pour } 0 < x < \sigma_2(t) \text{ et } t \geq t^*, & u(x, t) = x/t, \\ - \text{Pour } x > \sigma_2(t) \text{ et } t \geq t^*, & u(x, t) = u_3. \end{cases} \quad (2.63)$$

Pour déterminer la forme du choc, nous allons à nouveau nous appuyer sur la relation de Rankine-Hugoniot pour assurer qu'on construit bien une solution faible. La différence avec le premier choc est que, la solution n'étant plus constante de part et d'autre du choc (il s'agit de raccorder  $x/t$



**FIGURE 2.22** – Pour  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 1$  et  $u_3 = 0$ . Les domaines pour  $t \geq 0$  (à gauche). La solution (à droite)

à gauche du choc avec 0 à droite du choc), le choc ne va plus être droit. On a donc

$$\sigma_2'(t) = \frac{u^+(t) + u^-(t)}{2},$$

où

$$u_-(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u(\sigma_2(t) - \varepsilon, t) = \sigma_2(t)/t, \quad u_+(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u(\sigma_2(t) + \varepsilon, t) = 0,$$

On doit donc résoudre l'équation différentielle

$$\sigma_2'(t) = \frac{\sigma_2(t) + u_3}{2t}, \quad \sigma_2(t^*) = x^*.$$

La solution générale de cette équation s'écrit

$$\sigma_2(t) = \alpha\sqrt{t} + u_3 t$$

Comme de plus on sait que

$$\sigma_2(t^*) = x^* \quad \text{avec} \quad t^* = \frac{2}{u_2 - u_3} \quad \text{et} \quad x^* = \frac{2u_2}{u_2 - u_3}$$

on trouve

$$\alpha = \sqrt{2(u_2 - u_3)}.$$

Construisons  $u(x, t)$  par recollement de (2.62) et (2.63) : si nous introduisons les domaines (voir aussi figure 2.22, dessin de gauche),

$$\begin{cases} D_{12}^* = \{(x, t), 0 < x < \sigma_1(t) \text{ si } t \leq t^*, 0 < x < \sigma_2(t) \text{ si } t \geq t^*\}, \\ D_3^* = \{(x, t) \in D_3, x \geq \sigma_1(t) \text{ si } t \leq t^*, x \geq \sigma_2(t) \text{ si } t \geq t^*\}, \end{cases}$$

la solution est finalement définie par

$$u(x, t) = u_1 \text{ dans } D_1, \quad u(x, t) = u_2 \text{ dans } D_2^*, \quad u(x, t) = x/t \text{ dans } D_{12}^*, \quad u(x, t) = u_3 \text{ dans } D_3^*.$$

Les graphes correspondants sont donnés par la figure 2.23.



Par la suite, de deux choses l'une. Soit  $u_1 < u_3$  et les formules ci-dessus restent valables pour tout temps  $t > t^*$ . Soit  $u_1 > u_3$  et ces formules restent valables tant que

$$u_1 t < \sigma_2(t),$$

c'est-à-dire pour  $t < t^{**}$  où  $t^{**}$  est solution de

$$u_1 t^{**} = \sqrt{2(u_2 - u_3)t^{**}} + u_3 t^{**}.$$

On a donc :

$$t^{**} = \frac{2(u_2 - u_3)}{(u_1 - u_3)^2}.$$

Pour  $t > t^{**}$ , la trajectoire du choc est donnée par :

$$\sigma_3(t) = \frac{1}{2}(u_1 + u_3)t + \frac{u_2 - u_3}{u_1 - u_3}$$

et la solution par :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x < \sigma_3(t), \\ u_3 & \text{si } x > \sigma_3(t). \end{cases}$$

Pour garantir qu'on a construit la solution entropique en s'appuyant sur les résultats du cours, il suffit de noter que

1. On a bien construit une solution faible parce que
  - (i) La fonction  $u$  est bien une solution classique là où elle est  $C^1$ .
  - (ii) Le long des lignes de chocs (qui correspondent géométriquement à  $\partial D_{12}^* \cap \partial D_2^*$  et  $\partial D_{12}^* \cap \partial D_3^*$ ), la relation de Rankine Hugoniot est satisfaite (les chocs ont été construits pour ça).
2. Cette solution faible est bien la solution entropique parce que le long des chocs,  $u^-(t) > u^+(t)$ , autrement dit le choc est descendant. Comme le flux est convexe ( $f(u) = u^2/2$  est convexe), les chocs sont entropiques<sup>3</sup>.

Sur la figure 2.23, dessin de droite, nous représentons le graphe  $x \rightarrow u(x, t)$  de la solution à deux instants  $t = t_1 < t^*$  et  $t = t_2 > t^*$ .

---

3. Rappelons que pour une non linéarité  $f(u)$  générale, (i. e. non convexe), la condition de choc entropique est plus compliquée. Si le choc est descendant, le graphe de  $f$  entre  $u^+(t)$  et  $u^-(t) > u^+(t)$  doit être au dessous de sa corde. Si le choc est montant, le graphe de  $f$  entre  $u^-(t)$  et  $u^+(t) > u^-(t)$  doit être au dessus de sa corde.

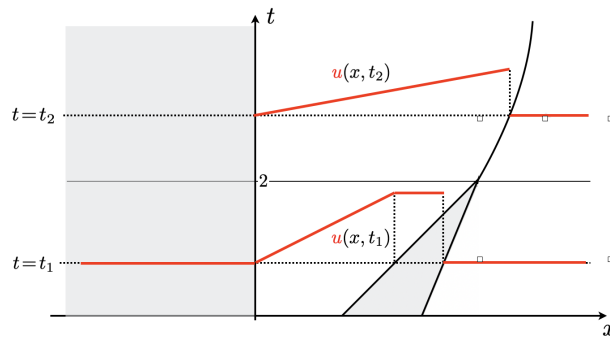


FIGURE 2.23 – Pour  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 1$  et  $u_3 = 0$ . Graphes de la solution à  $t = t_1 < 2$  et  $t = t_2 > 2$ .

## 2.5 Exercices

**Exercice 1 (Solution classique)** On considère l'équation de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

où  $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ , avec la condition initiale suivante :  $u^0(x) = x$ .

**Question.** Calculer la solution classique. On tracera les caractéristiques dans le plan  $(x, t)$  puis la solution en fonction de  $x$  à différents temps.

**Exercice 2 (Naissance de l'onde de choc)** On considère l'équation de Burgers avec la condition initiale suivante :  $u^0(x) = \sin x$ .

**Question 1.** Montrer que les caractéristiques ne se croisent pas avant  $t = 1$ .

**Question 2.** Calculer l'instant  $t_\varepsilon$  auquel se croisent les caractéristiques issues des points  $\pi - \varepsilon$  et  $\pi + \varepsilon$ .

**Question 3.** En déduire qu'il n'existe pas de solution classique après  $t = 1$ .

**Exercice 3 (Construction de l'onde de détente)** On considère l'équation de Burgers avec la condition initiale :

$$u^0(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ x/\alpha, & \text{si } 0 \leq x \leq \alpha, \\ 1, & \text{si } x \geq \alpha, \end{cases}$$

pour  $\alpha > 0$ .

**Question 1.** Construire la solution à l'aide des caractéristiques.

**Question 2.** Est-ce une solution classique ?

**Question 3.** Que se passe-t-il lorsque  $\alpha \rightarrow 0$  ?

**Exercice 4 (Non unicité des solutions faibles)** On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = a. \end{cases} \quad (2.64)$$

où  $a$  est une constante réelle donnée. Le but de l'exercice est de montrer qu'on peut construire d'autres solutions faibles de (2.64) que la solution constante  $u(x, t) = a$ .

Pour ce faire, on va s'intéresser à une classe de solutions constantes par morceaux définies de la manière suivante :

a) On se donne  $N \geq 1$  réels  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$  qui définissent  $N + 1$  zones du demi-plan plan  $\mathcal{P} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$

$$\mathcal{Z}_0 = \{(x, t) \in \mathcal{P} / x < \lambda_1 t\}, \quad \mathcal{Z}_N = \{(x, t) \in \mathcal{P} / \lambda_N t < x\},$$

$$\mathcal{Z}_j = \{(x, t) \in \mathcal{P} / \lambda_j t < x < \lambda_{j+1} t\}, \quad 1 \leq j \leq N - 1, \quad (\text{si } N \geq 2)$$

b) On cherche  $u$  constante dans chacune des zones

$$u(x, t) = u_j, \quad \forall (x, t) \in \mathcal{Z}_j, \quad 0 \leq j \leq N. \quad (2.65)$$

**Question 1.** On suppose que  $u$  donnée par (2.65) est solution faible de (2.64). Calculer  $u_1$  et  $u_N$  et montrer que les nombres  $\lambda_j$  sont entièrement déterminés par les  $u_j$ .

**Question 2.** Montrer que si  $N = 1$  ou  $N = 2$ , la seule solution possible est la solution constante.

**Question 3.** On suppose que  $N = 3$ . Montrer qu'il existe une infinité de solutions non constantes paramétrées par deux réels (par exemple  $\lambda_1$  et  $\lambda_3$ ) dont on précisera le domaine de variation.

**Question 4.** Montrer que pour  $N = 4$ , on ne peut pas trouver de solution non constante de la forme (2.65).

**Exercice 5 (Équation de Burgers avec terme d'ordre 0)** Soit  $\alpha > 0$ . On s'intéresse à l'équation de Burgers avec un terme source linéaire :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = -\alpha u, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x). \end{cases} \quad (2.66)$$

**Question 1.** Résoudre explicitement ce problème par la méthode des caractéristiques lorsque  $u^0$  est croissante.

**Question 2.** Calculer explicitement la solution en prenant comme condition initiale ( $\alpha$  est un réel strictement positif donné),

$$u^0(x) = \begin{cases} u_g, & \text{si } x \leq 0, \\ u_g + \frac{u_d - u_g}{\alpha} x, & \text{si } 0 < x < \alpha, \\ u_d, & \text{si } x \geq \alpha, \end{cases} .$$

avec  $u_d \geq u_g$

**Question 3.** Trouver une solution faible du problème de Riemann à deux états,

$$u^0(x) = \begin{cases} u_g, & \text{si } x \leq 0, \\ u_d, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

avec  $u_d \geq u_g$ .

**Exercice 6 (Problèmes de Riemann pour une nouvelle équation non linéaire)** On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^4}{4} \right) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x). \end{cases} \quad (2.67)$$

**Question 1.** Écrire l'équation de la caractéristique dans le plan  $(x, t)$  qui passe par le point  $x_0$  à  $t = 0$ .

**Question 2.** On choisit comme condition initiale

$$u^0(x) = \begin{cases} u_g, & \text{si } x < \alpha, \\ u_d, & \text{si } x > \alpha. \end{cases}$$

**Question 2 (a).** On se place dans le cas où  $u_g > u_d$ . Construire, à l'aide de la méthode des caractéristiques, la solution faible entropique.

Dans le cas particulier où  $u_g = 0$ ,  $u_d = -2$  et  $\alpha = 0$  donner et tracer les caractéristiques dans le plan  $(x, t)$  et la solution aux temps  $t = 0$  et  $t = 1$ .

**Question 2 (b).** On se place dans le cas où  $u_g < u_d$ . Construire, à l'aide de la méthode des caractéristiques, la solution faible entropique.

Dans le cas particulier où  $u_g = -2$ ,  $u_d = -1$  et  $\alpha = 1$  donner et tracer les caractéristiques dans le plan  $(x, t)$  et la solution aux temps  $t = 0$  et  $t = 1$ .

**Question 3.** On choisit comme condition initiale

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ -2, & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ -1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Calculer à l'aide de la méthode des caractéristiques, la solution faible entropique, donner l'équation des caractéristiques dans le plan  $(x, t)$  et tracer leur allure.

**Exercice 7 (Ligne de choc courbe)** On considère encore le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x). \end{cases} \quad (2.68)$$

mais on choisit cette fois ci comme condition initiale

$$u^0(x) = \begin{cases} -1/2, & \text{si } x \leq -1/2, \\ x, & \text{si } -1/2 < x \leq 1, \\ -1/2, & \text{si } x > 1. \end{cases} \quad (2.69)$$

**Question.** Calculer la solution exacte du problème avec cette condition initiale.

# Approximation par différences finies

## - Application aux problèmes hyperboliques linéaires

### 3.1 Présentation de la méthode de différences finies

#### 3.1.1 Approximation de quelques opérateurs différentiels

La méthode de différences finies permet de calculer une approximation de la solution d'une EDP en des points qui sont distribués sur une grille. L'objectif est alors de construire des approximations des dérivées des fonctions intervenant dans l'EDP à l'aide de valeurs discrètes de celle-ci, par le biais de formules de Taylor.

Nous nous plaçons, sauf mention contraire, dans le cadre d'une discrétisation par différences finies en une dimension d'espace. Ceci implique que nous discrétisons le continuum spatio-temporel par une grille régulière de pas  $\Delta t$  en temps et  $h$  en espace tel que les coordonnées discrètes soient :

$$(x_j, t^n) = (jh, n\Delta t).$$

La solution discrète sera calculée en ces points (voir la figure 3.1). Le principe des différences finies est donc de remplacer les dérivées en ces points par des différences finies en utilisant des formules de Taylor dont on néglige les restes. Pour commencer, reprenons la définition usuelle de

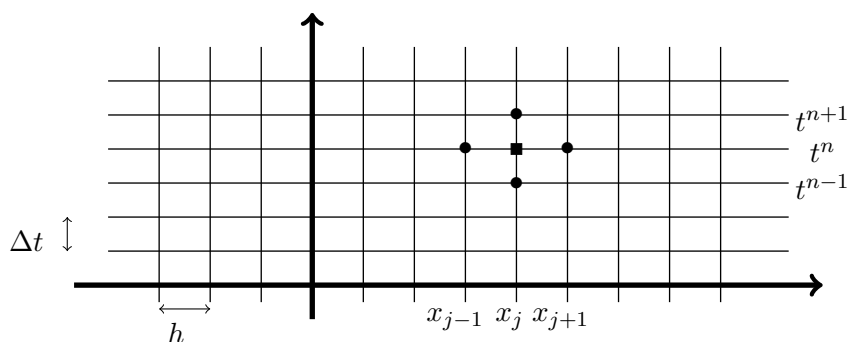


FIGURE 3.1 – Grille espace temps

la dérivée

$$u'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h},$$

afin d'introduire l'approximation décentrée à droite

$$u'(x) \simeq D_h^+ u(x) := \frac{u(x+h) - u(x)}{h}.$$

Evidemment, il est, *a priori*, tout aussi légitime de définir une approximation décentrée à gauche

$$u'(x) \simeq D_h^- u(x) := \frac{u(x) - u(x-h)}{h},$$

ou encore une approximation centrée

$$u'(x) \simeq D_h^0 u(x) := \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}.$$

Nous allons voir que ce choix n'est en fait pas anodin et que certains choix *a priori* raisonnables ne permettent pas une bonne approximation (dans un sens qu'il nous faudra définir) de la solution de l'EDP initiale.

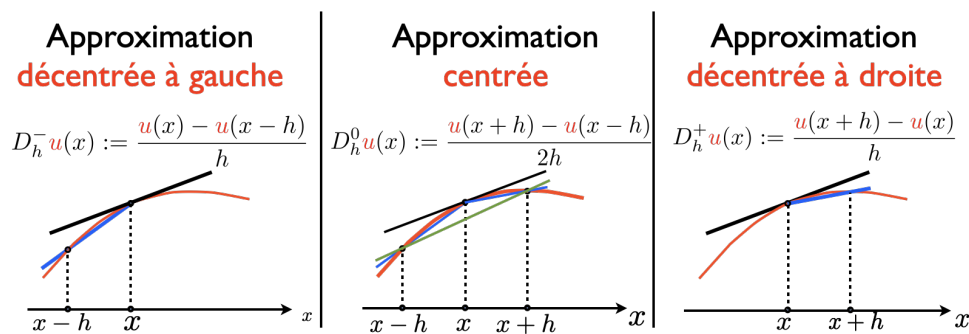


FIGURE 3.2 – Approximation de  $u'(x)$  : il n'y a pas unicité des formules d'approximation.

La première obligation pour notre approximation est la *consistance*. Elle exprime le fait que l'opérateur aux différences finies converge vers l'opérateur différentiel lorsque le pas de maillage tend vers 0. Ainsi, pour un maillage de pas  $h$ , on note  $D_h$  un opérateur d'approximation aux différences finies de  $\frac{d}{dx}$  et on appelle *erreur de troncature* pour cet opérateur la quantité

$$\varepsilon(x, h) := D_h u(x) - u'(x).$$

L'approximation est *consistante* pour la norme  $\|\cdot\|$ , si pour  $u$  suffisamment régulière

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\varepsilon(x, h)\| = 0.$$

On peut même aller plus loin en disant que l'approximation est *d'ordre*  $k \in \mathbb{N}$  si

$$\varepsilon(x, h) = O(h^k).$$

En pratique, l'analyse de consistance s'effectue en considérant les développements de Taylor de la fonction  $u$ . Par exemple pour l'approximation décentrée à droite on sait pour  $u \in C^2(I)$ , qu'il existe  $\theta \in ]0, 1[$  tel que

$$u(x+h) = u(x) + h u'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x + \theta h).$$

On obtient ainsi

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u'(x) = \frac{h}{2} u''(x + \theta h),$$

d'où l'estimation

$$\varepsilon(x, h) \leq \frac{h}{2} \sup |u''|. \quad (3.1)$$

On aurait obtenu le même type d'inégalité pour  $D_h^-$  donc les approximation décentrées à gauche et à droite sont d'ordre 1. En pratique, on voit que l'inégalité (3.1) nous indique même que le choix de  $h$  doit être déterminé par la valeur de la dérivée seconde.

Pour l'approximation centrée, les calculs sont un peu plus longs mais pour un bénéfice sur l'ordre de l'approximation. On considère  $u \in C^3(I)$ . Il existe  $\theta^+ \in ]0, 1[$  tel que

$$u(x+h) = u(x) + h u'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x + \theta h) + \frac{h^3}{6} u^{(3)}(x + \theta^+ h)$$

et  $\theta^- \in ]0, 1[$  tel que

$$u(x-h) = u(x) - h u'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x + \theta h) - \frac{h^3}{6} u^{(3)}(x + \theta^- h)$$

ce qui donne par soustraction

$$\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - u'(x) = \frac{h^2}{3} \left( u^{(3)}(x + \theta^+ h) + u^{(3)}(x + \theta^- h) \right).$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $\theta \in ]-1, 1[$  tel que

$$\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - u'(x) = \frac{h^2}{6} u^{(3)}(x + \theta h),$$

et l'approximation centrée est donc d'ordre 2.

Ces trois approximations sont loin d'être les seules et il existe en fait une infinité de possibilités d'approximation dont on jugera la pertinence notamment en fonction de l'erreur de consistance. Il est en particulier possible de faire intervenir plus de points dans  $D_h$  afin d'obtenir une approximation plus précise. Par exemple si nous combinons les approximations suivantes (obtenus comme précédemment mais en choisissant désormais les formules de Taylor-Young au lieu de celles de Taylor-Lagrange), nous obtenons

$$\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u'(x) + \frac{h^2}{6} u^{(3)}(x) + O(h^4),$$



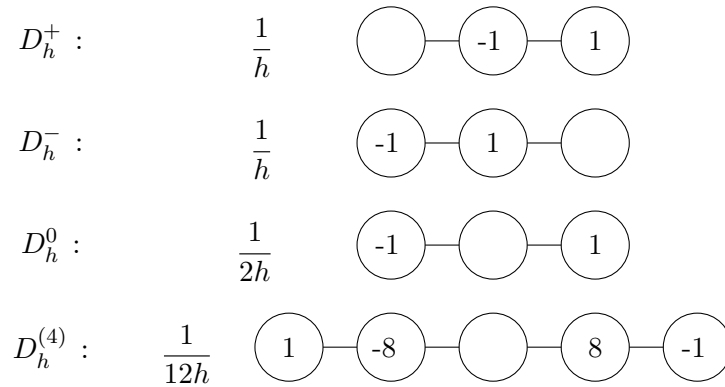
et

$$\frac{u(x+2h) - u(x-2h)}{4h} = u'(x) + 4\frac{h^2}{6}u^{(3)}(x) + O(h^4),$$

ce qui donne pour tout coefficient de pondération  $\alpha \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} D_h^{(4)} u &= \alpha \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + (1-\alpha) \frac{u(x+2h) - u(x-2h)}{4h} \\ &= u'(x) + (\alpha + 4(1-\alpha)) \frac{h^2}{6} u^{(3)}(x) + O(h^4). \end{aligned}$$

Ainsi pour un choix adéquate  $\alpha = \frac{4}{3}$  de pondération entre les deux approximations initiales, on obtient une approximation d'ordre 4. Afin de présenter les différents choix d'opérateurs d'approximation  $D_h$ , on adoptera une représentation symbolique beaucoup plus visuelle comme utilisée Figure 3.3 pour les exemples d'approximation que nous venons de présenter.



**FIGURE 3.3** – Représentation symbolique des opérateurs aux différences finies

De tout évidence la construction d'opérateurs d'approximation ne se limite pas aux dérivées d'ordre 1. On utilise le même principe pour les dérivées d'ordre supérieur. Notamment, on a

$$u''(x) \simeq \frac{u'(x+h/2) - u'(x-h/2)}{h},$$

avec par exemple

$$u'(x+h/2) \simeq \frac{u'(x+h) - u'(x-h)}{h},$$

et

$$u'(x-h/2) \simeq \frac{u'(x+h) - u'(x-h)}{h}.$$

On peut ainsi définir un opérateur  $D_h^2$  d'approximation aux différences finies de la dérivée seconde sous la forme

$$u''(x) \simeq D_h^2 u(x) := \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}.$$

La consistance de cette opérateur se détermine toujours à partir de formule de Taylor (ici Taylor-Lagrange). Il existe  $\theta^+ \in ]0, 1[$  tel que

$$u(x+h) = u(x) + h u'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) + \frac{h^2}{6} u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(x + \theta^+ h),$$

et  $\theta^+ \in ]0, 1[$  tel que

$$u(x-h) = u(x) - h u'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) - \frac{h^2}{6} u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(x + \theta^+ h).$$

On a donc l'existence de  $\theta \in ]-1, 1[$  tel que

$$D_h^2 u(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = u''(x) + \frac{h^2}{12} u^{(4)}(x + \theta h), \quad (3.2)$$

et l'approximation est donc d'ordre 2.

### 3.1.2 La démarche : Etude de la consistance et la stabilité

Pour une équation aux dérivées partielles donnée, l'idée est donc de construire une équation discrète où les opérateurs différentiels sont remplacés par des opérateurs d'approximation. La solution continue n'a *a priori* pas de raison d'être solution de cette équation discrète.

La question qui se pose donc naturellement est de savoir si, pour une équation discrète particulière (on parlera également de schéma) obtenue en utilisant la méthode de différences finies décrite ci-dessus, la solution de l'équation discrète obtenue approche de la solution du problème continu et d'autre part quand il y a convergence, de quantifier la vitesse de convergence.

Cette analyse se fait toujours en deux étapes fondamentales qui seront donc le dénominateur commun de chaque étude de schéma de cet ouvrage :

- **la consistance** qui correspond à l'erreur d'approximation liées lorsqu'on remplace l'EDP par des différences finies. Il est fondamental de comprendre que, bien que très intuitive en tant que condition nécessaire, la consistance d'une méthode ne suffit pas à obtenir la convergence.
- **la stabilité** qui assure que l'opérateur discret est bien inversible et la norme de son inverse est bornée indépendamment du pas de discrétisation.

On montrera alors que dès qu'un schéma est consistant et stable alors il est convergent, c'est à dire que la solution numérique calculée à partir de ce schéma tend, quand les paramètres de discrétisation tendent vers 0, vers la solution de l'équation aux dérivées partielles initiale.

L'objectif de ce chapitre étant de présenter et d'analyser quelques schémas classiques pour les équations hyperboliques linéaires, nous étudierons donc par différentes approches la consistance et la stabilité des schémas avant d'obtenir le résultat final de convergence.

### 3.1.3 Application aux équations hyperboliques linéaires

Avant de passer à la construction de schémas de discrétisation particuliers, indiquons dès à présent une particularité de la résolution des problèmes d'évolution : avec la plupart des méthodes numériques couramment utilisées, la résolution ne s'effectue pas de la même manière en temps et en espace. En effet il existe classiquement deux situations bien distinctes suivant que l'EDP fait intervenir ou non le temps :

- Si on résout par exemple l'équation de Laplace en dimension 2

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^2,$$

on peut montrer que la méthode des différences finies conduit à inverser un système linéaire dans lequel les deux variables  $x$  et  $y$  jouent le même rôle : d'une certaine façon, toutes les valeurs de la solution approchée sont calculées simultanément.

- Avec un problème d'évolution en dimension 1 d'espace, bien que la solution soit à nouveau une fonction de deux variables, le temps et l'espace sont traités différemment. Cela se comprend intuitivement puisque le temps est naturellement orienté et que nous disposons donc de conditions initiales et pas de conditions finales alors que les directions  $x$  et  $-x$  jouent le même rôle. De ce fait, la solution approchée se calculera pas à pas en temps : la solution à l'instant  $t^n$  est déterminée à partir de la solution aux instants précédents. Les conditions initiales sont alors utilisées pour déterminer la solution aux premiers pas de temps. En pratique, pour les problèmes du premier ordre en temps, comme c'est le cas de l'équation d'advection par exemple, on pourra se contenter d'un schéma à un pas de temps ; la solution à l'instant  $t^n$  est calculée à partir de la solution à l'instant précédent  $t^{n-1}$ . A un instant donné  $t^n$  :
  - soit les valeurs  $\{u_j^n, j \in \mathbb{Z}\}$  sont calculées indépendamment les unes des autres : on parle alors de schéma *explicite*,
  - soit les valeurs  $\{u_j^n, j \in \mathbb{Z}\}$  sont calculées en résolvant un système d'équations couplées. On parle alors de schéma *implicite*.

Afin de présenter les différents schémas numériques possibles pour les équations hyperboliques, nous allons considérer les deux exemples principaux que sont :

- l'équation d'advection sur  $\mathbb{R}$  avec une vitesse constante  $c$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times ]0, T[, \\ u(0, x) = u^0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.3)$$

- l'équation des ondes sur  $\mathbb{R}$  avec une vitesse constante  $c$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \text{pour } t \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ u(t=0, x) = u^0(x), & \text{pour } x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t=0, x) = u^1(x), & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Dans toute la suite et sauf mention contraire, nous supposons **la vitesse de propagation  $c$  positive**.

Comme annoncé précédemment, nous approchons la solution  $u$  de ces EDPs par une solution discrète  $u_j^n$ . On cherche alors à calculer pour chaque  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n\Delta t \leq T$ ) un vecteur  $u^n = (u_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$  tel que  $u_j^n$  soit une approximation de la valeur de la solution  $u$  du problème précédent en  $x_j$  à l'instant  $t^n$ .

#### Remarque 3.1

Il peut sembler surprenant de recourir à une résolution numérique approchée pour ces problèmes où, la vitesse étant constante, on connaît analytiquement les solutions exactes. L'intérêt est de calculer dans des cas simples les propriétés des différents schémas qui gardent les mêmes propriétés en dimension supérieure et qui seront ensuite généralisés au cas non linéaire. Un schéma qui ne permet pas de résoudre le cas linéaire sera automatiquement à proscrire dans le cas non linéaire.

Nous commencerons par l'équation d'advection et présenterons le *schéma explicite centré* qui semble le plus naturel. À partir de celui-ci nous introduirons les notions fondamentales pour l'étude des schémas aux différences finies (schéma explicite/implicite, consistance et erreur de troncature et stabilité). Nous verrons alors que ce schéma est inconditionnellement instable et donc qu'*a priori* la solution discrète ne peut converger vers la solution du problème continu. Cet exemple aura pour but de sensibiliser le lecteur sur le fait qu'un schéma consistant n'est pas nécessairement convergent. Nous étudierons ensuite le *schéma de Lax-Friedrichs* pour lequel nous introduirons la notion de convergence. Le *schéma saute-mouton* sera enfin étudié comme approximation de l'équation des ondes.

## 3.2 Le schéma explicite centré pour l'équation d'advection

Nous allons écrire pour tout instant  $t^n$ ,  $n > 0$  et tout point  $x_j$ , une première équation *discrète* qui va remplacer (et approcher) l'équation (3.3) en  $(x_j, t^n)$ . On utilise

— une approximation décentrée à droite (vers le futur), d'ordre 1, pour  $\frac{\partial u}{\partial t}$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) \simeq \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t},$$

— une approximation centrée, d'ordre 2, pour  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , écrite à l'instant  $t^n$  (voir Section 3.1) :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \simeq D_h^0 u(x_j, t^n) = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}.$$

Le schéma numérique au point  $(x_j, t^n)$  s'écrit donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{Z}, \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0. \quad (3.4)$$

Il s'agit d'un schéma à **un pas en temps** (ou deux points) et à **trois points en espace**. Ce schéma est bien **explicite** puisqu'on calcule explicitement la solution à l'instant  $n + 1$  à partir de la solution à l'instant  $n$  sans recourir à l'inversion d'un système linéaire. On a en effet

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\alpha}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n), \quad j \in \mathbb{Z},$$

où

$$\alpha = \frac{c\Delta t}{h}.$$

Evidemment, pour que (3.4) définisse entièrement la solution approchée, il suffit de connaître les  $\{u_j^0, j \in \mathbb{Z}\}$ , ce pour quoi on va utiliser la condition initiale et on choisira typiquement (noter que le choix (i) nécessite que  $u^0$  soit une fonction continue)

$$(i) \quad u_j^0 = u^0(x_j) \quad \text{ou} \quad (ii) \quad u_j^0 = \frac{1}{h} \int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} u^0(x) dx. \quad (3.5)$$

Pour l'analyse, il est commode d'associer à une suite  $(u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  à valeurs réelles, une fonction de la variable  $x$ . Nous choisissons dans la suite l'interpolation linéaire par morceaux ( $\mathbb{P}_1$  désigne ci-après l'espace des polynômes d'une variable de degré inférieur ou égal à 1). Ainsi pour une suite  $(u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  on associe

$$u_h \in V_h = \{ v_h \in C^0(\mathbb{R}), \forall j \in \mathbb{Z}, v_h|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1 \}, \quad (3.6)$$

telle que  $u_h$  est définie par

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad u_h(x_j) = u_j. \quad (3.7)$$

On peut démontrer que, pour tout réel  $p > 1$ ,

$$(u_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \ell^p = \left\{ (u_j)_{j \in \mathbb{Z}}, \sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_j|^p < +\infty \right\} \iff u_h \in L_h^p = V_h \cap L^p(\mathbb{R}).$$

et qu'il existe des constantes  $C_*(p)$  et  $C^*(p)$ , indépendantes de  $h$ , telles que

$$\forall (u_j) \in \ell^p, \quad C_*(p) \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_j|^p h \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|u_h\|_{L^p} \leq C^*(p) \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_j|^p h \right)^{\frac{1}{p}}.$$

De même

$$(u_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \ell^\infty = \{ (u_j), \sup_{j \in \mathbb{Z}} |u_j|^p < +\infty \} \iff u_h \in L_h^\infty = V_h \cap L^\infty(\mathbb{R}).$$

et on a l'identité

$$\|u_h\|_{L^\infty} = \sup_{j \in \mathbb{Z}} |u_j|.$$

Nous allons pouvoir réécrire (3.4) de façon abstraite en introduisant l'opérateur linéaire  $A_h$  tel que

$$\forall v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad A_h v(x) = c \frac{v(x+h) - v(x-h)}{2h}. \quad (3.8)$$

Puisque  $A_h$  commute avec les opérateurs de translation par un multiple de  $h$ , il envoie linéairement  $V_h$  dans lui-même donc

$$A_h \in \mathcal{L}(V_h).$$

Mieux, on démontre facilement que

$$\forall p \in [1, +\infty], \quad A_h \in \mathcal{L}(L^p) \quad \text{et} \quad \|A_h\|_{\mathcal{L}(L^p)} = \frac{\|A_1\|_{\mathcal{L}(L^p)}}{h^2}.$$

On voit alors que, avec des notations évidentes, le schéma (3.4, 3.5-(i)) équivaut à

$$\text{Trouver } u_h^n \in V_h, \quad n \in \mathbb{N} \cdots \quad \text{tels que} \quad \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} + A_h u_h^n = 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.9)$$

et satisfaisant la condition initiale

$$u_h^0 = \Pi_h u^0, \quad (3.10)$$

où  $\Pi_h$  désigne l'opérateur d'interpolation linéaire de  $C^0(\mathbb{R})$  dans  $V_h$ .

Il est bien évident que, compte tenu des propriétés de  $A_h$ ,

$$u_h^0 \in L^p \implies u_h^n \in L^p, \quad n = 1, 2, \dots$$

La solution de (3.9) s'écrit donc

$$u_h^n = (S_h(\Delta t))^n u_h^0 \quad \text{avec} \quad S_h(\Delta t) = I - \Delta t A_h. \quad (3.11)$$

### 3.2.1 Consistance et ordre du schéma

Rappelons que l'étude de la consistance d'un schéma vise à justifier (et quantifier) la façon dont les équations discrètes approchent les équations continues. Elle ne dit rien sur la façon dont la solution discrète approche la solution continue. Pour cela il faut aussi avoir la stabilité du schéma, concept qui sera abordé dans la prochaine section. Il est néanmoins bien évidemment nécessaire de vérifier la consistance d'un schéma pour espérer sa convergence.

Pour ce faire, il faut définir l'erreur de troncature du schéma numérique. Le principe consiste à

partir de la solution exacte  $u(x, t)$  de l'équation d'advection (3.3), supposée régulière, d'introduire la suite des valeurs discrètes

$$U_j^n = u(x_j, t^n). \quad (3.12)$$

Si on remplace  $u_j^n$  par  $U_j^n$  dans le membre de gauche de (3.4), on n'a *a priori* aucune raison de trouver 0 comme résultat (sinon le schéma serait « exact »), mais on est en droit d'exiger que cela soit « petit ». Ce raisonnement justifie la définition de l'erreur de troncature.

#### Définition 3.2: Erreur de troncature

On appelle erreur de troncature du schéma (3.4) la suite

$$\varepsilon_j^n = \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + c \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h},$$

où  $U_j^n$  est définie par (3.12),  $u$  étant une solution régulière de (3.3).

On dira que le schéma est consistant si, pour tout segment borné  $I$  et tout temps  $T > 0$

$$\lim_{(h, \Delta t) \rightarrow 0} \varepsilon_j^n = 0.$$

étant donnés deux entiers strictement positifs  $k$  et  $p$ , on dit que le schéma est d'ordre  $p$  en temps et  $k$  en espace (ce qui entraîne a fortiori la consistance) si

$$\varepsilon_j^n = \mathcal{O}(\Delta t^p + h^k).$$

#### Théoreme 3.3: Consistance du schéma explicite centré

Le schéma explicite centré donné dans (3.4) est d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.

**DÉMONSTRATION:** C'est une application des développements de Taylor. Il existe  $\theta_t \in ]0, 1[$  tel que :

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \Delta t \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^n + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t + \theta_t \Delta t),$$

où nous avons adopté la notation

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^n = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n), \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^n = \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n), \quad \dots \quad (3.13)$$

Par conséquent

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t + \theta_t \Delta t). \quad (3.14)$$

De même, en développant par rapport à la variable  $x$  et avec la notation (3.13), il existe  $\theta^+ \in ]0, 1[$  et  $\theta^- \in ]0, 1[$  tels que

$$\begin{cases} U_{j+1}^n = U_j^n + h \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^n + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^n + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j + \theta^+ h, t^n), \\ U_{j-1}^n = U_j^n - h \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^n + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^n - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j - \theta^- h, t^n). \end{cases}$$

Après soustraction nous obtenons

$$\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n + \frac{h^2}{12} \left[ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j + \theta^+ h, t^n) + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j - \theta^- h, t^n) \right].$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc  $\theta \in ]-1, 1[$  tel que

$$\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j + \theta h, t^n) \quad (3.15)$$

De (3.14) et (3.15), nous déduisons, par définition de la solution  $u$ , que

$$\begin{cases} \varepsilon_j^n &= \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n + c \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t + \theta_t \Delta t) + c \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j + \theta h, t^n) \\ &= \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t + \theta_t \Delta t) + c \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j + \theta h, t^n). \end{cases} \quad (3.16)$$

Ainsi nous obtenons

$$\varepsilon_j^n = \mathcal{O}(\Delta t + h^2).$$

■

Pour l'analyse de convergence, il sera utile d'introduire une version « continue en espace » de l'erreur de troncature, à savoir, en reprenant les notations de la section précédente,

$$\varepsilon_h^n = \frac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\Delta t} + A_h U_h^n.$$

où  $U_h^n = \Pi_h u(\cdot, t^n)$ . Reprenant l'expression (3.16), on déduit une estimation  $L^\infty$  de  $\varepsilon_h^n$  (avec une constante numérique  $C$  convenable)

$$\|\varepsilon_h^n\|_{L^\infty} \leq C \left( \Delta t \sup_{t \in [t^n, t^{n+1}]} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, t) \right\|_{L^\infty} + h^2 \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\cdot, t^n) \right\|_{L^\infty} \right). \quad (3.17)$$

Nous pouvons également obtenir une estimation équivalente de  $\varepsilon_h^n$  pour la norme  $L^2$ , c'est à dire qu'il existe une constante  $C$  telle que

$$\|\varepsilon_h^n\|_{L^2} \leq C \left( \Delta t \sup_{t \in [t^n, t^{n+1}]} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, t) \right\|_{L^2} + h^2 \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\cdot, t^n) \right\|_{L^2} \right). \quad (3.18)$$

Le lecteur se convaincra aisément que les estimations (3.17) et (3.18) se généralisent à toute norme  $L^p$  (la constante  $C$  ci-dessous dépendant de  $p$ )

$$\|\varepsilon_h^n\|_{L^p} \leq C \left( \Delta t \sup_{t \in [t^n, t^{n+1}]} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, t) \right\|_{L^p} + h^2 \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\cdot, t^n) \right\|_{L^p} \right).$$

### 3.2.2 Propagation numérique et condition nécessaire de convergence

La formule (3.4) (ou (3.11)) démontre que le support de la solution numérique se propage à vitesse finie au sens où :

$$\text{supp } u_h^0 \subset [a, b] \implies \text{supp } u_h^n \subset [a - nh, b + nh].$$



En d'autres termes, en l'espace de 1 pas de temps  $\Delta t$ , l'information s'est propagée d'une distance de  $h$ . On peut même dire que la propagation du support de la solution numérique est donc donnée par

$$V_{num}(\Delta t, h) = \frac{h}{\Delta t}.$$

Si le support de la solution numérique se propage moins vite que le support de la solution exacte, la solution numérique n'aura aucune chance de s'approcher de la solution exacte puisqu'il va exister une partie du support de la solution exacte sur laquelle elle sera toujours nulle (voir figure 3.4-(a)).

Une condition nécessaire de convergence du schéma est donc que la vitesse numérique doit être supérieure à la vitesse de propagation de la solution exacte (voir figure 3.4-(b)) :

$$\frac{h}{\Delta t} \geq c \Leftrightarrow \alpha = \frac{c\Delta t}{h} \leq 1. \quad (3.19)$$

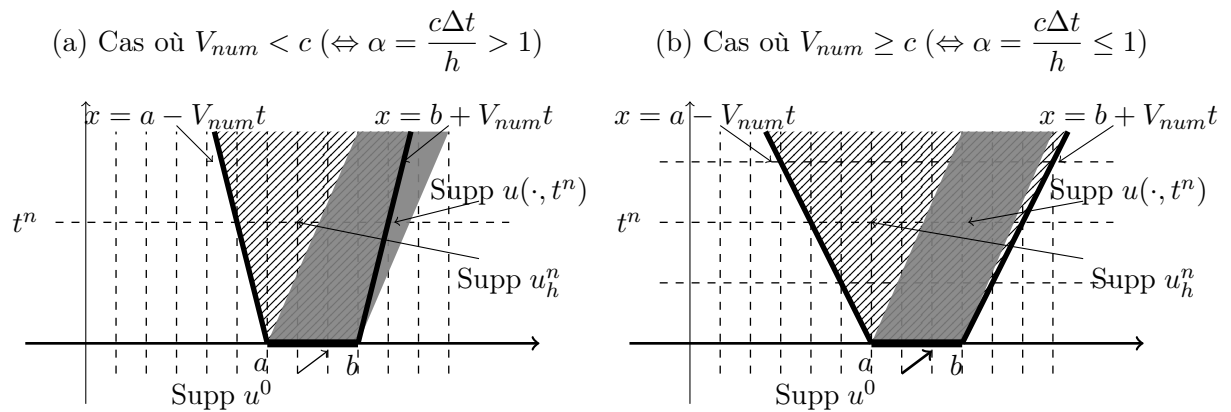


FIGURE 3.4 – Condition nécessaire de convergence : comparaison du support de  $u(\cdot, t)$  (zone grise) et du support de  $u_h^n$  (zone hachurée).

#### Remarque 3.4: Remarque sur la condition nécessaire de convergence

La condition (3.19) a une interprétation géométrique simple. En effet, pour l'équation de transport, on sait que la connaissance de  $u$  à l'instant  $t^n$  dans l'intervalle  $[x_{j-1}, x_{j+1}]$  permet de calculer la solution dans l'intervalle

$$x_{j-1} - ct^n \leq x - ct \leq x_{j+1} - ct^n.$$

La condition (3.19) signifie donc que le point  $(x_j, t_{n+1})$  doit se trouver dans la bande grisée de la Figure 3.5.

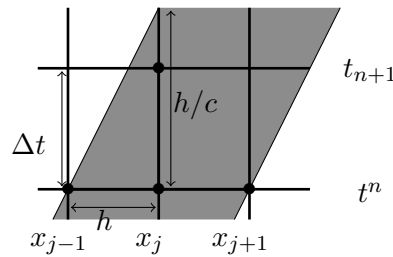


FIGURE 3.5 – Condition (3.19) :  $\Delta t \leq \frac{h}{c}$

### 3.2.3 Analyse de la stabilité d'un schéma : principes généraux

Avant d'aborder la notion de stabilité du schéma numérique, une notion intuitivement simple mais délicate à définir mathématiquement, il est utile de préciser ce que nous entendons par convergence du schéma. Intuitivement, la convergence signifie que, dans une certaine norme, l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée tend vers 0 quand  $\Delta t$  et  $h$  tendent vers 0. C'est le sens plus précis du « tend vers 0 » qu'il nous faut définir.

On supposera dans toute la suite que nous nous intéressons à l'approximation de la solution dans un intervalle de temps fixe  $[0, T]$ ,  $T > 0$ . Nous nous limiterons à la convergence  $L^\infty$  en temps à valeur  $L^p$  en espace.

#### Définition 3.5: Convergence

On dit qu'un schéma d'approximation de (3.3) produisant une suite  $u_h^n \in L^p$  converge dans  $L^\infty(0, T; L^p)$  si et seulement si, pour toute donnée initiale  $u^0$  dans  $L^p$ ,

$$\lim_{(h, \Delta t) \rightarrow 0} \sup_{t^n \leq T} \|u(\cdot, t^n) - u_h^n\|_{L^p} = 0.$$

Selon le principe qu'une condition nécessaire pour qu'une suite converge est qu'elle soit bornée, nous introduisons le principe de stabilité  $L^p$  (qui devrait s'appeler plutôt stabilité  $L^\infty(0, T; L^p)$ ).

#### Définition 3.6: Stabilité $L^p$

On dit qu'un schéma numérique est  $L^p$ -stable si et seulement si, pour tout temps  $T > 0$ , il existe une constante  $C(T)$  indépendante de  $h$  et  $\Delta t$ , telle que pour toute donnée initiale  $u^0$  dans  $L^p$ ,

$$\forall t^n \leq T, \quad \|u_h^n\|_{L^p} \leq C(T) \|u^0\|_{L^p}. \quad (3.20)$$

#### Remarque 3.7

Comme on le verra, le résultat de stabilité (3.20) (ou encore le résultat de convergence)

peut n'être satisfait que sous une condition de stabilité de la forme

$$(h, \Delta t) \in \mathbf{S} \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,$$

où  $\mathbf{S}$  définit le domaine de stabilité de la méthode. Évidemment tout ceci n'a de sens que si l'ensemble  $\mathbf{S}$  admet  $(0, 0)$  comme point d'accumulation.

### 3.2.4 Schéma à un pas de temps

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser aux schémas numériques à un pas produisant une suite  $u_h^n$  satisfaisant une relation de récurrence du type

$$u_h^{n+1} = S_h(\Delta t) u_h^n, \quad S_h(\Delta t) \in \mathcal{L}(L^p). \quad (3.21)$$

Le schéma explicite (3.9) entre donc dans cette catégorie.

#### Remarque 3.8

Un schéma consistant de la forme (3.21) vérifie, au moins formellement

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} S_h(\Delta t) = I.$$

#### Remarque 3.9

Démontrer un résultat de stabilité  $L^p$  pour un schéma à un pas du type (3.21) correspond à l'obtention d'une estimation uniforme en  $(h, \Delta t)$  de

$$\|S_h(\Delta t)^n\|_{\mathcal{L}(L^p)} = \sup_{v \in L^p} \frac{\|S_h(\Delta t)^n v\|_{L^p}}{\|v\|_{L^p}}.$$

En effet, la définition équivaut à

$$\forall t^n \leq T, \quad \|S_h(\Delta t)^n\|_{\mathcal{L}(L^p)} \leq C(T). \quad (3.22)$$

Une condition suffisante de stabilité, très utile en pratique, est donnée par le théorème suivant.

#### Théorème 3.10: Condition suffisante de stabilité

Une condition suffisante de stabilité  $L^p$  du schéma (3.21) est qu'il existe une constante  $\nu \geq 0$  telle que

$$\forall (\Delta t, h) \in \mathbf{S}, \quad \|S_h(\Delta t)\|_{\mathcal{L}(L^p)} \leq 1 + \nu \Delta t. \quad (3.23)$$

Auquel cas on a

$$\|S_h(\Delta t)^n\|_{\mathcal{L}(L^p)} \leq e^{\nu t^n},$$

ce qui entraîne en particulier (3.20) avec  $C(T) = e^{\nu T}$ .

**DÉMONSTRATION:** Par définition de  $\|S_h(\Delta t)\|_{\mathcal{L}(L^p)}$ , il est clair que

$$\|S_h(\Delta t)^n\|_{\mathcal{L}(L^p)} \leq (1 + \nu \Delta t)^n.$$

Pour conclure, il suffit d'utiliser le résultat suivant : pour tout  $x > 0$  et tout entier  $n$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x.$$

En effet, pour  $n = 1$ , l'inégalité  $1 + x \leq e^x$  traduit simplement le fait que le graphe de la fonction  $x \mapsto e^x$  est au dessus de sa tangente au point d'abscisse  $x = 0$ . Plus généralement, la fonction  $x \mapsto x^n$  étant croissante, il vient

$$1 + \frac{x}{n} \leq e^{\frac{x}{n}} \implies \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x. \quad \blacksquare$$

Notons que si la condition (3.23) est réalisée avec  $\nu = 0$ , c'est à dire si

$$\forall (\Delta t, h) \in \mathbf{S}, \quad \|S_h(\Delta t)\|_{\mathcal{L}(L^p)} \leq 1,$$

alors on a

$$\|u_h^n\|_{L^p} \leq \|u_h^0\|_{L^p},$$

qui est l'équivalent discret de

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p} \leq \|u^0\|_{L^p}.$$

On parlera alors de *stabilité uniforme*.

Signalons ainsi que le théorème 3.10 admet une réciproque, dont la démonstration, qui nécessite un peu de connaissances sur la théorie spectrale, dépasse le cadre de ce cours.

#### Théorème 3.11

Pour qu'un schéma numérique du type (3.21) soit  $L^p$  stable, il faut qu'il existe une constante  $\nu \geq 0$  telle que

$$\forall (\Delta t, h) \in \mathbf{S}, \quad \|S_h(\Delta t)\|_{\mathcal{L}(L^p)} \leq 1 + \nu \Delta t. \quad (3.24)$$

### 3.2.5 Analyse de stabilité $L^2$ du schéma explicite centré : la méthode de Fourier-Von Neumann

Le schéma explicite (3.9) entre dans la classe (3.21) avec

$$S_h(\Delta t) = I - \Delta t A_h. \quad (3.25)$$

Pour étudier  $\|S_h(\Delta t)\|_{\mathcal{L}(L^2)}$ , nous utilisons la transformation de Fourier et introduisons l'opérateur

$$\widehat{S}_h(\Delta t) = \mathcal{F} S_h(\Delta t) \mathcal{F}^{-1} \in \mathcal{L}(L^2). \quad (3.26)$$

On montre alors qu'il existe  $\widehat{S}_h(k, \Delta t) \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  tel que

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad \widehat{u}_h^{n+1}(k) = (\widehat{S}_h(\Delta t) \widehat{u}_h^n)(k) = \widehat{S}_h(k, \Delta t) \widehat{u}_h^n(k), \quad (3.27)$$

où on a posé  $\widehat{u}_h^n = \mathcal{F} u_h^n$ .

Grâce au théorème de Plancherel, nous avons

$$\|\widehat{S}_h(\Delta t)\|_{\mathcal{L}(L^2)} = \|S_h(\Delta t)\|_{\mathcal{L}(L^2)}.$$

Le théorème 3.26 va nous donner une autre expression pour  $\|S_h(\Delta t)\|_{\mathcal{L}(L^2)}$  qui sera beaucoup utilisée en pratique. Pour cela, il est utile d'introduire quelques définitions et énoncer (sans preuve) quelques résultats de base (que nous invitons le lecteur à démontrer à titre d'exercice) :

- étant donné  $\widehat{b}(k) \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , on appelle opérateur de multiplication par  $\widehat{b}$ , l'opérateur  $\widehat{B}$ , linéaire et continu de  $L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  dans lui-même défini par :

$$\forall v \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad (\widehat{B}v)(k) = \widehat{b}(k) v(k), \quad \text{p. p. } k \in \mathbb{R}.$$

C'est un exercice très simple de montrer que :

$$\forall p \in [1, +\infty], \quad \|\widehat{B}\|_{\mathcal{L}(L^p)} = \|\widehat{b}\|_{L^\infty} \quad (3.28)$$

- Dans le cas  $p = 2$ , on appelle opérateur de symbole  $\widehat{b}$ , l'opérateur

$$B = \mathcal{F} \widehat{B} \mathcal{F}^{-1} \in \mathcal{L}(L^2).$$

où  $\widehat{B}$  est opérateur de multiplication par  $\widehat{b}$ . Du théorème de Plancherel et de (3.28), nous déduisons aisément que

$$\|B\|_{\mathcal{L}(L^2)} = \|\widehat{b}\|_{L^\infty} \quad (3.29)$$

D'après les relations (3.26-3.27),  $S_h(\Delta t)$  est un opérateur à symbole, on en déduit donc d'après (3.29) le théorème suivant.

#### Théorème 3.12

On a

$$\forall \Delta t, \quad \|S_h(\Delta t)\|_{\mathcal{L}(L^2)} = \sup_{k \in \mathbb{R}} \left| \widehat{S}_h(k, \Delta t) \right|.$$

Ainsi la condition nécessaire et suffisante de stabilité  $L^2$  est

$$\exists \nu \geq 0, \forall (\Delta t, h) \in \mathbf{S}, \quad \sup_{k \in \mathbb{R}} \left| \widehat{S}_h(k, \Delta t) \right| \leq 1 + \nu \Delta t.$$

Il nous reste donc à étudier la norme  $L^\infty$  de  $k \mapsto \widehat{S}_h(k, \Delta t)$ . Pour ce faire, il nous faut caractériser la transformée de Fourier de  $A_h$ . Celui ci est également un cas particulier d'opérateur à symbole.

## Lemme 3.13

On a l'identité

$$\forall u \in L^2, \quad \forall k \in \mathbb{R}, \quad \widehat{A_h u}(k) = \widehat{A}_h(k) \widehat{u}(k), \quad (3.30)$$

et l'opérateur  $A_h$  a pour symbole  $\widehat{A}_h(k)$  donné par

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad \widehat{A}_h(k) = \iota c \frac{\sin kh}{h}.$$

**DÉMONSTRATION:** La propriété (1.13) signifie que l'opérateur  $\tau_a$  (défini par  $\tau_a u(x) = u(x+a)$ ) n'est autre que l'opérateur de symbole  $e^{iak}$ . Comme

$$A_h = c \frac{\tau_h - \tau_{-h}}{2h},$$

on en déduit que  $A_h$  est l'opérateur de symbole

$$\widehat{A}_h(k) = c \frac{e^{ikh} - e^{-ikh}}{2h} = \iota c \frac{\sin kh}{h}$$

ce qui achève la démonstration. ■

## Remarque 3.14

On peut remarquer que

$$\widehat{A}_h(k) = \iota c |k| \left( 1 + O(|k|^2 h^2) \right).$$

On retrouve alors sous une autre forme, le fait que l'opérateur  $A_h$  dont le symbole est  $\widehat{A}_h$  approche l'opérateur  $c \partial_x$  dont le symbole est  $\iota ck$ , et ce au second ordre en  $h$ .

De (3.25), nous déduisons facilement le corollaire suivant.

## Corollaire 3.15

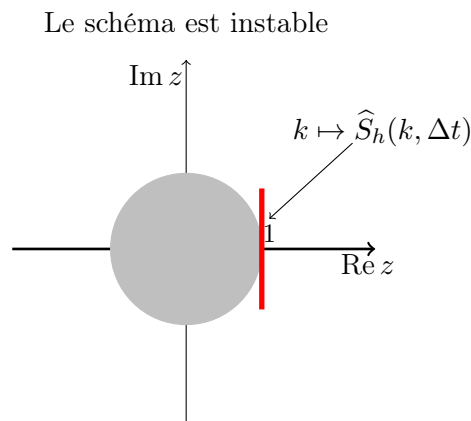
L'opérateur  $S_h(\Delta t)$  est l'opérateur de symbole

$$\widehat{S}_h(k, \Delta t) = 1 - \iota \alpha \sin kh, \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{c \Delta t}{h}.$$

Nous représentons dans le plan complexe le coefficient d'amplification dans la figure 3.6. Par conséquent, d'après le théorème 3.26

$$\|S_h(\Delta t)\|_{\mathcal{L}(L^2)} = \sup_{k \in \mathbb{R}} \left| \widehat{S}_h(k, \Delta t) \right| = (1 + \alpha^2)^{1/2}.$$

Finalement, nous avons tous les éléments pour établir le théorème qui suit.



**FIGURE 3.6** – Coefficient d’amplification dans le plan complexe du coefficient d’amplification du schéma explicite centré.

#### Théoreme 3.16

Le schéma explicite centré (3.4) est instable dans  $L^2$  pour tout  $(\Delta t, h)$ . On dit qu’il est inconditionnellement instable.

Au final, le schéma explicite centré qui semblait à première vue naturel est donc, malgré sa consistance, instable. La solution numérique calculée grâce à ce schéma ne peut *a priori* pas converger vers la solution du problème continu (3.3).

Les figures 3.7 et 3.8 illustrent l’instabilité du schéma explicite centré pour  $\alpha = 1$  et pour deux valeurs du couple  $(\Delta t, h)$ . Pour plusieurs pas de temps, nous représentons en rouge la solution exacte (de l’équation d’advection (3.3) pour une vitesse  $c$  particulière) et en bleu la solution numérique calculée en utilisant le schéma explicite centré (3.4).

#### Remarque 3.17: Remarque sur la méthode de Fourier-Von Neumann

Les calculs précédents apparaissent tout naturellement quand on cherche la solution explicite de (3.9) en appliquant la transformation de Fourier. Nous procédons donc ici de la même façon que pour l’équation continue (3.3) à la section 1.3.

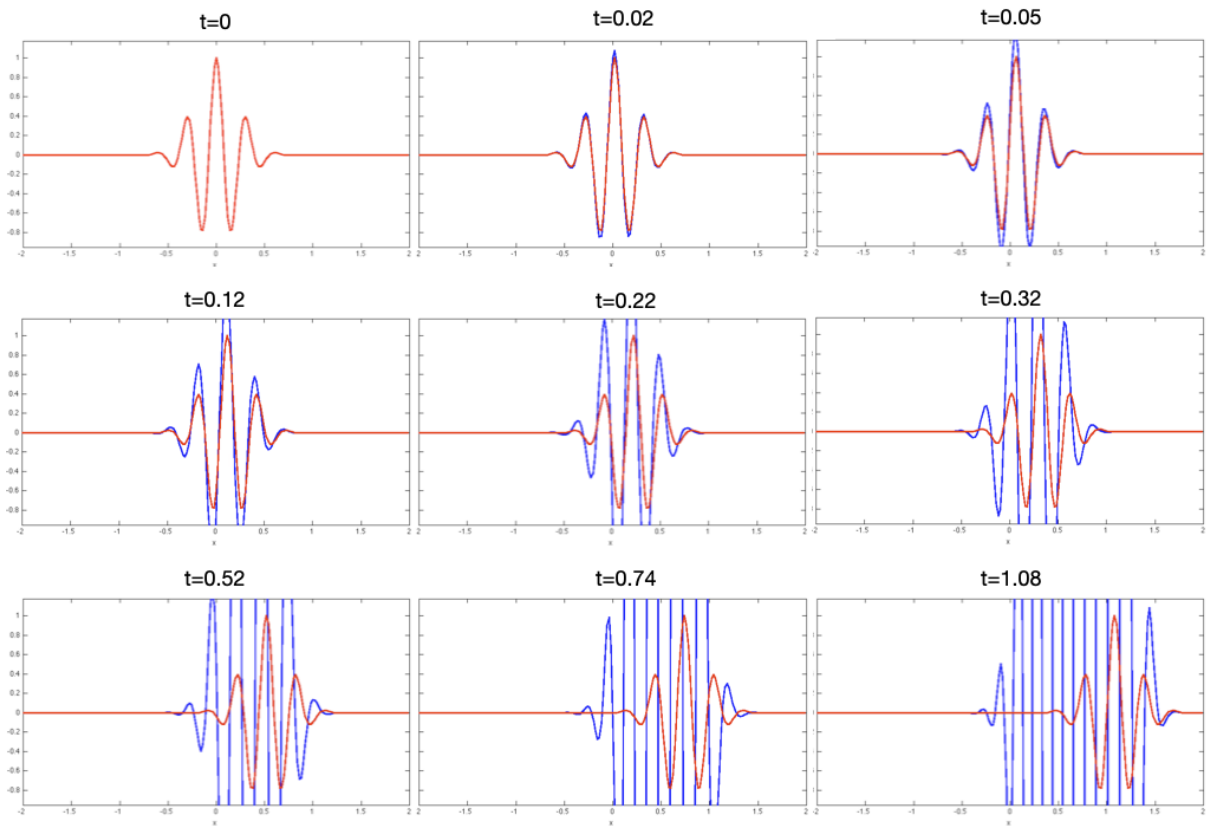
Appliquons la transformation de Fourier à (3.9). Si  $\widehat{u}_h^n$  désigne la transformée de Fourier de  $u_h^n$ , en utilisant (3.30), nous obtenons :

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad \frac{\widehat{u}_h^{n+1}(k) - \widehat{u}_h^n(k)}{\Delta t} + i c \frac{\sin kh}{h} \widehat{u}_h^n(k) = 0,$$

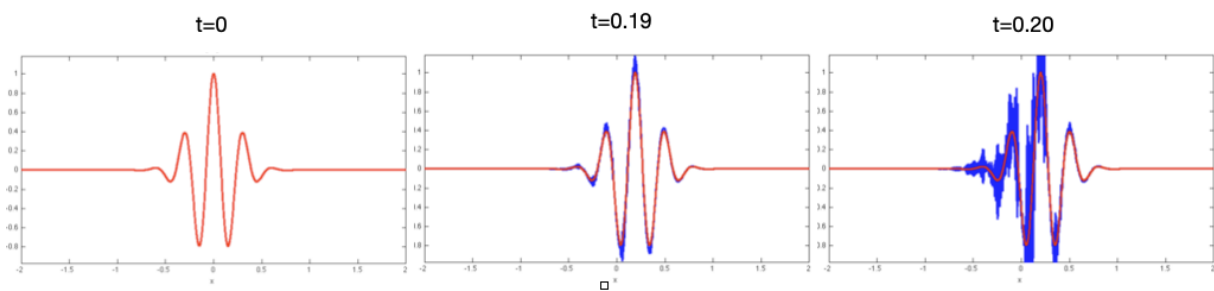
c’est à dire

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad \widehat{u}_h^{n+1}(k) = \widehat{S}_h(k, \Delta t) \widehat{u}_h^n(k) \quad (3.31)$$

Cette formule est à comparer à la formule (1.14) pour la solution exacte : le symbole  $\widehat{S}_h(k, \Delta t)$  apparaît donc comme le *coefficient d’amplification* du schéma.



**FIGURE 3.7** – Le schéma explicite centré est inconditionnellement instable : en rouge la solution exacte et en bleu la solution calculée pour  $h = 0.02$  et  $\alpha = 1$ .



**FIGURE 3.8** – Le schéma explicite centré est inconditionnellement instable : en rouge la solution exacte et en bleu la solution calculée pour  $h = 0.005$  et  $\alpha = 1$ .



Par suite

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad \widehat{u}_h^n(k) = \widehat{S}_h(k, \Delta t)^n \widehat{u}^0(k).$$

Par le théorème de Plancherel

$$\|u_h^n\|_{L^2}^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{S}_h(k, \Delta t)|^n |\widehat{u}^0(k)|^2 dk$$

et la recherche de l'estimation (3.20) (pour  $p = 2$ ) mène ainsi naturellement au résultat du théorème 3.16.

Retenons ici une *recette de calcul* pour la mise en oeuvre de la méthode de Fourier-Von Neumann lors de l'analyse de stabilité  $L^2$  d'un schéma numérique approchant une équation aux dérivées partielles d'évolution en une dimension d'espace :

(i) On cherche une solution de la forme

$$u_j^n = u_h^n(k) e^{ikx_j}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0, \quad (u_h^n(k) \in \mathbb{C}).$$

(ii) On détermine une relation de récurrence satisfaite par la suite  $u_h^n(k)$ ,

(iii) On étudie le comportement de la famille de suites  $\{u_h^n(k), k \in \mathbb{R}\}$ .

Remarquons alors que :

- cette méthode n'est applicable que si l'on s'intéresse à l'approximation d'une équation linéaire à coefficients constants posée sur  $\mathbb{R}$ , sur un maillage régulier,
- dans le cas des schémas numériques à un pas de temps, la relation de récurrence est nécessairement de la forme (3.31) et l'analyse de stabilité se réduit à l'étude du coefficient d'amplification numérique.

### 3.3 Le schéma de Lax-Friedrichs pour l'équation d'advection

À la différence du schéma explicite centré, le schéma de Lax-Friedrichs cherche à symétriser le traitement sur la variable temporelle tout en conservant le caractère explicite du schéma. On utilise donc :

- l'approximation de  $\frac{\partial u}{\partial t}$  suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) \simeq \frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}}{\Delta t},$$

- une approximation centrée, d'ordre 2, pour  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , écrite à l'instant  $t^n$  (voir Section 3.1)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \simeq D_h^0 u(x_j, t^n) = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}.$$

L'équation du schéma de Lax-Friedrichs au point  $(x_j, t^n)$  s'écrit donc

$$\frac{2u_j^{n+1} - u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0. \quad (3.32)$$

Il s'agit d'un schéma à un pas (ou deux points) en temps et à deux points en espace. Ce schéma est bien explicite. Il permet de calculer explicitement la solution à l'instant  $n+1$  à partir de la solution à l'instant  $n$

$$u_j^{n+1} = \frac{1-\alpha}{2} u_{j+1}^n - \frac{1+\alpha}{2} u_{j-1}^n, \quad j \in \mathbb{Z},$$

où nous rappelons que

$$\alpha = \frac{c\Delta t}{h}.$$

Evidemment, pour que (3.32) définisse entièrement la solution approchée, il suffit de connaître les  $\{u_j^0, j \in \mathbb{Z}\}$ , ce pour quoi on va, comme indiqué dans (3.5), utiliser la condition initiale.

#### Remarque 3.18: Interprétation géométrique du schéma de Lax Friedrichs

On rappelle que la solution exacte est constante sur les droites caractéristiques qui sont ici plus précisément les droites de pente  $c$ . On a donc

$$u(x_j, t^{n+1}) = u(x^*, t^n), \quad \text{avec } x^* = x_j - c\Delta t.$$

On remarque ainsi aisément que (voir Figure 3.9) :

$$x^* = \frac{1+\alpha}{2} x_{j-1} + \frac{1-\alpha}{2} x_{j+1}.$$

Le schéma de Lax Friedrichs consiste donc à considérer une interpolation linéaire sur le maillage de la solution continue.

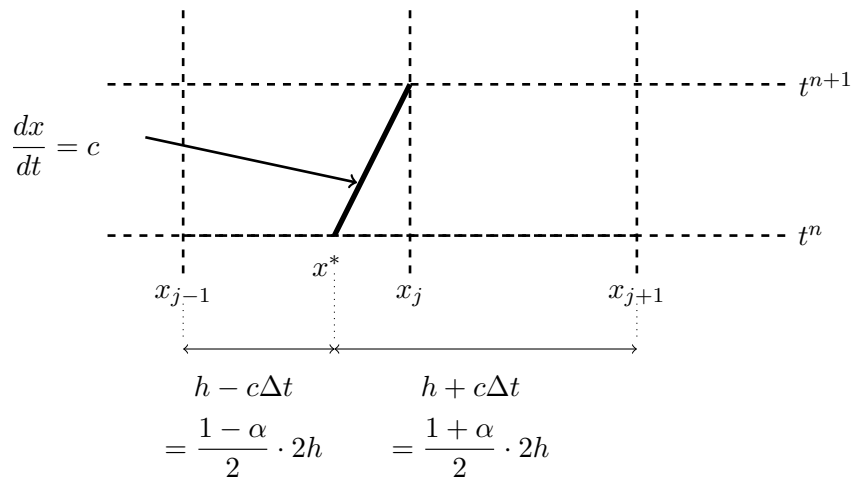


FIGURE 3.9 – Interprétation géométrique du schéma de Lax Friedrichs

### 3.3.1 Consistance et ordre du schéma

Nous commençons par l'étude de l'erreur de troncature qui nous conduit à l'analyse de la consistance. Contrairement au schéma explicite centré, l'analyse est ici un peu plus complexe.

Respectant la définition 3.2, l'erreur de troncature du schéma (3.32) est donnée par

$$\varepsilon_j^n = \frac{U_j^{n+1} - \frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + c \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h}, \quad (3.33)$$

où  $U_j^n$  est définie par  $U_j^n = u(x_j, t^n)$ ,  $u$  étant une solution régulière de (3.3). On peut alors démontrer :

#### Théorème 3.19

Le schéma (3.32) est d'ordre 1 en temps et en espace, à  $\alpha$  fixé.

**DÉMONSTRATION:** On commence par remarquer que

$$\frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2} = U_j^n + \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{2},$$

en utilisant la définition 3.2 de l'erreur de troncature pour le schéma explicite centré que nous notons  $(\varepsilon_j^n)_{EC}$ , il vient facilement que l'erreur de troncature pour le schéma de Lax-Friedrichs  $\varepsilon_j^n$  est donnée par :

$$\varepsilon_j^n = (\varepsilon_j^n)_{EC} - \frac{h^2}{2\Delta t} \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2}.$$

Si on fixe  $\alpha = \frac{c\Delta t}{h}$  et en utilisant l'opérateur d'approximation de la dérivée seconde donnée dans (3.2), on obtient

$$\varepsilon_j^n = (\varepsilon_j^n)_{EC} - \frac{ch}{2\alpha} \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^n + \mathcal{O}(h^2) \right]. \quad (3.34)$$

En utilisant le calcul de l'erreur de consistance pour le schéma explicite centré (voir la preuve du Théorème 3.3)

$$(\varepsilon_j^n)_{EC} = \mathcal{O}(\Delta t + h^2),$$

on obtient finalement

$$\varepsilon_j^n = \mathcal{O}(\Delta t + h).$$

■

Pour l'analyse de convergence, nous utilisons la version « continue en espace » de l'erreur de troncature, à savoir, en reprenant les notations de la section 3.2,

$$\varepsilon_h^n(x) = \frac{u(x, t^{n+1}) - \frac{u(x+h, t^n) + u(x-h, t^n)}{2}}{\Delta t} + c \frac{u(x+h, t^n) - u(x-h, t^n)}{2h}.$$

À partir des expressions (3.16) et (3.34), on déduit une estimation  $L^\infty$  de  $\varepsilon_h^n$  (avec une constante numérique  $C$  dépendant de  $\alpha$ )

$$\|\varepsilon_h^n\|_{L^\infty} \leq C(\alpha) \left( \Delta t \sup_{t \in [t^n, t^{n+1}]} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, t) \right\|_{L^\infty} + h \sup_{t \in [t^n, t^{n+1}]} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cdot, t) \right\|_{L^\infty} \right).$$

Nous pouvons également obtenir une estimation équivalente de  $\varepsilon_h^n$  pour la norme  $L^p$ , c'est à dire qu'il existe une constante  $C(\alpha)$  telle que

$$\|\varepsilon_h^n\|_{L^p} \leq C(\alpha) \left( \Delta t \sup_{t \in [t_n, t_{n+1}]} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, t) \right\|_{L^p} + h \sup_{t \in [t_n, t_{n+1}]} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cdot, t) \right\|_{L^p} \right),$$

ce qui pour le problème de Cauchy (et donc  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ) se ramène au théorème qui suit.

#### Théorème 3.20

Pour le schéma de Lax-Friedrichs (3.32), l'erreur de troncature est telle que pour tout  $p$ , il existe une constante  $C(\alpha)$  dépendant de  $\alpha$  telle que

$$\|\varepsilon_h^n\|_{L^p} \leq C(\alpha) h \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cdot, t) \right\|_{L^p}. \quad (3.35)$$

### 3.3.2 Vitesse de propagation numérique

La formule (3.32) démontre que le support de la solution numérique se propage à vitesse finie au sens où

$$\text{supp } u_h^0 \subset [a, b] \implies \text{supp } u_h^n \subset [a - nh, b + nh]$$

La vitesse de propagation de la solution numérique est donc donnée par

$$V_{num}(\Delta, h) = \frac{h}{\Delta t}.$$

Comme pour le schéma explicite centré, une condition nécessaire de convergence du schéma est donc que la vitesse numérique doit être supérieure à la vitesse de propagation de la solution exacte (voir Figure 3.4) :

$$\frac{h}{\Delta t} \geq c \iff \alpha = \frac{c\Delta t}{h} \leq 1. \quad (3.36)$$

### 3.3.3 Analyse de stabilité

Le schéma de Lax Friedrichs (3.32) produit une suite  $u_h^n$  satisfaisant la relation de récurrence

$$u_h^{n+1} = S_h(\Delta t) u_h^n \quad (3.37)$$

avec

$$[S_h(\Delta t) u](x) = \frac{1 - \alpha}{2} u(x + h) + \frac{1 + \alpha}{2} u(x - h).$$

En appliquant la méthode de Fourier-Von Neumann développée à la section 3.2.5 ou l'algorithme proposé en Remarque 3.2.5 sur la stabilité  $L^2$ , on montre que la relation précédente mène au coefficient d'amplification

$$\widehat{S}_h(k, \Delta t) = \frac{1 - \alpha}{2} e^{ikh} + \frac{1 + \alpha}{2} e^{-ikh},$$

soit (voir Figure 3.10 pour la représentation dans le plan complexe de  $k \mapsto \widehat{S}_h(k, \Delta t)$ )

$$\widehat{S}_h(k, \Delta t) = \cos(kh) - \imath \alpha \sin(kh). \quad (3.38)$$

On rappelle qu'un schéma donné par une relation de récurrence d'ordre 1 est  $L^2$ -stable si et seulement si il existe une constante  $\nu \geq 0$  telle que

$$\forall (\Delta t, h) \in \mathbf{S}, \quad \|S_h(\Delta t)\|_{\mathcal{L}(L^2)} = \sup_{k \in \mathbb{R}} \left| \widehat{S}_h(k, \Delta t) \right| \leq 1 + \nu \Delta t.$$

On en déduit alors le résultat de stabilité  $L^2$  pour le schéma de Lax-Friedrichs.

#### Théoreme 3.21

Le schéma de Lax-Friedrichs (3.32) est stable (et même uniformément stable) pour la norme  $L^2$  si et seulement si

$$\alpha = \frac{c\Delta t}{h} \leq 1. \quad (3.39)$$

Cette condition est appelée condition CFL (Courant-Friedrichs-Lewy).

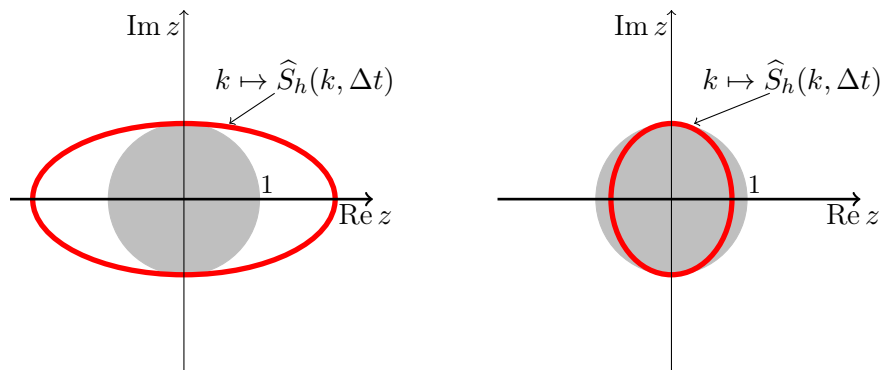
**DÉMONSTRATION:** Il suffit de remarquer que

$$\sup_{k \in \mathbb{R}} \left| \widehat{S}_h(k, \Delta t) \right| = \max(1, \alpha).$$

■

La stabilité  $L^2$  est donc obtenue par le calcul du coefficient d'amplification en utilisant la méthode

Cas où  $\alpha > 1$  : le schéma est instable    Cas où  $\alpha \leq 1$  : le schéma est stable



**FIGURE 3.10** – Coefficient d'amplification dans le plan complexe en fonction de  $\alpha = \frac{c\Delta t}{h}$

de Fourier-Von Neumann. Plus généralement, pour la stabilité  $L^p$ , il faut utiliser des arguments différents. Pour le schéma de Lax-Friedrichs, on utilise un argument de convexité.

**Théoreme 3.22**

Le schéma de Lax-Friedrichs (3.32) est stable (et même uniformément stable) pour la norme  $L^p$  si et seulement si

$$\alpha = \frac{c\Delta t}{h} \leq 1$$

**DÉMONSTRATION:** Supposons que  $\alpha \leq 1$ . On rappelle que pour tout  $u$

$$[S_h(\Delta t)u](x) = \frac{1-\alpha}{2}u(x+h) + \frac{1+\alpha}{2}u(x-h),$$

avec

$$\frac{1-\alpha}{2} \geq 0, \quad \frac{1+\alpha}{2} \geq 0, \quad \frac{1-\alpha}{2} + \frac{1+\alpha}{2} = 1.$$

Par convexité de  $x \mapsto |x|^p$  pour  $p \geq 1$ , on obtient pour toute fonction  $u \in L^p$ , d'une part que  $S_h(\Delta t)u \in L^p$  et d'autre part que

$$\int_{\mathbb{R}} |[S_h(\Delta t)u](x)|^p dx \leq \frac{1-\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}} |u(x+h)|^p dx + \frac{1+\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}} |u(x-h)|^p dx$$

ce qui entraîne

$$\|S_h(\Delta t)u\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p}.$$

En utilisant, le théorème 3.10, on en déduit que le schéma est stable pour la norme  $L^p$ . ■

La condition CFL (3.39) correspond exactement à la condition nécessaire de convergence (3.36) obtenue en comparant la vitesse numérique et la vitesse de propagation de la solution continue. Elle dit que le pas de temps doit être inférieur à  $h/c$ . Cette condition est quelque peu contraignante : même si on se place à la limite de la condition de stabilité, lorsque qu'on divise le pas d'espace par 2, le pas de temps doit être divisé par 2. Si on raffine le maillage en espace par 10, il faut raffiner le maillage en temps par 10 !

L'intérêt du schéma explicite est que les calculs à effectuer à chaque pas de temps sont très simples et peu coûteux. La contre-partie est que la condition de stabilité contraint à choisir un pas de temps aussi petit que le pas en espace ce qui peut engendrer un gros surcoût de calcul.

### 3.3.4 Convergence du schéma

Passons maintenant à la convergence du schéma (3.32) dans  $L^\infty(0, T; L^p)$  en montrant d'après la définition 3.6 que pour toute donnée initiale dans  $L^p$

$$\lim_{(h, \delta t) \rightarrow 0} \sup_{t^n \leq T} \|u(\cdot, t^n) - u_h^n\|_{L^p} = 0,$$

où  $u$  est la solution continue de (3.3) et  $u_h^n$  est la suite produite par le schéma (3.32).

Nous introduisons donc l'erreur commise sur la solution

$$e_h^n = u(\cdot, t^n) - u_h^n,$$

et obtenons la convergence du schéma comme une conséquence de sa consistance et de sa stabilité.

La première étape consiste donc à relier l'erreur  $e_h^n$  à l'erreur de troncature  $\varepsilon_h^n$ . C'est particulièrement simple ici grâce à la linéarité des équations. En effet, des égalités (3.37) et (3.33), nous déduisons que

$$\begin{cases} u(\cdot, t^{n+1}) = S_h(\Delta t) u(\cdot, t^n) + \Delta t \varepsilon_h^n, \\ u_h^{n+1} = S_h(\Delta t) u_h^n, \end{cases}$$

soit par différence

$$e_h^{n+1} = S_h(\Delta t) e_h^n + \Delta t \varepsilon_h^n. \quad (3.40)$$

Ainsi, l'erreur  $e_h^n$  apparaît comme la solution d'un problème d'évolution discret entretenu par un terme source qui n'est autre que l'erreur de troncature.

Plus généralement, nous allons en fait montrer que si une suite  $e_h^n$  vérifie la relation (3.40) où l'opérateur  $S_h(\Delta t)$  satisfait l'estimation de stabilité  $L^p$  (3.22), alors on peut estimer  $e_h^n$  en fonction de  $e_h^0$  et des  $\varepsilon_h^k$  uniformément en  $\Delta t$ , tant que  $t^n \leq T$ .

En effet, nous observons que

$$\begin{cases} e_h^1 = S_h(\Delta t) e_h^0 + \Delta t \varepsilon_h^0, \\ e_h^2 = S_h(\Delta t) e_h^1 + \Delta t \varepsilon_h^1 = S_h(\Delta t)^2 e_h^0 + \Delta t (\varepsilon_h^1 + S_h(\Delta t) \varepsilon_h^0), \end{cases}$$

et, de proche en proche,

$$e_h^n = S_h(\Delta t)^n e_h^0 + \Delta t \left( \sum_{k=0}^{n-1} S_h(\Delta t)^k \varepsilon_h^{n-1-k} \right).$$

En passant aux normes, on obtient alors

$$\|e_h^n\|_{L^p} = \|S_h(\Delta t)^n\|_{\mathcal{L}(L^p)} \|e_h^0\|_{L^p} + \Delta t \left( \sum_{k=0}^{n-1} \|S_h(\Delta t)^k\|_{\mathcal{L}(L^p)} \|\varepsilon_h^{n-1-k}\|_{L^p} \right).$$

Si on suppose l'hypothèse de stabilité (3.24) satisfaite, on a

$$\|S_h(\Delta t)\|_{\mathcal{L}(L^p)} \leq 1 + \nu \Delta t.$$

Or on sait que

$$\forall t^q \leq T, \quad \|S_h(\Delta t)^q\|_{\mathcal{L}(L^p)} \leq e^{\nu t^q} \leq e^{\nu T}.$$

Nous avons donc,

$$\forall t^n \leq T, \quad \|e_h^n\|_{L^p} \leq e^{\nu T} \left( \|e_h^0\|_{L^p} + t^n \sup_{k \leq n-1} \|\varepsilon_h^k\|_{L^p} \right),$$

ce qui mène à l'estimation d'erreur

$$\sup_{t^n \leq T} \|e_h^n\|_{L^p} \leq e^{\nu T} \left( \|e_h^0\|_{L^p} + T \sup_{t^n \leq T} \|\varepsilon_h^n\|_{L^p} \right).$$

Bien entendu, dans le cas d'un schéma uniformément stable ( $\nu = 0$ ), l'estimation devient

$$\sup_{t^n \leq T} \|e_h^n\|_{L^p} \leq \left( \|e_h^0\|_{L^p} + T \sup_{t^n \leq T} \|\varepsilon_h^n\|_{L^p} \right). \quad (3.41)$$

Nous pouvons appliquer ce résultat général pour établir des estimations d'erreur  $L^p$  pour le schéma de Lax Friedrichs (3.32).

#### Théoreme 3.23

Soient  $u$  la solution de (3.3) et  $u_h^n$  la solution de (3.32, 3.10). Si  $\frac{c\Delta t}{h} \leq 1$  et si, pour  $p \in [1, +\infty]$ , on a l'estimation d'erreur  $L^\infty(0, T; L^p)$  :

$$\sup_{t^n \leq T} \|u(\cdot, t^n) - u_h^n\|_{L^p} \leq h C(\alpha) T \left\| \frac{d^2 u^0}{dx^2} \right\|_{L^p}.$$

**DÉMONSTRATION:** D'après le théorème 3.22, sous la condition CFL (3.39), nous savons que le schéma est uniformément stable dans  $L^p$ . Nous pouvons donc appliquer la formule (3.41) dans laquelle nous injectons l'estimation (3.35) de l'erreur de troncature.

Le terme de (3.41) concernant  $e_0^h$  est nul si la condition initiale imposée pour la solution numérique est (choix (i) de (3.10))

$$\forall j, \quad u_j^0 = u(x_j, t = 0) = u^0(x_j).$$

Si la condition initiale imposée est autre (par exemple le choix (ii) de (3.10)), pour estimer le terme en  $e_0^h$  nous utilisons le résultat classique suivant (sur l'interpolation linéaire - exercice)

$$\|e_h^0\|_{L^p} = \|\Pi_h u^0 - u^0\|_{L^p} \leq Ch \left\| \frac{d^2 u^0}{dx^2} \right\|_{L^p}.$$

■

D'après la paragraphe 3.3.2 et le théorème précédent, la condition CFL (3.39) est donc une condition nécessaire et suffisante de convergence du schéma de Lax-Friedrichs. Les figures 3.11 et 3.12 illustrent l'importance de cette condition dans la stabilité et donc la convergence du schéma : pour plusieurs pas de temps, nous représentons en rouge la solution exacte (de l'équation d'advection (3.3) pour une vitesse  $c$  particulière) et en bleu la solution numérique calculée en utilisant le schéma de Lax Friedrichs (3.32).

De manière générale, nous venons d'établir dans cette section, le théorème de Lax.



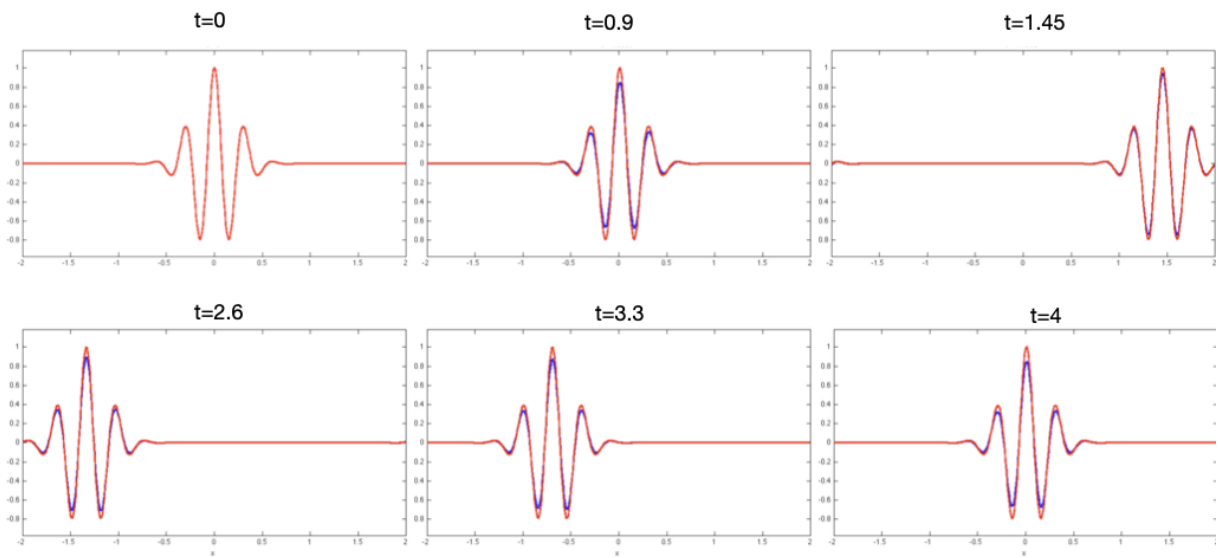


FIGURE 3.11 – Le schéma de Lax-Friedrichs est conditionnellement stable : en rouge la solution exacte et en bleu la solution calculée pour  $h = 0.1$  et  $\alpha = 0.99$ .

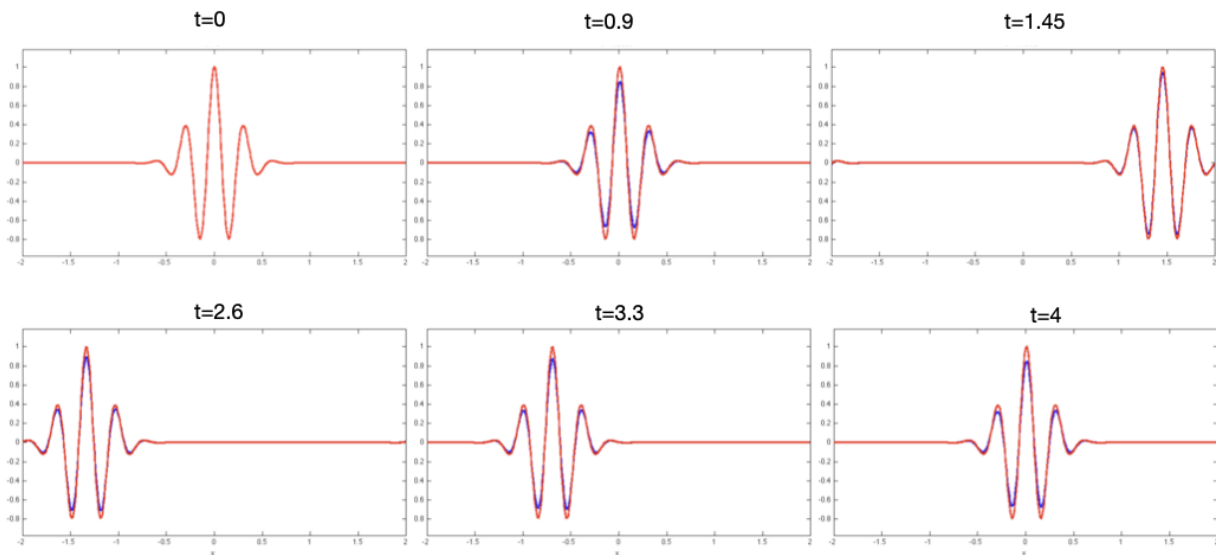


FIGURE 3.12 – Le schéma de Lax-Friedrichs est conditionnellement stable : en rouge la solution exacte et en bleu la solution calculée pour  $h = 0.005$  et  $\alpha = 1.05$ .

**Théoreme 3.24: Lax**

Soit  $u$  une solution suffisamment régulière d'un système différentiel et  $u_j^n$  la solution numérique discrète obtenue par un schéma aux différences finies avec la donnée initiale  $u_j^0 = u^0(x_j)$ . On suppose le schéma linéaire, consistant et, pour un certain domaine de stabilité  $\mathbf{S}$  admettant  $(0, 0)$  comme point d'accumulation, stable pour une norme  $\|\cdot\|$ , alors le schéma est convergent au sens où

$$\forall (h, \Delta t) \in \mathbf{S}, \quad \forall T > 0, \quad \lim_{\Delta t, h \rightarrow 0} \sup_{t^n \leq T} \|e_h^n\| = 0,$$

avec  $e_h^n = u_h^n - u(t^n, \cdot)$  l'erreur commise sur la solution.

De plus, l'ordre de convergence est donné par l'erreur de troncature : c'est à dire que si le schéma est d'ordre  $p$  en temps et d'ordre  $q$  en espace alors

$$\forall n, \quad e_h^n = \mathcal{O}(\Delta t^p + h^q).$$

### 3.4 Quelques remarques sur les schémas à deux pas de temps.

Un schéma est dit à 2 pas de temps quand il fait intervenir les pas de temps  $n - 1$ ,  $n$  et  $n + 1$  :

$$u_h^{n+1} = S_h^1(\Delta t)u_h^n + S_h^2(\Delta t)u_h^{n-1}. \quad (3.42)$$

**Exemple de schéma à deux pas de temps**

Le schéma dit "saute-mouton" pour l'équation de transport s'écrit

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0.$$

Le schéma se met donc bien sous la forme (3.42) après interpolation (voir (3.6) et (3.7)) et avec  $S_h^1(\Delta t) = -\Delta t A_h$  où  $A_h$  est défini (3.8) et  $S_h^2(\Delta t) = Id$ .

#### 3.4.1 Schéma de démarrage

Ces schémas à 2 pas de temps pour la discrétisation de l'équation de transport nécessitent un schéma de démarrage à deux pas de temps alors que l'équation de transport ne fournit naturellement qu'une condition initiale :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad u_j^0 = u^0(x_j). \quad (3.43)$$

Pour fixer la donnée  $\{u_j^1, j \in \mathbb{Z}\}$  du schéma qui permettrait de le démarrer et calculer par récurrence pour tout  $n \geq 1$ ,  $\{u_j^{n+1}, j \in \mathbb{Z}\}$  à partir de  $\{u_j^n, j \in \mathbb{Z}\}$  et  $\{u_j^{n-1}, j \in \mathbb{Z}\}$ , on utilise

des développements de Taylor de la solution en  $t = 0$ . Ainsi,

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad u(\Delta t, x_j) = u(0, x_j) + \mathcal{O}(\Delta t)$$

suggère d'imposer

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad u_j^1 = u_j^0. \quad (3.44)$$

Cependant une erreur de consistance est introduite dans le calcul de ce terme, cette erreur doit être du même ordre que l'ordre de consistance en temps du schéma, sinon l'ordre global du schéma sera détérioré. Ainsi si l'ordre du schéma est 2 en temps (comme c'est le cas pour l'exemple donné), il faut utiliser le développement de Taylor en  $t = 0$  à l'ordre 2 de la solution

$$u(\Delta t, x_j) = u(0, x_j) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(0, x_j) + \mathcal{O}((\Delta t)^2) = u(0, x_j) - c \Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(0, x_j) + \mathcal{O}((\Delta t)^2),$$

où on a utilisé que  $u$  est solution de (3.3). En utilisant la condition initiale, ceci suggère donc d'imposer

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad u_j^1 = u_j^0 - c \Delta t \frac{du^0}{dx}(x_j). \quad (3.45)$$

### 3.4.2 Analyse de stabilité

Il est assez facile de voir qu'un schéma à deux pas de temps qui s'écrit sous la forme (3.42) peut s'écrire sous la forme d'un schéma à 1 pas de temps avec une inconnue vectorielle :

$$\mathbf{U}_h^{n+1} = \mathbf{S}_h(\Delta t) \mathbf{U}_h^n \quad \text{où} \quad \mathbf{U}_h^n := \begin{pmatrix} u_h^n \\ u_h^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}_h(\Delta t) = \begin{pmatrix} S_h^1(\Delta t) & S_h^2(\Delta t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Il est maintenant assez facile de voir qu'il est possible d'étendre les théorèmes 3.22 et 3.11.

#### Théorème 3.25: Condition nécessaire et suffisante de stabilité

Une condition nécessaire et suffisante de stabilité  $L^p$  du schéma (3.42) est qu'il existe une constante  $\nu \geq 0$  telle que

$$\forall (\Delta t, h) \in \mathbf{S}, \quad \|\mathbf{S}_h(\Delta t)\|_{\mathcal{L}(L^p \times L^p)} \leq 1 + \nu \Delta t.$$

où  $\mathbf{S}_h(\Delta t)$  est donné par (3.46).

Pour la stabilité  $L^2$ , nous pouvons appliquer la méthode de Fourier-Von Neumann développée à la section 3.2.5 et si  $\hat{u}_h^n$  désigne la transformée de Fourier de  $u_h^n$ , on trouve

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad \hat{u}_h^{n+1}(k) = \hat{S}_h^1(k, \Delta t) \hat{u}_h^n(k) + \hat{S}_h^2(k, \Delta t) \hat{u}_h^{n-1}(k)$$

dont la solution générale est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad \hat{u}_h^n(k) = (\hat{r}_h^0(k, \Delta t))^n \hat{\alpha}_h^0(k) + (\hat{r}_h^1(k, \Delta t))^n \hat{\alpha}_h^1(k)$$

où pour tout  $k \in \mathbb{R}$ ,  $\widehat{r}_h^0(k, \Delta t)$  et  $\widehat{r}_h^1(k, \Delta t)$  sont solutions de l'équation caractéristique

$$r^2 = \widehat{S}_h^1(k, \Delta t)r + \widehat{S}_h^2(k, \Delta t)$$

En passant par la réécriture du schéma sous la forme d'un schéma d'ordre 1 avec une inconnue vectorielle, on montre que pour tout  $k$ ,  $\widehat{r}_h^0(k, \Delta t)$  et  $\widehat{r}_h^1(k, \Delta t)$  sont les valeurs propres de  $\widehat{\mathbf{S}}(k, \Delta t)$ . Nous pouvons donc réécrire la condition nécessaire et suffisante de stabilité  $L^2$  du schéma (3.42).

### Théoreme 3.26

On a

$$\forall \Delta t, \quad \|\mathbf{S}_h(\Delta t)\|_{\mathcal{L}(L^2 \times L^2)} = \max \left( \sup_{k \in \mathbb{R}} |\widehat{r}_h^0(k, \Delta t)|, \sup_{k \in \mathbb{R}} |\widehat{r}_h^1(k, \Delta t)| \right).$$

Ainsi la condition nécessaire et suffisante de stabilité  $L^2$  est

$$\exists \nu \geq 0, \forall (\Delta t, h) \in \mathbf{S}, \quad \sup_{k \in \mathbb{R}} |\widehat{r}_h^0(k, \Delta t)| \leq 1 + \nu \Delta t \quad \text{et} \quad \sup_{k \in \mathbb{R}} |\widehat{r}_h^1(k, \Delta t)| \leq 1 + \nu \Delta t.$$

## 3.5 Des caractéristiques à la stabilité $L^\infty$

### 3.5.1 Les schémas amont et Lax Friderichs

Reprenons une dernière fois l'équation de transport linéaire à coefficient constant (on suppose toujours  $c > 0$ ). D'après la méthodes des caractéristiques, nous savons que sur les points de la grille de discrétisation

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad u(x_j, t_n) = u(x_j - c\Delta t, t_{n-1}).$$

Le point  $\xi_j = x_j - c\Delta t$  ne tombe pas nécessairement sur un point de la grille, ainsi si nous voulions transporter la solution en  $t_n$  d'après la solution au temps précédent  $t_{n-1}$ , il nous faut approcher la valeur  $u(\xi_j, t_{n-1})$  à partir des valeurs  $(u(x_j, t_{n-1}))_{j \in \mathbb{Z}}$  aux points de la grille. Considérons alors une interpolation (ou une extrapolation) linéaire entre les valeurs aux points  $x_{j-1}$  et  $x_j$ . Rappelons qu'on parle d'*interpolation* si le point  $\xi_j$  est dans l'intervalle formé par les points  $x_k$  considérés, par exemple dans l'intervalle  $[x_{j-1}, x_j]$  ici - et d'*extrapolation* sinon. Puisque

$$\xi_j = x_j - c\Delta t = x_j - \alpha h = (1 - \alpha)x_j + \alpha x_{j-1},$$

nous approchons

$$u(\xi_j, t_n) \simeq (1 - \alpha)u_j^n + \alpha u_{j-1}^n.$$

Le schéma obtenu s'écrit

$$u_j^{n+1} = (1 - \alpha)u_j^n + \alpha u_{j-1}^n,$$

et on reconnaît le schéma décentré amont. Or la condition CFL de stabilité  $L^2$  que nous avons trouvé pour ce schéma est  $\alpha \leq 1$ . Ceci correspond exactement au cas où nous avons  $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ , c'est à dire que nous avons construit le schéma par interpolation des valeurs sur la caractéristique.

Inversement quand  $\alpha > 1$ , alors  $\xi_j \notin [x_{j-1}, x_j]$  et donc le schéma amont est instable car construit par extrapolation.

Considérons un deuxième exemple où nous interpolons (ou extrapolons) entre les valeurs aux points  $x_{j-1}$  et  $x_{j+1}$ . Nous considérons

$$\xi_j = x_j - c\Delta t = x_j - \alpha h = \frac{x_{j+1} + x_{j-1}}{2} - \alpha \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2} = \frac{1-\alpha}{2}x_{j+1} + \frac{1+\alpha}{2}x_{j-1},$$

tel que l'approximation de  $u$  soit cette fois

$$u(\xi_j, t_n) \simeq \frac{1-\alpha}{2}u_{j+1}^n + \frac{1+\alpha}{2}u_{j-1}^n.$$

Le schéma obtenu s'écrit alors

$$u_j^{n+1} = \frac{1-\alpha}{2}u_{j+1}^n + \frac{1+\alpha}{2}u_{j-1}^n,$$

et on reconnaît le schéma de Lax Friedrichs. La condition de stabilité est toujours  $\alpha \leq 1$ , qui correspond de nouveau à une interpolation  $\xi_j \in [x_{j-1}, x_{j+1}]$ . Inversement  $\alpha > 1$  correspondant à une extrapolation sur  $\xi_j \notin [x_{j-1}, x_{j+1}]$  et conduit à un schéma instable.

### 3.5.2 Stabilité $L^\infty$

La propriété d'interpolation que nous venons de voir permet de revisiter la condition de stabilité du schéma en norme  $L^\infty$ . Supposons qu'il existe  $u_{\min}$  et  $u_{\max}$  tels que

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad u_{\min} \leq u_j^n \leq u_{\max},$$

alors pour le schéma amont, comme pour tout barycentre avec des poids  $(\alpha, (1-\alpha)) \in [0, 1]^2$ , on déduit

$$u_{\min} \leq (1-\alpha)u_j^n + \alpha u_{j-1}^n \leq u_{\max}.$$

Le même raisonnement s'applique ici pour le schéma de Lax Friedrichs car  $(\frac{1-\alpha}{2}, \frac{1+\alpha}{2}) \in [0, 1]^2$ . On en déduit dans les deux cas

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad u_{\min} \leq u_j^{n+1} \leq u_{\max}.$$

On démontre donc par récurrence le théorème suivant

#### Théorème 3.27: Principe du maximum discret

La solution du schéma amont ou du schéma Lax Friedrichs vérifie pour

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{Z}, \quad \min_{j \in \mathbb{Z}} u_j^0 \leq u_j^n \leq \max_{j \in \mathbb{Z}} u_j^0.$$

Ces deux schéma sont donc stables en norme  $L^\infty$ .

### 3.5.3 Autres schémas par interpolation

Cette stratégie d'approximation de la solution au pied de la caractéristique par interpolation peut conduire à d'autres schémas d'intérêt. Par exemple, supposons une interpolation quadratique. Alors le polynôme quadratique  $\pi(x)$  passant par  $(x_{j-1}, u_{j-1})$ ,  $(x_j, u_j)$ ,  $(x_{j+1}, u_{j+1})$  s'écrit

$$\pi(x) = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2h^2}(x - x_j)^2 + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}(x - x_j) + u_j^n$$

Appliquer à  $\xi_j = x_{j-1} + (1 - \alpha)h$ , on obtient

$$u_j^{n+1} = \alpha^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2} - \alpha \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2} + u_j^n$$

soit le schéma

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2} - c \Delta t \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2h^2} = 0. \quad (3.47)$$

Ce schéma est connu sous le nom de schéma de Lax-Wendroff (voir l'exercice proposé sur ce schéma à la fin du chapitre).

Si cette fois l'interpolation quadratique a lieu entre  $x_{j-2}$ ,  $x_{j-1}$  et  $x_j$ , alors le polynôme d'approximation est

$$\pi(x) = \frac{u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{2\Delta x^2}(x - x_{j-1})^2 + \frac{u_j^n - u_{j-2}^n}{2\Delta x}(x - x_{j-1}) + u_{j-1}^n$$

Appliquer à  $\xi_j = x_{j-1} + (1 - \alpha)h$ , on a cette fois

$$u_j^{n+1} = (1 - \alpha)^2 \frac{u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{2} + (1 - \alpha) \frac{u_j^n - u_{j-2}^n}{2} + u_{j-1}^n.$$

connu sous le nom de schéma de Beam-Warming.

## 3.6 Dissipation et dispersion numérique

### 3.6.1 Notion de dissipation et dispersion

On rappelle que la solution  $u$  de l'équation de transport peut s'écrire en fonction de  $u^0$  :

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}^0(k) e^{i(x-ct)k} dk$$

Ceci montre que l'équation de transport n'est ni **dissipative**, les ondes planes  $e^{ikx}$  ne sont pas atténuées au cours du temps, et ni **dispersive**, les ondes planes  $e^{ikx}$  se propagent toutes à la même vitesse  $c$ .

Notons que ceci est particulier à l'équation de transport. Ainsi si on considère l'équation d'advection diffusion

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

sa solution peut s'écrire (en utilisant la transformée de Fourier) à partir de sa condition initiale  $v^0$

$$v(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{v}^0(k) e^{-\varepsilon k^2 t} e^{i(x-ct)k} dk.$$

Cette équation est donc **dissipative** (les ondes planes  $e^{ikx}$  sont atténuées au cours du temps, le coefficient d'atténuation  $e^{-\varepsilon k^2 t}$  dépend de  $k$ ) mais elle n'est pas **dispersive**.

Enfin, si on considère l'équation dite de Korteweg-De Vries (KDV)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + c \frac{\partial w}{\partial x} + B \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

sa solution peut s'écrire (en utilisant la transformée de Fourier) à partir de sa condition initiale  $w^0$

$$w(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{w}^0(k) e^{i(x-(c-Bk^2)t)k} dk.$$

Cette équation est donc **dispersive** (les ondes planes  $e^{ikx}$  ne se déplacent pas toutes à la même vitesse, la différence avec  $c$  dépend de  $k$ ) mais elle n'est pas **dissipative**.

### 3.6.2 Dissipation et dispersion numérique

Concentrons nous sur les schémas à un pas de temps. Ils s'écrivent tous sous la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_h^{n+1} = S_h(\Delta t) u_h^n \quad (3.48)$$

qui après application de la transformée de Fourier et résolution de la relation de récurrence donne

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad \hat{u}_h^n = \left( \hat{S}_h(k, \Delta t) \right)^n \hat{u}_h^0(k).$$

Si on écrit

$$\hat{S}_h(k, \Delta t) = e^{-a_h(k, \Delta t) \Delta t} e^{-c_h(k, \Delta t) \xi \Delta t},$$

la solution du schéma s'écrit

$$u_h(x, t^n) = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}^0(k) e^{-a_h(k, \Delta t) t^n} e^{i(x-c_h(k, \Delta t) t^n)k} dk.$$

Ainsi  $a_h(k, \Delta t)$  (qui est homogène à l'inverse d'un temps) donne une indication sur la dissipation du schéma : si  $a_h(k, \Delta t) = 0$  pour tout  $k$ , alors le schéma n'est pas dissipatif, sinon il l'est. De plus  $c_h(k, \Delta t)$  (qui est homogène à une vitesse) donne une indication sur la dispersion du schéma : si  $c_h(k, \Delta t) = c$  pour tout  $k$ , alors le schéma n'est pas dispersif.

## Définition 3.28: Dissipation et dispersion numérique

Supposons que le schéma soit à un pas de temps, donné par (3.48) et qu'il soit stable. On appelle **dissipation numérique** la quantité

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad a_h(k, \Delta t) := -\frac{1}{\Delta t} \ln |\widehat{S}_h(k, \Delta t)|$$

et **dispersion numérique** la quantité

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad c_h(k, \Delta t) := -\frac{1}{k\Delta t} \text{Arg} \widehat{S}_h(k, \Delta t)$$

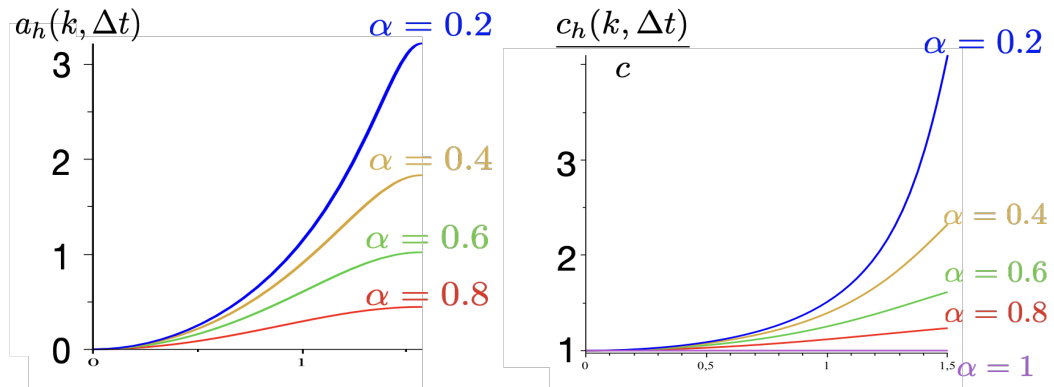


FIGURE 3.13 – Représentation de la dissipation (à gauche) et de la dispersion numérique (à droite) du schéma de Lax-Friedrichs pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

## Dissipation et dispersion pour le schéma de Lax-Friedrichs

Pour le schéma de Lax-Friedrichs donné par (3.32), pour lequel le coefficient d'amplification est donné par (3.38), la dissipation numérique est

$$a_h(k, \Delta t) := -\frac{1}{2\Delta t} \ln[1 - (1 - \alpha^2) \sin^2(kh)]$$

où on rappelle que  $\alpha = c\Delta t/h$  est le coefficient CFL. On retrouve la condition de stabilité :  $a_h(k, \Delta t) > 0$  si  $\alpha < 1$ . On déduit qu'à  $k$  fixé

$$a_h(k, \Delta t) \sim \frac{1 - \alpha^2}{2\alpha} chk^2.$$

$a_h$  est donc d'ordre 1. De plus, la dispersion numérique est donnée par

$$c_h(k, \Delta t) := \frac{c}{\alpha kh} \text{Arctg}[\alpha \tan(kh)]$$

On déduit qu'à  $k$  fixé

$$\frac{c_h(k, \Delta t)}{c} \sim 1 + \frac{1}{3}(1 - \alpha^2)k^2h^2.$$



$c_h - c$  est donc d'ordre 2. De plus quand  $\alpha \leq 1$ , on a  $c_h > c$ , donc la solution calculée sera toujours en avance devant la solution exacte.

Le schéma de Lax Friedrichs est donc principalement **dissipatif**.

### 3.6.3 Equation équivalente

Le comportement pratique d'un schéma peut s'analyser en étudiant le terme dominant dans l'erreur de consistance.

#### Définition 3.29: Equation équivalente

On appelle équation équivalente d'un schéma, l'équation obtenue en ajoutant au modèle le terme dominant de l'erreur de consistance jusqu'à un certain ordre.

L'équation équivalente ne remplace pas le calcul des dissipation et dispersion numérique mais elle donne des indications qualitatives.

En général, en utilisant l'équation, on peut réécrire le terme dominant qu'avec des dérivées en espace. Suivant que l'équation équivalente est de type advection-diffusion ou de type KDV, on déduit si le schéma est principalement dissipatif ou dispersif.

#### Equation équivalente du schéma de Lax-Friedrichs

Pour le schéma de Lax-Friedrichs donné par (3.32), l'erreur de troncature est donnée par (3.34)

$$\varepsilon_j^n = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n + c \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^n - \frac{ch}{2\alpha} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^2).$$

En utilisant que  $u$  est solution de l'équation de transport et donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

on trouve

$$\varepsilon_j^n = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n + c \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n - \frac{ch(1-\alpha^2)}{2\alpha} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^2).$$

L'équation équivalente est donc

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{ch(1-\alpha^2)}{2\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

elle est de type advection diffusion. Donc on retrouve que le schéma est dissipatif et on retrouve également le comportement du coefficient d'amplification pour  $h$  petit.

$$a_h(k, \Delta t) \sim \frac{1-\alpha^2}{2\alpha} chk^2.$$

### 3.7 Le schéma saute-mouton pour l'équation des ondes

Nous considérons ici l'équation des ondes sur  $\mathbb{R}$  à vitesse constante  $c$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \text{pour } t \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ u(t=0, x) = u^0(x), & \text{pour } x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t=0, x) = u^1(x), & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.49)$$

Nous discrétisons toujours l'espace avec un pas  $h$  et le temps avec  $\Delta t > 0$  et cherchons toujours à calculer l'inconnue discrète  $u^n = (u_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$  à chaque pas de temps.

#### 3.7.1 Présentation du schéma

Le schéma saute-mouton est un schéma explicite centré :

$$\forall n, \forall j, \quad \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0. \quad (3.50)$$

La première remarque fondamentale sur le plan pratique, est que, son caractère explicite permet une mise en oeuvre peut couteuse en résolvant simplement :

$$u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + \alpha^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n),$$

où le nombre sans dimension :

$$\alpha = \frac{c\Delta t}{h},$$

mesure le rapport entre la distance parcourue par l'onde pendant le temps  $\Delta t$  (soit  $c\Delta t$ ) et la taille de la maille en espace  $h$ . Nous verrons un peu plus loin que, comme pour l'équation d'advection, cette quantité est liée à la condition CFL des schémas introduits.

Bien entendu pour pouvoir déterminer complètement la solution discrète, il faut la connaître aux deux premiers instants. C'est pour la détermination de la solution aux deux premiers instants que vont intervenir les conditions initiales. Les difficultés qui en découlent sont caractéristiques de l'équation des ondes qui est d'ordre 2 en espace et en temps.

#### 3.7.2 Le schéma de démarrage : choix des conditions initiales approchées

Pour le problème continu, les données initiales sont définies par les valeurs de la solution à  $t = 0$ , ainsi que celles de sa dérivée en temps au même instant.

Pour le problème discrétisé, pour déterminer  $u_h^0$  et  $u_h^1$  on doit approcher  $u(x_j, 0)$  et  $u(x_j, \Delta t)$ .

Pour  $u_h^0$ , il est naturel de choisir

$$\forall j, \quad u_j^0 = u^0(x_j). \quad (3.51)$$

Pour approcher  $u(x_j, \Delta t)$ , on utilise simplement un développement de Taylor au premier ordre

$$u(x_j, \Delta t) = u(x_j, 0) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, 0) + \mathcal{O}(\Delta t^2),$$

ce qui mène à l'approximation

$$\forall j, \quad u_j^1 = u^0(x_j) + \Delta t u^1(x_j).$$

Nous verrons que la précision d'un tel schéma de démarrage est insuffisante. Pour en avoir l'intuition, il suffit de remarquer que ce choix correspond à une approximation d'ordre 1 en temps de la condition initiale

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u^1(x).$$

Ainsi cette dernière équation se réécrit

$$\forall j, \quad \frac{u_j^1 - u_j^0}{\Delta t} = u^1(x_j),$$

où le terme de gauche peut être vue comme une approximation décentrée (donc d'ordre 1) de la dérivée en temps de la solution à l'instant  $t = 0$ .

Pour avoir un schéma de démarrage d'ordre 2 en temps (plus cohérent avec l'ordre du schéma (3.50) qui, comme on le verra plus loin, est égal à 2), il suffit de pousser le développement de Taylor un cran plus loin

$$u(x_j, \Delta t) = u^0(x_j) + \Delta t u^1(x_j) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, 0) + \mathcal{O}(\Delta t^3),$$

et, comme on ne dispose pas de la dérivée seconde de la solution en tant que donnée initiale, d'utiliser l'équation des ondes écrite à l'instant  $t = 0$  pour en déduire que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, 0) = c^2 \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2}(x),$$

ce qui mène au schéma de démarrage

$$\forall j, \quad u_j^1 = u_j^0 + \Delta t u^1(x_j) + \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \frac{u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0}{h^2}. \quad (3.52)$$

Le schéma numérique est donc complètement défini par (3.50), (3.51) et (3.52).

### 3.7.3 Ordre du schéma : consistance et erreur de troncature

De la même façon que dans la définition 3.2, l'erreur de troncature du schéma (3.50) est donnée par

$$\varepsilon_j^n = \frac{U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2}.$$

où  $U_j^n$  est définie par  $U_j^n = u(x_j, t^n)$ ,  $u$  étant une solution régulière de (3.49).

On peut alors montrer le théorème suivant.

**Théoreme 3.30**

Le schéma (3.50) est consistant à l'ordre 2 en temps et en espace :

$$\varepsilon_j^n = \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^2).$$

**DÉMONSTRATION:** Il suffit d'utiliser l'opérateur d'approximation de la dérivée seconde donnée dans (3.2).

■

### 3.7.4 Analyse de stabilité $L^2$ par techniques énergétiques

Comme nous l'avons vu pour d'autres types d'équation, la stabilité d'un schéma (dans une certaine norme) est un préalable incontournable à sa convergence (dans cette même norme). Nous allons mener cette analyse dans le cadre le plus adapté à l'équation des ondes qui est le cadre  $L^2$  du fait de la périodicité des solutions de l'équation des ondes. Ayant déjà étudié la méthode de Fourier-Von Neumann pour l'équation d'advection, nous allons ici utiliser une autre méthode fondée sur une propriété fondamentale de l'équation des ondes : la conservation de l'énergie.

#### 3.7.4.1 Un résultat de conservation d'énergie discrète

Il est assez naturel de se demander si le schéma utilisé satisfait une relation de conservation équivalente à la conservation d'énergie pour la solution du problème continu. En effet, nous avons vu au théorème 1.24 que l'équation des ondes vérifie pour tout  $t > 0$ ,

$$E(t) = E(0) \quad \text{avec} \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right|^2 dx + \frac{c^2}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right|^2 dx.$$

Introduisons alors l'énergie discrète (à l'instant  $t^{n+\frac{1}{2}} = n + \frac{1}{2}\Delta t$ ) :

$$E^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{1}{2} a_h(u_h^{n+1}, u_h^n), \quad n \geq 1, \quad (3.53)$$

avec

$$a_h(u, v) = c^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left( \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right) \left( \frac{v_{j+1} - v_j}{h} \right).$$

et où  $u_h^n$ , définie sur  $(0, 1)$  est la version « continue en espace » de la solution discrète, en reprenant les notations de la section 3.2.

En remarquant que  $a_h(u, v)$  est un équivalent discret de

$$c^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx,$$

on voit que la quantité (3.53) peut être vu comme une approximation de l'énergie  $E(t^{n+\frac{1}{2}})$  où l'on a remplacé le produit scalaire  $L^2(\mathbb{R})$  sur la variable d'espace par le produit scalaire  $\ell^2$  sur le vecteur  $(u_j^n)_j$  :

$$\|u_h^n\|_{\ell^2}^2 = \langle u_h^n, u_h^n \rangle_{\ell^2} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (u_j^n)^2.$$

Autrement dit

$$E_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left\| \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} \right\|_{\ell^2}^2 + \frac{1}{2} a_h(u_h^{n+1}, u_h^n).$$

### Théoreme 3.31

Si la suite  $(u_j^n)_j$  est solution du schéma saute-mouton (3.50), l'énergie discrète  $E_h^{n+\frac{1}{2}}$  se conserve au cours du temps :

$$E_h^{n+\frac{1}{2}} = E_h^{n-\frac{1}{2}}, \quad \forall n \geq 1.$$

**PREUVE:** Nous laissons les détails de la démonstration au lecteur pour nous concentrer sur les principes de la démonstration.

Rappelons que la conservation de l'énergie continue  $E(t)$  s'obtient en multipliant l'équation des ondes par  $\frac{\partial u}{\partial t}$  et en intégrant le résultat en espace. Nous procédons de manière équivalente au niveau discret en multipliant par

$$\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{2\Delta t}.$$

Or on observe l'apparition d'identités remarquables

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2}, \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{2\Delta t} \right\rangle_{\ell^2} &= \frac{1}{2\Delta t} \left( \left\| \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} \right\|_{\ell^2}^2 - \left\| \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t} \right\|_{\ell^2}^2 \right), \\ \left\langle \frac{u_h^n - 2u_h^n + u_h^n}{h^2}, \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{2\Delta t} \right\rangle_{\ell^2} &= \frac{1}{\Delta t} (a_h(u_h^{n+1}, u_h^n) - a_h(u_h^n, u_h^{n-1})). \end{aligned}$$

Ceci conduit bien en additionnant ces deux relations à

$$\frac{1}{2\Delta t} (E_h^{n+1/2} - E_h^{n-1/2}) = 0,$$

c'est à dire le résultat annoncé. ■

#### 3.7.4.2 Principe de la stabilité à partir de la conservation d'énergie

Une fois cette conservation établie il nous faut maintenant l'utiliser pour assurer un résultat de stabilité de type

$$\|u_h^n\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|u_h^0\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Le problème majeur dans l'étude discrète est que l'énergie discrète n'est pas nécessairement une quantité positive dû au terme

$$a_h(u_h^{n+1}, u_h^n).$$

Ainsi même si l'énergie se conserve on ne peut pas être sûr qu'on conserve une norme sur  $u_h^n$ . Toutefois si le pas de temps est suffisamment petit (nous voyons apparaître ici une condition de type CFL),  $u_h^{n+1}$  sera proche de  $u_h^n$  et  $a_h(u_h^{n+1}, u_h^n)$  sera donc presque un carré. Dans ce cas, on pourra obtenir une forme « d'équivalence de norme » qui permettra de relier la stabilité de la norme  $L^2(\mathbb{R})$  à celle de l'énergie.

On obtient alors le théorème suivant que nous admettrons

**Théorème 3.32: Admis**

Soit  $u_h^n$  la solution discrète. Si la solution du problème est assez régulière alors

$$\alpha = \frac{c\Delta t}{h} < 1 \implies \forall T > 0 \lim_{\Delta t, h \rightarrow 0} \sup_{t^n \leq T} \|e_h^n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$$

avec  $e_h^n = u_h^n - u(t^n, \cdot)$  l'erreur commise sur la solution. Plus précisément, on montre que si on pose l'énergie discrète de l'erreur

$$E_h^{n+1/2}(e_h^n) = \frac{1}{2} \left\| \frac{e_h^{n+1} - e_h^n}{\Delta t} \right\|_{\ell^2}^2 + \frac{1}{2} a_h(e_h^{n+1}, e_h^n)$$

alors

$$E_h^{n+1/2}(e_h^n) > 0$$

et

$$\sqrt{E_h^{n+1/2}(e_h^n)} \leq \sqrt{E^{1/2}(e^0)} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1-\alpha^2}} \Delta t \sum_{k=1}^n \|\varepsilon_h^k\|_{\ell^2}$$

où  $\Delta t \sum_{k=1}^n \|\varepsilon_h^k\|_{\ell^2}$  est l'erreur de troncature du schéma sommée à chaque pas de temps.

Nous n'entrons pas dans les détails de la démonstration car notre objectif était simplement de montrer que l'écriture d'un schéma numérique, où les identités remarquables permettent d'écrire une énergie discrète, sont un outil extrêmement puissant pour l'obtention d'un schéma stable.

### 3.8 Exercices

**Exercice 1 (Schémas numériques pour l'équation de transport.)** On s'intéresse ici à la résolution numérique de l'équation de transport :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.54)$$

On rappelle que la solution de cette équation est donnée par  $u(x, t) = u^0(x - ct)$

On considère les schémas aux différences finies suivants :

$$\text{Schéma 1.} \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0 \quad (3.55)$$

$$\text{Schéma 2.} \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0 \quad (3.56)$$

$$\text{Schéma 3.} \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0, \quad (3.57)$$

$$\text{Schéma 4.} \quad \frac{1}{2} \left( \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right) + \frac{c}{2} \left( \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} + \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} \right) = 0. \quad (3.58)$$

**Question :** Pour chacun de ces schémas, répondre aux questions suivantes :

- Est-ce un schéma explicite ou implicite ? Quelle est sa vitesse de propagation numérique ?
- Est-ce un schéma consistant pour l'équation de (3.54) ? Quel est l'ordre de consistance ?
- Etudier la stabilité  $L^2$  par la méthode de Fourier.
- Quelles sont les difficultés spécifiques à l'utilisation pratique de chacun des schémas.

**Exercice 2 (Le schéma de Lax-Wendroff pour l'équation de transport)** Soit  $u$  une solution régulière de l'équation de transport (la vitesse  $c$ , constante, est supposée strictement positive) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.59)$$

**Question 1.** Montrer que

$$\begin{cases} u(x_j, t^{n+1}) = u(x_j, t^n) - c\Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) \\ \quad - \frac{c^3 \Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t^n) + \frac{c^4 \Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t^n) + \mathcal{O}(\Delta t^5). \end{cases} \quad (3.60)$$

Nous proposons la famille de schémas suivante (dépendant du paramètre  $\mu$ ) pour la résolution numérique de l'équation du transport :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{c}{2h} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{\mu \Delta t}{h^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) = 0. \quad (3.61)$$

Obtenir la valeur de  $\mu$  pour laquelle la méthode est consistante, au moins, à l'ordre deux. Nous appellerons le schéma ainsi obtenu le schéma de Lax-Wendroff. Discuter la précision du schéma lorsque  $c \Delta t = h$ .

**Question 2.** Donner une équation équivalente du schéma de Lax-Wendroff à partir du terme prépondérant de l'erreur de consistance, équation dont les coefficients seront exprimés en fonction de  $c$ ,  $h$  et  $\alpha := c\Delta t/h$  (nombre CFL). Le schéma sera-t-il principalement dissipatif ou dispersif ?

**Question 3.** Calculer le coefficient d'amplification du schéma de Lax-Wendroff et en déduire sa stabilité sous condition CFL.

**Question 4.** Exprimer  $a_h(\xi, \Delta t)$  ( qui quantifie la dissipation numérique) et  $c_h(\xi, \Delta t)$  ( qui quantifie la dispersion numérique) en fonction du coefficient d'amplification  $\hat{S}_h(\xi, \Delta t)$ .

**Question 5.** Déterminer l'équivalent des quantités

$$a_h(\xi, \Delta t) \quad \text{et} \quad \varepsilon_{c,h}(\xi, \Delta t) = c - c_h(\xi, \Delta t).$$

pour  $h$  petit et  $\alpha$  constant. Commenter.

**Exercice 3 (Un schéma pour l'équation des ondes.)** On s'intéresse à l'approximation de l'équation des ondes 1D :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (3.62)$$



On rappelle que, pour toute fonction  $u$  suffisamment régulière :

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = \frac{d^2u}{dx^2}(x) + \frac{h^2}{12} \frac{d^4u}{dx^4}(x) + O(h^4) \quad (3.63)$$

On introduit l'opérateur aux différences finies :

$$A_h^1 u(x) = -c^2 \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

et on considère le schéma numérique, appelé **schéma saute-mouton**

$$\frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + A_h^1 u_h^n = 0 \quad (3.64)$$

**Question 1.** Expliquer sans calculs pourquoi ce schéma est consistant. Étudier la vitesse de propagation numérique et en déduire une condition nécessaire de convergence du schéma.

**Question 2.** Déterminer le symbole de  $A_h^1$ , c'est à dire la fonction  $\hat{A}_h^1(\xi)$  telle que :

$$\mathcal{F}(A_h^1 u)(\xi) = \hat{A}_h^1(\xi) \mathcal{F}u(\xi)$$

(on exprimera  $\hat{A}_h^1(\xi)$  uniquement à l'aide de  $\sin^2(\xi h/2)$ ).

**Question 3.** Par la méthode de Fourier, déterminer la condition de stabilité  $L^2$  du schéma (3.64). Commenter.

Nous cherchons maintenant à construire un schéma plus précis à partir d'une combinaison linéaire de deux schémas saute-mouton définis sur deux grilles différentes (une de pas  $h$ , une de pas  $2h$ ).

Ainsi, étant donné  $\gamma \in \mathbb{R}$ , on introduit l'opérateur aux différences finies :

$$A_h^\gamma u(x) = -\gamma c^2 \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - (1-\gamma) c^2 \frac{u(x+2h) - 2u(x) + u(x-2h)}{4h^2},$$

et on considère le schéma numérique

$$\frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + A_h^\gamma u_h^n = 0 \quad (3.65)$$

**Question 4.** Expliquer sans calculs pourquoi ce schéma est consistant quel que soit  $\gamma$ . Étudier la vitesse de propagation numérique et en déduire une condition nécessaire de convergence du schéma.

**Question 5.** Déterminer la valeur  $\gamma_0$  de  $\gamma$  pour laquelle, pour toute fonction  $u(x)$  suffisamment régulière :

$$A_h^\gamma u(x) = -c^2 \frac{d^2 u}{dx^2}(x) + O(h^4).$$

**Question 6.** Calculer le symbole  $\hat{A}_h^\gamma(\xi)$  de  $A_h^\gamma$  uniquement à l'aide de  $\sin^2(\xi h/2)$ .

Montrer que  $\hat{A}_h^\gamma(\xi) \geq 0$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$  si et seulement si  $\gamma \geq 0$ .

**Question 7.** Par la méthode de Fourier, déterminer la condition de stabilité  $L^2$  du schéma (3.65), pour tout  $\gamma$  et en particulier pour  $\gamma_0$ . Commenter.

**Exercice 4 (Étude du schéma de Newmark par méthode énergétique)**

Soit  $u$  la solution de l'équation des ondes 1D :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \end{cases} \quad (3.66)$$

**Question 1.** Démontrer que pour toutes conditions initiales  $u_0$  et  $v_0$  à support compact, l'énergie

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} c^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx$$

se conserve au cours du temps.

**Question 2.** Écrire l'équation vérifiée par le couple  $(u, v) = \left( u, \frac{\partial u}{\partial t} \right)$ .

**Question 3.** On étudie le schéma de Newmark défini par

$$\begin{aligned} (a) \quad & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{v_j^n + v_j^{n+1}}{2} = 0 \\ (b) \quad & \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \left( A_h \left( \frac{u_h^{n+1} + u_h^n}{2} \right) \right)_j = 0 \end{aligned} \quad (3.67)$$

où  $A_h$  est l'opérateur aux différences finies défini par

$$\forall w_h = (w_j)_j \in \ell^2(\mathbb{Z}), \quad (A_h w_h)_j = -\frac{c^2}{h} \left( \frac{w_{j+1} - w_j}{h} - \frac{w_j - w_{j-1}}{h} \right).$$

Montrer que ce schéma est équivalent au suivant

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} + \left( A_h \left( \frac{u_h^{n+1} + 2u_h^n + u_h^{n-1}}{4} \right) \right)_j = 0, \quad (3.68)$$

**Question 4.** Soit  $(u, v)$ , une solution régulière du système obtenu à la question 2. Nous posons

$$U_j^n = u(jh, n\Delta t), \quad V_j^n = v(jh, n\Delta t)$$

L'idée est de voir les équations comme centrées au point  $x_j$  et à l'instant  $t^{n+\frac{1}{2}}$  et de contrôler les deux erreurs de troncature

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^{n+\frac{1}{2}} &:= \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} - \frac{V_j^n + V_j^{n+1}}{2}, \\ \eta_j^{n+\frac{1}{2}} &:= \frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\Delta t} - \frac{c^2}{2} \left( \frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} \right). \end{aligned}$$

Montrer que ce schéma est consistant. Quel est son ordre ?

**Question 5.** On munit l'espace  $\ell^2(\mathbb{Z})$  du produit scalaire

$$(u_h, v_h) := \sum_j u_j v_j h$$

et on notera  $\|\cdot\|$  la norme associée. Démontrer que  $A_h$  est un opérateur symétrique et positif dans  $\ell^2(\mathbb{Z})$ , c'est à dire

$$\forall (v_h, w_h) \in \ell^2(\mathbb{Z})^2, \quad (v_h, A_h w_h) = (A_h v_h, w_h), \quad (A_h v_h, v_h) \geq 0.$$

**Question 6.** En déduire que toute solution de (3.67) satisfait

$$\forall n \geq 0, \quad \mathcal{E}^{n+1} = \mathcal{E}^n, \quad \text{où} \quad \mathcal{E}^n = \frac{1}{2} \|v_h^n\|^2 + \frac{1}{2} (u_h^n, A_h u_h^n).$$

**Question 7.** Conclure sur la stabilité  $L^2$  du schéma, en montrant les estimations

$$\forall n \geq 0, \quad \|v_h^n\| \leq \sqrt{2\mathcal{E}_0}, \quad \|u_h^n\| \leq \|u_h^0\| + t^n \sqrt{2\mathcal{E}_0}, \quad t^n := n\Delta t \quad (3.69)$$

---

# Discrétisation des équations hyperboliques non linéaires 1D

## 4.1 Présentation du problème

Ce chapitre est consacré à l'approximation numérique par différences finies du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $f$  est une fonction strictement convexe (par exemple,  $f(u) = \frac{u^2}{2}$  pour l'équation de Burgers).

L'approximation du problème (4.1) est beaucoup plus délicate que celle du problème linéaire étudié au chapitre précédent. En effet, il faut cette fois approcher la solution faible du problème : pour cela, le schéma doit être consistant avec l'équation sous **forme conservative**. Mais il faut aussi s'assurer que le schéma est **entropique**, c'est-à-dire qu'il fournit une approximation de l'unique solution entropique du problème. Nous présentons divers contre-exemples. De plus, dans le cas non-linéaire, il n'existe pas d'équivalent au théorème de Lax : autrement dit, un schéma consistant et stable ne converge pas nécessairement. Nous étudions enfin la classe importante des **schémas monotones**. Un exemple fondamental est donné par le **schéma de Godunov** qui repose sur la résolution de problèmes de Riemann locaux. On démontre que les schémas monotones sont stables, convergents et entropiques. Mais ils ne sont que d'ordre 1. Quelques perspectives sont finalement présentées, pour parer à cet inconvénient.

On se donne un pas de discrétisation en espace  $h > 0$  et un pas de discrétisation en temps  $\Delta t > 0$ . On pose :

$$\begin{cases} x_j &= jh, \quad j \in \mathbb{Z}, \\ t^n &= n\Delta t, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

et on se propose de calculer une approximation  $u_j^n$  de  $u(x_j, t^n)$ <sup>1</sup> où  $u$  est la solution de (4.1).

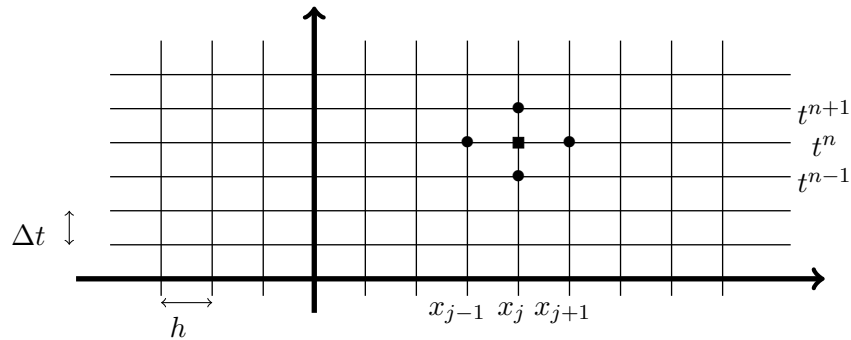


FIGURE 4.1 – Grille espace temps

Dans toute la suite, nous nous intéressons à des schémas explicites à un pas de temps et à trois pas d'espace qui s'écrivent

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n), \quad (4.2)$$

où  $H$  est une fonction régulière. Les schémas implicites sont difficiles à mettre en oeuvre pour les problèmes non-linéaires et nous n'en parlerons pas ici.

#### Exemple : le schéma décentré

Le schéma décentré est donné par

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t \frac{f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n)}{h} & \text{si } a(u_j^n) \geq 0 \\ u_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t \frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)}{h} & \text{si } a(u_j^n) < 0 \end{cases}$$

Il s'écrit donc sous la forme (4.2) avec

$$H(u, v, w) := \begin{cases} v - \Delta t \frac{f(v) - f(u)}{h} & \text{si } a(v) \geq 0 \\ v - \Delta t \frac{f(w) - f(v)}{h} & \text{si } a(v) < 0 \end{cases}$$

Nous représentons dans la figure 4.3 la solution faible entropique (en rouge) pour  $f(u) = u + u^2/2$  et  $u^0(x) = \sin x$  et la solution obtenue avec le schéma décentré (en bleu). Notons que pour cette donnée initiale, la solution est classique jusqu'à un certain temps, où une discontinuité apparaît. Cette discontinuité se propage ensuite à une vitesse donnée par la relation de Rankine Hugoniot. C'est la solution faible entropique car les chocs sont descendants (le flux étant convexe).

1. ou plutôt une approximation de  $\frac{1}{h} \int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} u(x, t^n) dx$  si l'on considère une approche par volumes finis (cf. section 4.2.1)

On remarque donc qu'alors que le schéma décentré est convergent dans le cas linéaire (quand la condition CFL est satisfaite), ce n'est pas le cas dans le cas non linéaire. Plus précisément, ce schéma permet de bien approcher la solution quand elle est classique (avec donnée initiale régulière) mais il ne l'approche plus quand la solution a une discontinuité. Notons enfin que ce schéma ne permet même pas d'approcher une solution faible puisque dans la solution discrète obtenue le choc a une vitesse nulle donc la relation de Rankine Hugoniot n'est pas satisfaite.

Pour finir de se convaincre que ce schéma ne permet pas d'approcher une solution faible, appliquons ce schéma à la donnée initiale suivante :

$$u_j^0 = \begin{cases} u_g & \text{si } j \leq 0 \\ u_d & \text{si } j > 0 \end{cases}$$

où  $u_g$  et  $u_d$  sont tels que  $a(u_g) \geq 0$  et  $a(u_d) \leq 0$ , on obtient une solution stationnaire :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_j^n = u_j^0$$

qui n'est pas, en général, une solution faible de l'équation.

Cet exemple permet d'illustrer que pour les EDPs non linéaires, d'autres propriétés sont nécessaires pour qu'un schéma converge vers la solution faible entropique du problème.

## 4.2 Propriétés des schémas

### 4.2.1 Schémas sous forme conservative

Nous avons vu que la forme conservative :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \tag{4.3}$$

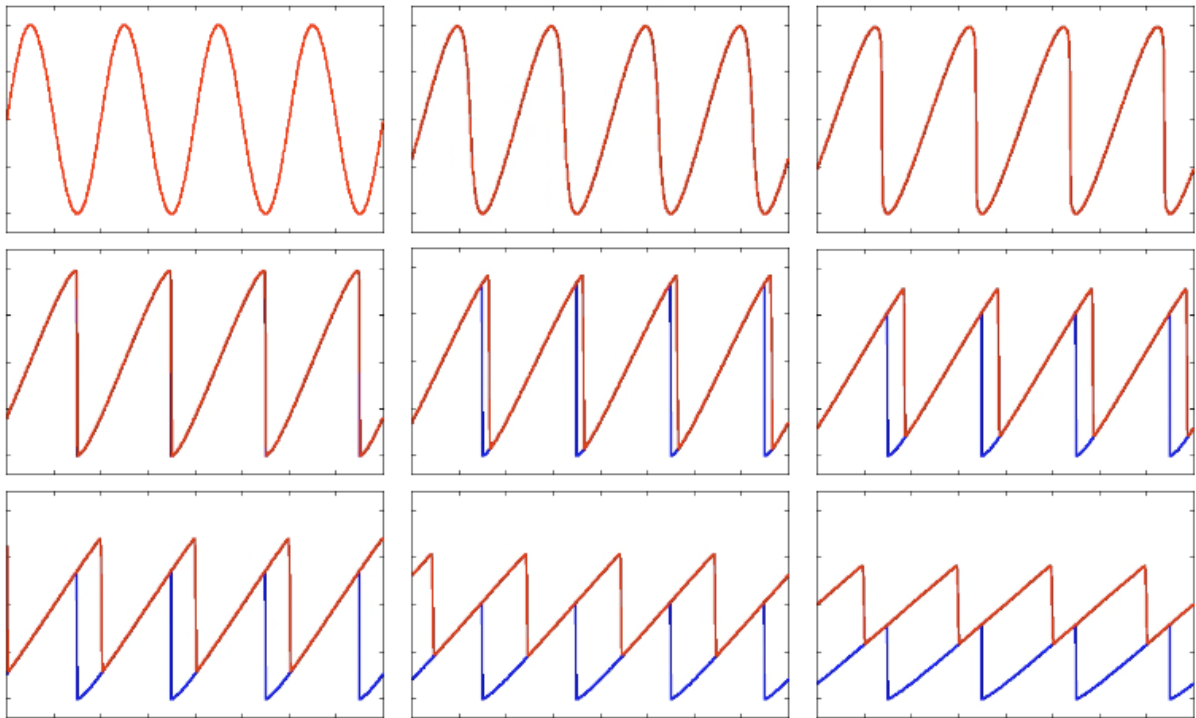
et la forme non conservative :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

des lois de conservation ne sont équivalentes que pour les solutions  $u$  régulières du problème et que la notion de solution faible repose sur la forme conservative de l'équation. On suit le même principe pour le calcul numérique d'une solution faible ; on utilisera un schéma « sous forme conservative ».

Le principe de base des schémas conservatifs est la méthode des volumes finis qui vise à trouver une approximation de

$$u_j(t) = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, t) dx$$



**FIGURE 4.2** – Représentation à différents instants de la solution faible entropique (en rouge) et de la solution calculée avec le schéma décentré (en bleu) dans le cas où  $f(u) = u + u^2/2$  et  $u^0(x) = \sin x$

à tous les temps  $t = t^n$  où  $x_{j\pm\frac{1}{2}} = x_j \pm \frac{h}{2}$ . Pour cela, on intègre tout d'abord l'équation (4.3) entre  $x_{j-\frac{1}{2}}$  et  $x_{j+\frac{1}{2}}$  (et on divise par  $h$ ),

$$\frac{d}{dt}u_j(t) + \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} f(u) dx = 0$$

ou de manière équivalente

$$\frac{d}{dt}u_j(t) + \frac{f(u(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) - f(u(x_{j-\frac{1}{2}}, t))}{h} = 0. \quad (4.4)$$

Le schéma numérique conservatif est une approximation de l'équation (4.4) : on approche la quantité  $f(u(x_{j+\frac{1}{2}}, t))$  (resp.  $f(u(x_{j-\frac{1}{2}}, t))$ ) en utilisant les  $u_l(t)$ . Un choix naturel consiste à prendre  $f(u(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) \approx g(u_j(t), u_{j+1}(t))$  et  $f(u(x_{j-\frac{1}{2}}, t)) \approx g(u_{j-1}(t), u_j(t))$  où  $g$  est le flux numérique qu'il faut alors définir. Après une discrétisation en temps explicite, on obtient le schéma (4.5).

**Définition 4.1: Schéma conservatif**

On dit que le schéma (4.2) est conservatif ou peut se mettre sous forme conservative s'il existe une fonction  $g$  régulière telle que l'on ait :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{h} \{g(u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-1}^n, u_j^n)\} \quad (4.5)$$

La fonction  $g$  est appelée le flux numérique du schéma (elle est définie à une constante additive près).

On utilisera souvent la notation abrégée suivante

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha \left( g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{\Delta t}{h} \quad \text{et} \quad g_{j+\frac{1}{2}}^n = g(u_j^n, u_{j+1}^n).$$

L'importance de la forme conservative pour un schéma sera illustrée par le théorème de Lax-Wendroff (voir le théorème 4.7) énoncé plus loin. Mais avant tout, il nous faut préciser sous quelle condition, portant sur le flux numérique, un schéma sous forme conservative est consistant avec l'équation (4.3).

**4.2.2 Consistance**

Les notions d'erreur de troncature, de consistance et d'ordre sont définies comme dans le cas linéaire. L'erreur de troncature du schéma (4.5) s'écrit

$$\varepsilon_j^n = \frac{1}{\Delta t} \left( U_j^{n+1} - U_j^n \right) + \frac{1}{h} \left( G_{j+\frac{1}{2}}^n - G_{j-\frac{1}{2}}^n \right),$$

où

$$\begin{cases} U_j^n & = u(x_j, t^n). \\ G_{j+\frac{1}{2}}^n & = g(U_j^n, U_{j+1}^n), \end{cases}$$

et  $u$  est la solution régulière de l'équation (4.3).

Remarquons en particulier que l'erreur de troncature se calcule à l'aide de solutions **régulières** de l'équation (4.3). Ces notions n'auront donc pas de sens au voisinage des chocs.

**Lemme 4.2: Condition de consistance**

Un schéma mis sous la forme conservative (4.5) est consistant avec l'équation (4.3) si et seulement si :

$$g(u, u) = f(u) + cte \quad \forall u \in \mathbb{R}. \quad (4.6)$$

Il est alors au moins d'ordre 1.

**DÉMONSTRATION:** Soit un schéma de la forme :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{h} \left( g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n \right).$$



Calculons son erreur de troncature

$$\varepsilon_j^n = \frac{1}{\Delta t} (U_j^{n+1} - U_j^n) + \frac{1}{h} (G_{j+\frac{1}{2}}^n - G_{j-\frac{1}{2}}^n),$$

où l'on a utilisé les notations définies précédemment. Or on a

$$\begin{cases} U_j^{n+1} - U_j^n &= \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + \mathcal{O}(\Delta t^2), \\ U_{j+m}^n - U_j^n &= mh \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \mathcal{O}(h^2) \quad \text{avec } m = \pm 1. \end{cases}$$

D'où, si  $\frac{\partial g}{\partial u}$  et  $\frac{\partial g}{\partial v}$  désignent les 2 dérivées partielles de  $g$  :

$$\begin{cases} g(U_j^n, U_{j+1}^n) &= g(U_j^n, U_j^n) + \frac{\partial g}{\partial v}(U_j^n, U_j^n) h \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \mathcal{O}(h^2), \\ g(U_{j-1}^n, U_j^n) &= g(U_j^n, U_j^n) - \frac{\partial g}{\partial u}(U_j^n, U_j^n) h \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \mathcal{O}(h^2). \end{cases}$$

On en déduit enfin que

$$\varepsilon_j^n = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + \left\{ \frac{\partial g}{\partial v}(U_j^n, U_j^n) + \frac{\partial g}{\partial u}(U_j^n, U_j^n) \right\} \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \mathcal{O}(h).$$

Le schéma est donc consistant (et au moins d'ordre 1) si et seulement si

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, u) + \frac{\partial g}{\partial v}(u, u) = f'(u) \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

d'où l'égalité (4.6). ■

Insistons sur le fait qu'il existe **des schémas consistants et non conservatifs**, par exemple le schéma décentré. Donnons maintenant un exemple de schéma conservatif.

Un exemple de schéma conservatif : le schéma de Murman-Roe

Le schéma de Murman-Roe s'écrit

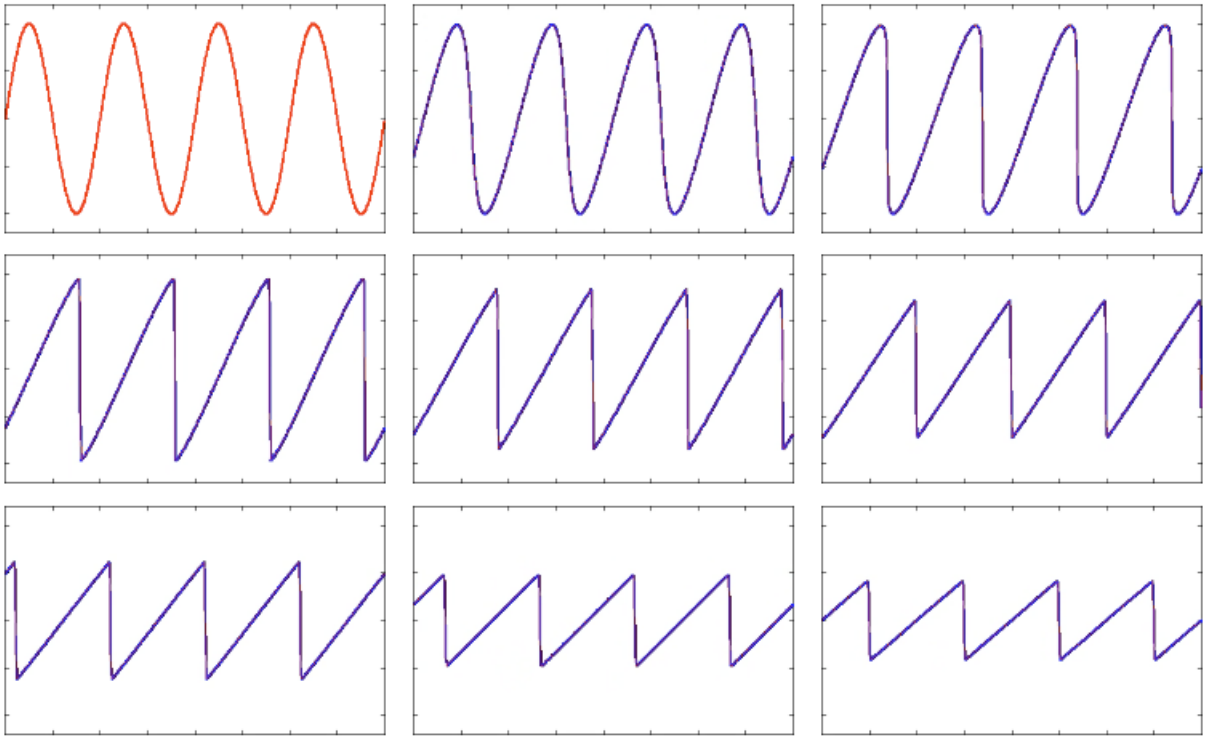
$$u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) \quad \text{avec} \quad H(u, v, w) = v - \frac{\Delta t}{h} (g(v, w) - g(u, v)), \quad (4.7)$$

où

$$g(u, v) = \begin{cases} f(u), & \text{si } \tilde{a}(u, v) \geq 0 \\ f(v), & \text{si } \tilde{a}(u, v) < 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \tilde{a}(u, v) = \begin{cases} \frac{f(u) - f(v)}{u - v}, & \text{si } u \neq v, \\ f'(u), & \text{si } u = v. \end{cases}$$

Nous représentons dans la figure 4.3 la solution faible entropique (en rouge) pour  $f(u) = u + u^2/2$  et  $u^0(x) = \sin x$  et la solution obtenue avec le schéma de Murman Roe (en bleu). On remarque donc que le schéma de Murman Roe semble approcher la solution du problème.

Dans la figure 4.4, nous changeons la condition initiale (voir la figure en haut à droite) et représentons la solution faible entropique en rouge et la solution donnée par le Schéma de Murman Roe en bleu. On remarque que ce schéma n'approche qu'une solution faible du problème. En



**FIGURE 4.3** – Représentation à différents instants de la solution faible entropique (en rouge) et de la solution calculée avec le schéma de Murman Roe (en bleu) dans le cas où  $f(u) = u + u^2/2$  et  $u^0(x) = \sin x$

effet, on voit que le premier choc vérifie  $u^- = -u^+$  et il ne bouge pas donc il vérifie la relation de Rankine Hugoniot. Par contre il n'est pas descendant ! Plus généralement, les schémas conservatifs approchent une solution faible (comme nous allons le voir avec le théorème de Lax-Wendroff) mais pas nécessairement la solution entropique du problème.

### 4.2.3 Linéarisation du schéma - Stabilité $L^2$

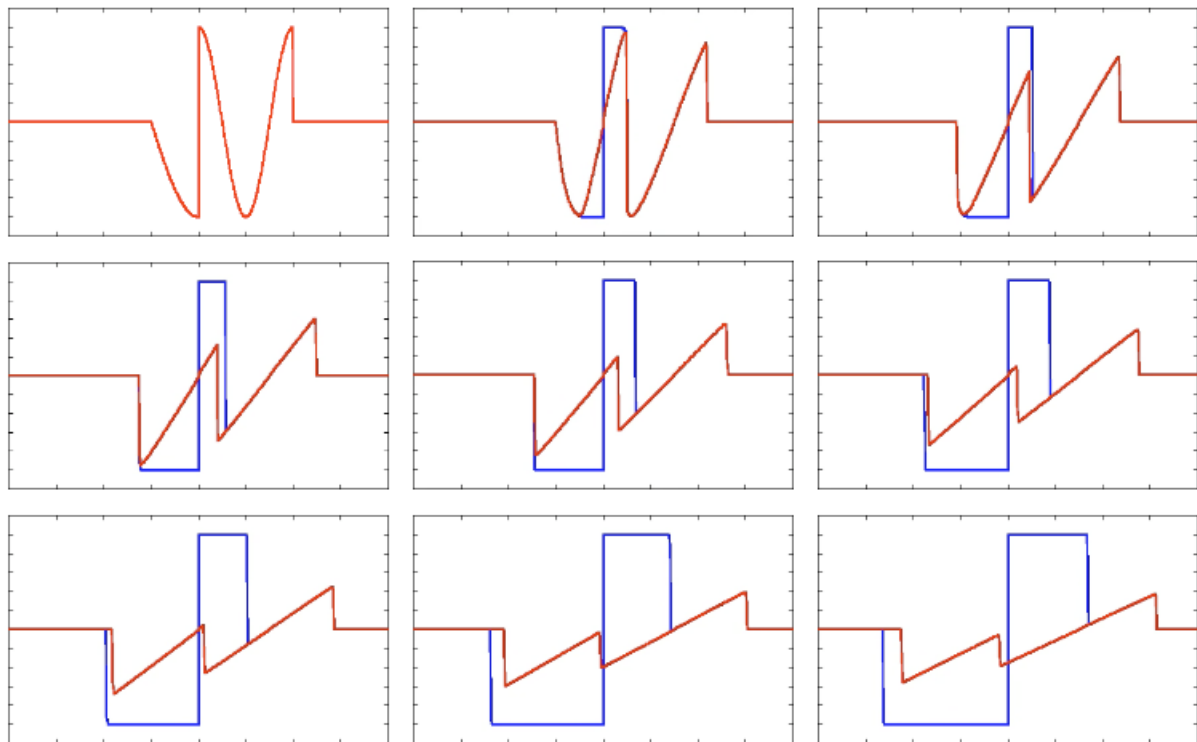
La stabilité asymptotique d'un schéma non-linéaire se définit de la manière suivante.

#### Définition 4.3: Stabilité asymptotique

Le schéma (4.2) est asymptotiquement stable pour la norme  $\|\cdot\|$  si pour tout couple de données initiales  $(u^0, v^0)$ , le couple de solutions  $(u^n, v^n)$  vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u^n - v^n\| \leq C \|u^0 - v^0\|$$

où la constante  $C$  est indépendante de  $u^0, v^0, n, \Delta t$  et  $h$ .



**FIGURE 4.4** – Représentation à différents instants de la solution faible entropique (en rouge) et de la solution calculée avec le schéma de Murman Roe (en bleu) dans le cas où  $f(u) = u + u^2/2$  et pour une autre condition initiale.

Contrairement au cas linéaire, la stabilité  $L^2$  d'un schéma non-linéaire ne peut plus s'étudier de manière simple à l'aide de la transformée de Fourier. Cependant, on peut obtenir un critère heuristique de stabilité par linéarisation.

Considérons un schéma sous la forme conservative (4.5) et soient  $u^n$  et  $v^n$  les solutions correspondant aux données initiales  $u^0$  et  $v^0$ .

$$\begin{cases} u_j^{n+1} &= u_j^n - \alpha \left( g(u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-1}^n, u_j^n) \right), \\ v_j^{n+1} &= v_j^n - \alpha \left( g(v_j^n, v_{j+1}^n) - g(v_{j-1}^n, v_j^n) \right). \end{cases} \quad (4.8)$$

On pose alors

$$w_j^n = u_j^n - v_j^n.$$

Si  $w_j^n$  est supposé très petit devant  $u_j^n$ , on peut calculer la différence entre les deux égalités (4.8) et développer le résultat par rapport aux puissances de  $w$ . Si on ne conserve que les termes du

premier ordre, on obtient

$$w_j^{n+1} = w_j^n - \alpha \left\{ \left( \frac{\partial g}{\partial u}(u_j^n, u_{j+1}^n) - \frac{\partial g}{\partial v}(u_{j-1}^n, u_j^n) \right) w_j^n + \frac{\partial g}{\partial v}(u_j^n, u_{j+1}^n) w_{j+1}^n - \frac{\partial g}{\partial u}(u_{j-1}^n, u_j^n) w_{j-1}^n \right\}. \quad (4.9)$$

Relativement à  $w$ , il s'agit d'un schéma linéaire à coefficients variables. On dit qu'il s'agit du **schéma linéarisé associé au schéma (4.5)**.

L'étude de la stabilité du schéma (4.9) ne peut pas se faire comme au chapitre précédent par analyse de Fourier, puisque les coefficients du schéma sont ici variables. Pour pallier cette difficulté, il nous faut faire une nouvelle hypothèse : nous supposons que  $u_j^n$  varie lentement en fonction de  $j$ . On peut alors considérer que, au voisinage d'un point  $x_k$ , le schéma (4.9) « ressemble » beaucoup au schéma suivant :

$$w_j^{n+1} = w_j^n - \alpha \left\{ \left( \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v} \right) w_j^n + \frac{\partial g}{\partial v} w_{j+1}^n - \frac{\partial g}{\partial u} w_{j-1}^n \right\} \quad (4.10)$$

où toutes les dérivées  $\frac{\partial g}{\partial u}$  et  $\frac{\partial g}{\partial v}$  sont calculées en  $(u_k^n, u_k^n)$ . Ce schéma étant à coefficients constants, sa stabilité s'analyse de manière classique.

#### Définition 4.4: Stabilité linéaire

On dit que le schéma (4.5) est linéairement stable  $L^2$  si le schéma (4.10) est stable  $L^2$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

#### Remarque 4.5: Une stabilité non garantie

Le critère de stabilité linéaire que nous venons d'expliciter n'a qu'une valeur indicative. En effet, les approximations que nous avons faites ne sont pas justifiées au voisinage des chocs ni même dans les zones où la dérivée devient trop importante. En résumé, les schémas linéairement instables sont toujours à proscrire. En revanche, il est seulement plausible, mais nullement garanti, qu'un schéma linéairement stable ait quelques propriétés de stabilité.

#### Remarque 4.6: Une stabilité linéaire qui peut être conditionnelle

Certains schémas sont linéairement stables sous une condition portant sur le rapport des pas  $\Delta t$  et  $h$ . Tout comme dans le cas linéaire, cette condition CFL peut s'interpréter géométriquement. En effet, nous avons vu au cours précédent que, pour l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0,$$

la connaissance de  $u$  à l'instant  $t^n$  dans l'intervalle  $[x_{j-1}, x_{j+1}]$  détermine la solution dans

l'ensemble du cône :

$$x_{j-1} + A(t - t^n) \leq x \leq x_{j+1} - A(t - t^n) \quad (4.11)$$

où  $A = \sup \left\{ |a(\xi)|; |\xi| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, t^n)| \right\}$ . La condition (4.11) signifie que le point  $(x_j, t_{n+1})$  doit se trouver dans ce cône.

#### 4.2.4 Vers la convergence : le théorème de Lax-Wendroff

Nous allons maintenant démontrer un résultat important concernant les schémas sous forme conservative. Il exprime le fait que si un schéma sous forme conservative consistant avec l'équation (4.3) converge, c'est nécessairement vers une solution faible du problème.

On suppose que la donnée initiale  $u^0$  du problème (4.1) a été discrétisée comme suit :

$$u_j^0 = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u^0(x) dx \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad \text{où} \quad x_{j+\frac{1}{2}} = \left(j + \frac{1}{2}\right) h \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

On construit alors, pour  $\Delta t$  et  $h$  donnés, une suite  $u^n = (u_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$  par un schéma de la forme

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{h} (g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n), \quad (4.12)$$

consistant avec l'équation (4.3), c'est-à-dire

$$g(u, u) = f(u), \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Notons qu'on a omis la constante pour simplifier la démonstration. On note  $u_\Delta$  la fonction définie par :

$$u_\Delta(x, t) = u_j^n \text{ pour } x_{j-\frac{1}{2}} \leq x < x_{j+\frac{1}{2}} \text{ et } t^n \leq t < t_{n+1}.$$

A chaque couple  $(\Delta t, h)$  correspond une fonction  $u_\Delta$ . On a alors le théorème suivant.

#### Théorème 4.7: Théorème de Lax-Wendroff

Supposons qu'il existe une suite  $(\Delta t_k, h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , une suite de fonctions  $(u_{\Delta k})_{k \in \mathbb{N}}$  associées, et une fonction  $u$  telles que, pour tout domaine  $K$  borné de  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ :

- (i)  $u \in L^\infty(K)$ ,
- (ii)  $u_{\Delta k} \rightarrow u$  dans  $L^\infty(K)$  quand  $k \rightarrow +\infty$ .

Alors  $u$  est une solution faible du problème (4.1).

**DÉMONSTRATION:** Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ . On doit montrer que

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{t=0}^{+\infty} \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{x=-\infty}^{+\infty} u^0(x) \varphi(x, 0) dx = 0. \quad (4.13)$$

Posons  $\varphi_j^n = \varphi(x_j, t^n)$ , pour  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . En multipliant (4.12) par  $\varphi_j^n$  et en sommant, on obtient (on omet l'indice  $k$  pour alléger les notations) :

$$h \sum_{j,n} (u_j^{n+1} - u_j^n) \varphi_j^n + \Delta t \sum_{j,n} \left( g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \varphi_j^n = 0.$$

Par « sommation par parties », on obtient :

$$h \sum_{j,n} u_j^{n+1} (\varphi_j^n - \varphi_j^{n+1}) - h \sum_j u_j^0 \varphi_j^0 + \Delta t \sum g_{j+\frac{1}{2}}^n (\varphi_j^n - \varphi_{j+1}^n) = 0. \quad (4.14)$$

Si on note  $\varphi_\Delta$  et  $g_\Delta$  les fonctions définies par :

$$\begin{cases} \varphi_\Delta(x, t) = \varphi_j^n & \text{avec } x_{j-\frac{1}{2}} \leq x < x_{j+\frac{1}{2}} & \text{et } t^n \leq t < t_{n+1}, \\ g_\Delta(x, t) = g_{j+\frac{1}{2}}^n & \text{avec } x_j \leq x < x_{j+1} & \text{et } t^n \leq t < t_{n+1}, \end{cases}$$

l'égalité (4.14) s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} & \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{t=\Delta t}^{+\infty} u_\Delta(x, t) \frac{\varphi_\Delta(x, t - \Delta t) - \varphi_\Delta(x, t)}{\Delta t} dx dt - \int_{x=-\infty}^{+\infty} u_\Delta(x, 0) \varphi_\Delta(x, 0) dx \\ & + \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{t=0}^{+\infty} g_\Delta(x, t) \frac{\varphi_\Delta(x - \frac{h}{2}, t) - \varphi_\Delta(x + \frac{h}{2}, t)}{h} dx dt = 0. \end{aligned}$$

On vérifie alors facilement que la première intégrale converge vers :

$$- \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{t=0}^{+\infty} u(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) dx dt$$

et la seconde vers :

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} u^0(x) \varphi(x, 0) dx.$$

On remarque ensuite que  $g_\Delta$  vérifie par définition :

$$g_\Delta(x, t) = g \left( u_\Delta \left( x - \frac{h}{2}, t \right), u_\Delta \left( x + \frac{h}{2}, t \right) \right) \quad \forall x, \forall t.$$

Donc  $g_\Delta$  converge uniformément sur tout compact vers la fonction  $g(u(x, t), u(x, t))$  qui, d'après la consistance du schéma est identiquement égale à  $f(u(x, t))$ . La troisième intégrale converge donc vers :

$$- \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{t=0}^{+\infty} f(u(x, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) dx dt,$$

d'où le résultat (4.13). ■

Ce théorème nous assure que les schémas sous forme conservative sont adaptés au calcul de solutions faibles. Notons qu'un schéma qui ne peut pas s'écrire sous forme conservative peut très bien converger vers une fonction qui n'est pas solution faible du problème.

### 4.2.5 Schémas entropiques

Un schéma conservatif convergent ne converge pas toujours vers la solution entropique du problème (voir exemple le schéma de Murman-Roe donné précédemment dans la section 4.2.2).

Nous allons maintenant énoncer un critère (malheureusement difficile à vérifier en pratique) qui assure la convergence (si cette dernière a lieu) vers la solution entropique.

On rappelle tout d'abord que la solution entropique est caractérisée par le fait qu'elle satisfait la condition d'entropie

$$\frac{\partial}{\partial t} U(u) + \frac{\partial}{\partial x} F(u) \leq 0 \quad (4.15)$$

pour toute entropie  $(U, F)$ , c'est-à-dire pour tout couple de fonctions  $\mathcal{C}^1$ ,  $U$  étant strictement convexe et  $F$  étant définie par :

$$F'(v) = U'(v)f'(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}.$$

Nous sommes en mesure de définir la notion de consistance d'un schéma avec une condition entropique.

#### Définition 4.8: Schéma consistant avec une condition d'entropie

Le schéma (4.5) est dit consistant avec la condition d'entropie (4.15) si et seulement si il existe une fonction  $\mathcal{F}(u, v)$  telle que :

- (i)  $\mathcal{F}$  est consistante avec le flux d'entropie  $F$ ,

$$\mathcal{F}(u, u) = F(u), \quad \forall u \in \mathbb{R};$$

- (ii) Pour toute solution  $(u_j^n)$  de (4.5), on a

$$\mathcal{U}_j^{n+1} \leq \mathcal{U}_j^n - \alpha \left( \mathcal{F}_{j+\frac{1}{2}}^n - \mathcal{F}_{j-\frac{1}{2}}^n \right)$$

où l'on a posé :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_j^n &= U(u_j^n), \\ \mathcal{F}_{j+\frac{1}{2}}^n &= \mathcal{F}(u_j^n, u_{j+1}^n), \end{cases} \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

La fonction  $\mathcal{F}$  est appelée le flux d'entropie numérique.

On peut alors établir, par une démarche tout à fait analogue à celle que nous avons suivie pour démontrer le théorème de Lax-Wendroff, le théorème suivant.

**Théoreme 4.9**

Sous les hypothèses du théorème 4.7, si de plus le schéma considéré est consistant avec toute condition d'entropie, alors la limite  $u$  est l'unique solution entropique du problème (4.1).

Ceci conduit finalement à définir les schémas entropiques.

**Définition 4.10: Schéma entropique**

On dit que le schéma (4.5) est entropique s'il est consistant avec toute condition d'entropie.

Nous allons étudier une classe particulière de schémas entropiques : les schémas **monotones**.

**Remarque 4.11: Le schéma de Murman-roe n'est pas entropique**

Supposons que l'on veuille résoudre numériquement à l'aide du schéma de Murman-Roe (4.7) le problème (4.1) avec la donnée initiale :

$$u^0(x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x \leq 0, \\ u_d & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

où  $u_g$  et  $u_d$  sont tels que :  $f(u_g) = f(u_d)$ . Pour la donnée initiale discrète suivante

$$u_j^0 = \begin{cases} u_g & \text{si } j \leq 0, \\ u_d & \text{si } j \geq 1, \end{cases}$$

le schéma de Murman-Roe fournit une solution discrète stationnaire, i.e. :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{Z}, \quad u_j^n = u_j^0.$$

En effet, on a :

$$g(u_g, u_g) = g(u_d, u_d) = g(u_g, u_d) = g(u_d, u_g) = f(u_g) = f(u_d).$$

Ainsi, le schéma de Murman-Roe permet de calculer une solution du problème donnée par

$$\forall t \geq 0, \quad u(x, t) = u^0(x).$$

C'est une solution faible car la relation de Rankine-Hugoniot est satisfaite.

Si  $u_g \geq u_d$ , il s'agit bien de la solution entropique. En revanche, si  $u_g < u_d$ , on sait que la solution entropique correspond à une onde de détente et non à ce choc stationnaire. Le schéma de Murman-Roe ne permet donc pas d'approcher la solution entropique.



## 4.2.6 Schémas monotones

### 4.2.6.1 Condition de monotonie

On a vu dans le cours précédent que l'opérateur qui à  $u^0$  associe la solution entropique du problème de Cauchy (4.1) est monotone. Autrement dit, si  $u$  et  $v$  sont les solutions pour les données initiales  $u^0$  et  $v^0$ , on a :

$$u^0(x) \geq v^0(x) \text{ p.p. } x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad u(x, t) \geq v(x, t) \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Nous allons donc nous intéresser aux schémas possédant la même propriété.

Définition 4.12: Schéma monotone

Un schéma est dit monotone si

$$\{u_j^n \geq v_j^n, \forall j \in \mathbb{Z}\} \quad \Rightarrow \quad \{u_j^{n+1} \geq v_j^{n+1}, \forall j \in \mathbb{Z}\}.$$

Nous disposons d'un critère simple pour voir si un schéma est monotone ou pas. La démonstration est immédiate.

Lemme 4.13: Critère de monotonie

Le schéma

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) \quad (4.16)$$

est monotone si et seulement si  $H$  est une fonction croissante de chacun de ses arguments.

En pratique, la fonction  $H$  dépend des pas de discrétisation  $\Delta t$  et  $h$  et la monotonie n'est en général réalisée que sous une condition sur  $\alpha = \frac{\Delta t}{h}$  (condition de type CFL).

### 4.2.6.2 Propriétés des schémas monotones

Nous pouvons déjà énoncer quelques propriétés immédiates des schémas monotones.

Lemme 4.14: Propriétés des schémas monotones

Soit un schéma monotone de la forme (4.16) et tel que  $H(u, u, u) = u$  pour tout  $u \in \mathbb{R}$ .

Alors :

(i) il préserve la monotonie i.e.

$$\begin{cases} \forall j, \quad u_j^n \leq u_{j+1}^n & \Rightarrow & \forall j, \quad u_j^{n+1} \leq u_{j+1}^{n+1}, \\ \forall j, \quad u_j^n \geq u_{j+1}^n & \Rightarrow & \forall j, \quad u_j^{n+1} \geq u_{j+1}^{n+1}, \end{cases}$$

(ii) il vérifie le principe du maximum suivant :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \inf_{j \in \mathbb{Z}} u_j^n \leq u_k^{n+1} \leq \sup_{j \in \mathbb{Z}} u_j^n,$$

(iii) il est borné en norme  $l^\infty$  :

$$\|u^{n+1}\|_{\ell^\infty} \leq \|u^n\|_{\ell^\infty}$$

$$\text{où } \|u^n\|_{\ell^\infty} = \sup_{j \in \mathbb{Z}} |u_j^n|.$$

**DÉMONSTRATION:** (i) Il suffit de poser  $v_j^n = u_{j+1}^n$  (puis  $v_j^n = u_{j-1}^n$ ) et d'appliquer la définition.

(ii) De même, il suffit de poser :  $\forall j, v_j^n = \inf_{k \in \mathbb{Z}} u_k^n$  (puis  $\forall j, v_j^n = \sup_{k \in \mathbb{Z}} u_k^n$ ) et d'appliquer la définition en utilisant l'identité  $H(u, u, u) = u$ .

Enfin, (iii) est une conséquence directe de (ii). ■

En particulier, si la condition initiale est monotone, la solution approchée calculée à l'aide d'un schéma monotone ne comportera jamais d'oscillations.

Une propriété essentielle des schémas monotones est donnée par le théorème suivant que nous admettrons .

#### Théorème 4.15: Un résultat de convergence

Soit un schéma **conservatif, consistant avec (4.3) et monotone**. Alors, de toute suite  $(\Delta t_k, h_k)$  tendant vers 0, on peut extraire une sous-suite telle que la suite de fonctions associées  $(u_{\Delta k})$  (les notations sont celles du théorème 4.7) converge presque partout vers une solution faible  $u$  du problème (4.1) .

De plus, la limite est bien la solution entropique du problème. On a en effet le théorème suivant.

#### Théorème 4.16: Lien schéma entropique - schéma monotone

Un schéma conservatif, consistant avec (4.3) et monotone est entropique.

Autrement dit, les schémas conservatifs, consistants et monotones sont, en un certain sens, convergents.

**DÉMONSTRATION:** On considère un schéma de la forme suivante :

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$$

où  $H(u, v, w) = v - \alpha\{g(v, w) - g(u, v)\}$ . On doit montrer qu'il est consistant avec toute condition

d'entropie, mais on admettra qu'il suffit de considérer les entropies de Kruzkov qui sont de la forme :

$$\begin{cases} U(u) = |u - k|, \\ F(u) = \text{signe}(u - k)(f(u) - f(k)), \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}.$$

D'après la définition 4.8, il nous faut trouver une fonction  $G(u, v)$  telle que l'on ait :

$$G(u, u) = \text{signe}(u - k)(f(u) - f(k)) \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad (4.17)$$

et

$$|u_j^{n+1} - k| \leq |u_j^n - k| - \alpha (G(u_j^n, u_{j+1}^n) - G(u_{j-1}^n, u_j^n)) \quad (4.18)$$

pour toute solution  $(u_j^n)$  du schéma. Posons alors :

$$G(u, v) = g(u \vee k, v \vee k) - g(u \wedge k, v \wedge k)$$

où l'on a noté :

$$a \vee b = \max(a, b) \text{ et } a \wedge b = \min(a, b).$$

On a alors, puisque le schéma est consistant avec (4.3) :

$$\begin{aligned} G(u, u) &= g(u \vee k, u \vee k) - g(u \wedge k, u \wedge k) \\ &= f(u \vee k) - f(u \wedge k) \\ &= \text{signe}(u - k)(f(u) - f(k)). \end{aligned}$$

L'identité (4.17) est donc satisfaite.

Posons alors :  $v_j^n = u_j^n \vee k$ . Comme le schéma est monotone :

$$\begin{cases} v_j^n \geq u_j^n \quad \forall j & \Rightarrow H(v_{j-1}^n, v_j^n, v_{j+1}^n) \geq u_j^{n+1} \\ v_j^n \geq k \quad \forall j & \Rightarrow H(v_{j-1}^n, v_j^n, v_{j+1}^n) \geq H(k, k, k) = k \end{cases}$$

d'où finalement :

$$H(u_{j-1}^n \vee k, u_j^n \vee k, u_{j+1}^n \vee k) \geq u_j^{n+1} \vee k. \quad (4.19)$$

On démontrerait de même l'inégalité suivante :

$$H(u_{j-1}^n \wedge k, u_j^n \wedge k, u_{j+1}^n \wedge k) \leq u_j^{n+1} \wedge k. \quad (4.20)$$

Mais comme  $|u - k| = u \vee k - u \wedge k$ , on déduit de (4.19) et (4.20) que :

$$|u_j^{n+1} - k| \leq H(u_{j-1}^n \vee k, u_j^n \vee k, u_{j+1}^n \vee k) - H(u_{j-1}^n \wedge k, u_j^n \wedge k, u_{j+1}^n \wedge k),$$

et on vérifie aisément que cette dernière inégalité coïncide avec (4.18). ■

Malheureusement, la portée des schémas monotones est limitée par leur ordre .

#### Théoreme 4.17: Ordre des schémas monotones

Un schéma conservatif consistant avec (4.3) et monotone est d'ordre 1 (exactement).

**DÉMONSTRATION:** On considère comme précédemment un schéma de la forme :

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n),$$

où  $H(u, v, w) = v - \alpha\{g(v, w) - g(u, v)\}$ .

1) Soit  $\bar{u}$  une solution régulière de (4.3). En poursuivant le calcul amorcé lors de la démonstration du lemme 4.2, on vérifie aisément que l'erreur de troncature s'écrit

$$\varepsilon_j^n = \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right]_j^n + \frac{h^2}{2\Delta t} \alpha \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \frac{\partial g}{\partial v}(\bar{u}, \bar{u}) - \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}, \bar{u}) \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \right]_j^n + \mathcal{O}(h^2).$$

En dérivant (4.3) nous avons

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial}{\partial x} f(\bar{u}) \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( c(\bar{u}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( c(\bar{u}) \frac{\partial}{\partial x} f(\bar{u}) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( c(\bar{u})^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right).$$

Ainsi, l'erreur de troncature s'écrit finalement :

$$\varepsilon_j^n = \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta(\bar{u}, \alpha) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \right]_j^n + \mathcal{O}(h^2)$$

où

$$\beta(\bar{u}, \alpha) = c(\bar{u})^2 - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}, \bar{u}) - \frac{\partial g}{\partial v}(\bar{u}, \bar{u}) \right).$$

2) Le schéma étant monotone, on a :

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial H}{\partial u}(u, u) &= \alpha \frac{\partial g}{\partial u}(u, u) \geq 0 \\ \forall u \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial H}{\partial v}(u, u) &= 1 - \alpha \left( \frac{\partial g}{\partial u}(u, u) - \frac{\partial g}{\partial v}(u, u) \right) \geq 0 \\ \forall u \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial H}{\partial w}(u, u) &= -\alpha \frac{\partial g}{\partial v}(u, u) \geq 0. \end{aligned}$$

On a donc finalement

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u}(u, u) \geq 0 \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u, u) \leq 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u}(u, u) - \frac{\partial g}{\partial v}(u, u) \leq \frac{1}{\alpha} \end{cases} \quad (4.21)$$

3) Le schéma étant consistant, on a :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad g(u, u) = f(u) + cste,$$

d'où

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u, u) + \frac{\partial g}{\partial v}(u, u) = c(u). \quad (4.22)$$

De (4.21) et (4.22), on déduit finalement :

$$c(u)^2 \leq \left( \frac{\partial g}{\partial u}(u, u) - \frac{\partial g}{\partial v}(u, u) \right)^2 \leq \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial g}{\partial u}(u, u) - \frac{\partial g}{\partial v}(u, u) \right).$$

Donc  $\beta(\bar{u}, \alpha)$  est toujours négatif ou nul.

Pour que le schéma soit d'ordre supérieur ou égal à 2, il faut que  $\beta(u, \alpha)$  soit nul pour tout  $u$ . D'après ce qui précède, il faut pour cela que l'on ait :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \left( \frac{\partial g}{\partial u}(u, u) - \frac{\partial g}{\partial v}(u, u) \right)^2 = \left( \frac{\partial g}{\partial u}(u, u) + \frac{\partial g}{\partial v}(u, u) \right)^2,$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, u) - \frac{\partial g}{\partial v}(u, u) = \frac{1}{\alpha}.$$

Ceci n'est vrai que si :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, u) = \frac{1}{\alpha} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial v}(u, u) = 0,$$

où

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, u) = -\frac{1}{\alpha} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial u}(u, u) = 0.$$

Plaçons nous par exemple dans le premier cas. D'après (4.22), on a alors :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad a(u) = \frac{1}{\alpha}.$$

Il s'agit donc du cas linéaire de l'équation de transport avec la vitesse  $\frac{1}{\alpha}$ . Le schéma s'écrit :

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n,$$

et il est exact car il coïncide avec la méthode des caractéristiques.

Ainsi nous avons démontré qu'un schéma monotone est d'ordre 1 exactement, sauf si  $f(u) = cu$  et  $c \frac{\Delta t}{h} = 1$  auquel cas il est d'ordre  $\infty$ .

■

## 4.3 Exemples

Nous allons illustrer les notions présentées précédemment en passant en revue les principaux exemples de schémas pour les équations hyperboliques non linéaires en dimension 1.

### 4.3.1 Le schéma de Lax-Friedrichs

Le schéma de Lax dans le cas linéaire s'étend de manière naturelle au cas non-linéaire sous la forme :

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) - \frac{\alpha}{2} \{ f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n) \}.$$

Le schéma de Lax-Friedrichs possède les propriétés suivantes.

- **Conservatif.** On vérifie aisément qu'il peut se mettre sous la forme conservative avec pour flux numérique :

$$g(u, v) = \frac{1}{2} \left\{ f(u) + f(v) + \frac{1}{\alpha}(u - v) \right\}.$$

- **Consistant.** Le schéma de Lax-Friedrichs est consistant d'ordre 1 au moins. En effet,

$$g(u, u) = \frac{1}{2} \left\{ f(u) + f(u) - \frac{1}{\alpha}(u - u) \right\} = f(u).$$

On verra ensuite qu'il est monotone donc qu'il est exactement d'ordre 1.

- **Linéairement stable.** Pour le schéma de Lax-Friedrichs, (4.9) s'écrit :

$$w_j^{n+1} = \frac{1}{2} (w_{j-1}^n + w_{j+1}^n) - \frac{\alpha}{2} a(u_k^n) (w_{j+1}^n - w_{j-1}^n)$$

où  $a$  désigne la dérivée de  $f$ . C'est exactement le schéma de Lax-Friedrichs linéaire avec une vitesse égale à  $a(u_k^n)$ . On sait que ce schéma est stable  $L^2$  sous la condition CFL :

$$\frac{|a(u_k^n)| \Delta t}{h} \leq 1. \quad (4.23)$$

Le schéma non-linéaire de Lax-Friedrichs est donc linéairement stable  $L^2$  si (4.23) est vérifiée pour tout  $k$ . Comme cette condition dépend de  $n$ , le pas de temps doit être ajusté à chaque itération. Autrement dit, on doit avoir :

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} |a(u_k^n)| \frac{\Delta t^{(n)}}{h} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.24)$$

- **Monotone.** On a

$$H(u, v, w) = \frac{1}{2}(u + w) - \frac{\alpha}{2}(f(w) - f(u)).$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u}(u, v, w) &= \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} a(u), \\ \frac{\partial H}{\partial v}(u, v, w) &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial w}(u, v, w) &= \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} a(w). \end{aligned}$$

Par conséquent, le schéma de Lax-Friedrichs est monotone sous la condition CFL (4.24). Nous représentons la solution faible entropique en rouge et la solution donnée par le Schéma de Lax Friedrichs en bleu dans le cas où la condition CFL (4.24) est satisfaite (voir la figure 4.5) et dans le cas où la condition CFL n'est pas satisfaite (voir la figure 4.6).

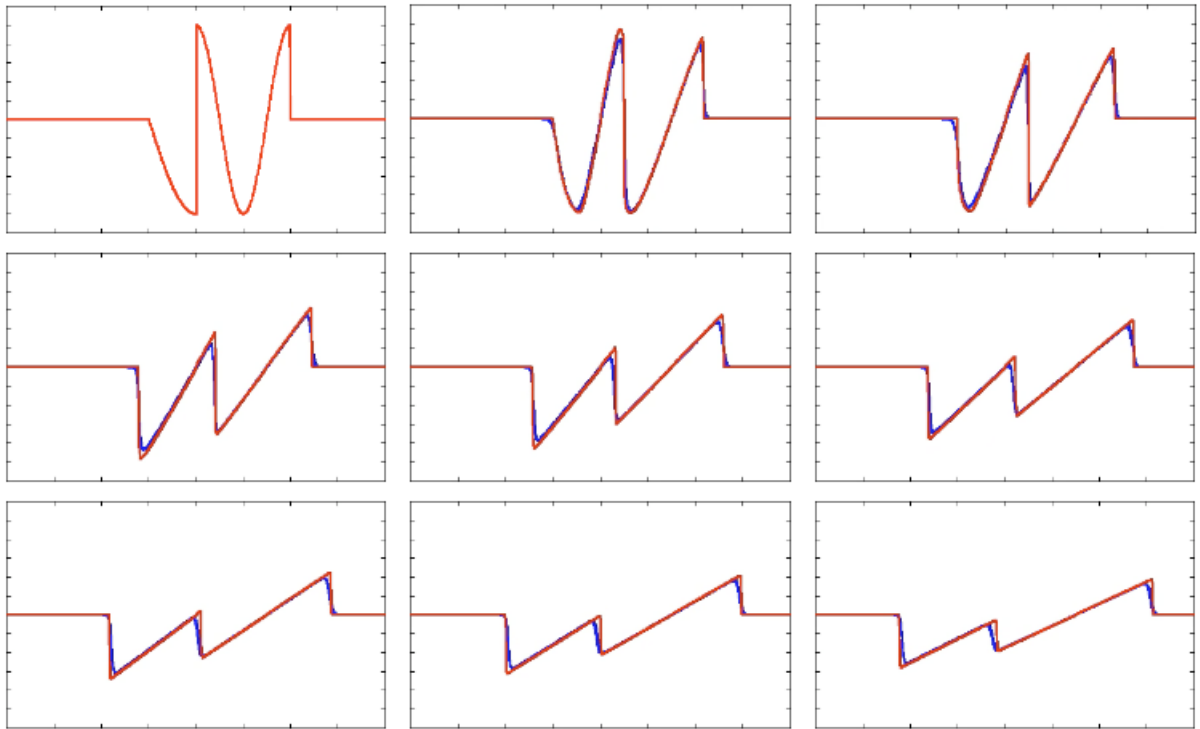


FIGURE 4.5 – Représentation à différents instants de la solution faible entropique (en rouge) et de la solution calculée avec le schéma de Lax-Friedrichs (en bleu) quand la condition CFL (4.24) est satisfaite dans le cas où  $f(u) = u + u^2/2$ .

### 4.3.2 Le schéma d'Engquist-Osher

Il est défini comme suit :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\alpha}{2} \left\{ f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n) + \int_{u_{j-1}^n}^{u_j^n} |a(\xi)| d\xi - \int_{u_j^n}^{u_{j+1}^n} |a(\xi)| d\xi \right\}$$

où l'on a noté  $a$  la dérivée de  $f$ .

On retrouve le schéma décentré à gauche dans les zones où  $f$  est croissante et à droite lorsque  $f$  est décroissante.

Le schéma d'Engquist-Osher possède les propriétés suivantes.

— **Conservatif.** Il peut s'écrire sous forme conservative à condition de poser :

$$g(u, v) = \frac{1}{2} \left\{ f(u) + f(v) - \int_u^v |a(\xi)| d\xi \right\}.$$

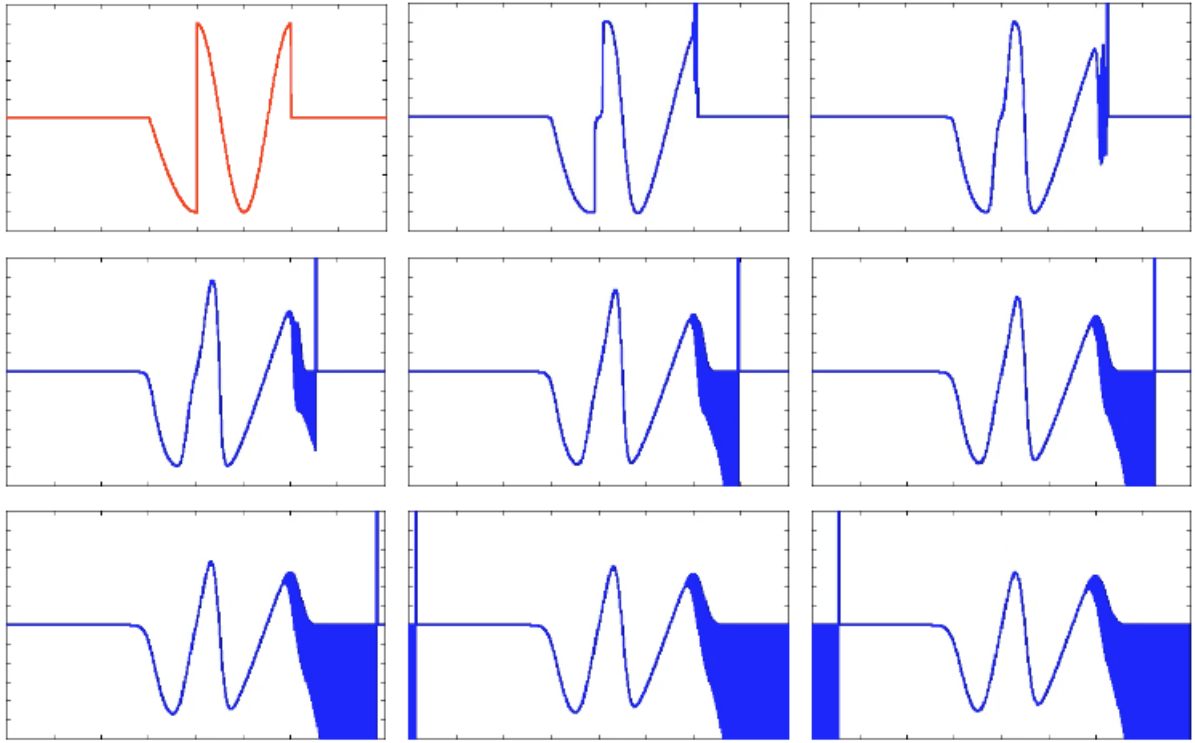


FIGURE 4.6 – Représentation à différents instants de la solution faible entropique (en rouge) et de la solution calculée avec le schéma de Lax-Friedrichs (en bleu) quand la condition CFL (4.24) n'est pas satisfaite.

- **Consistant.** On vérifie aisément que  $f(u, u) = g(u)$ . Le schéma d'Engquist-Osher est donc consistant et d'ordre 1 au moins. On va voir qu'il est monotone donc qu'il est exactement d'ordre 1.
- **Linéairement stable.** Avec une démarche similaire à celle effectuée pour le schéma de Lax-Friedrichs, on montre qu'il est linéairement stable  $L^2$  sous la condition CFL (4.24).
- **Monotone.** On a

$$H(u, v, w) = v - \frac{\alpha}{2} \left\{ f(w) - f(u) + \int_u^v |a(\xi)| d\xi - \int_v^w |a(\xi)| d\xi \right\}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u}(u, v, w) &= \frac{\alpha}{2} a(u) + \frac{\alpha}{2} |a(u)| \\ \frac{\partial H}{\partial v}(u, v, w) &= 1 - \alpha |a(v)| \\ \frac{\partial H}{\partial w}(u, v, w) &= -\frac{\alpha}{2} a(w) + \frac{\alpha}{2} |a(w)|. \end{aligned}$$

Par conséquent, le schéma d'Engquist-Osher est monotone sous la condition CFL (4.24).



### 4.3.3 Un exemple de schéma d'ordre 2 : le schéma de Lax-Wendroff

Nous allons construire un schéma d'ordre 2.

Un développement limité en temps nous donne (avec les notations habituelles) :

$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n + \Delta t \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x_j, t^n) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}(x_j, t^n) + \mathcal{O}(\Delta t^3). \quad (4.25)$$

Mais de plus, on déduit de l'équation (4.3) les identités suivantes :

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial}{\partial x} f(\bar{u}) \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( a(\bar{u}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( a(\bar{u}) \frac{\partial}{\partial x} f(\bar{u}) \right).$$

L'équation (4.25) devient

$$\frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\Delta t} = - \left[ \frac{\partial}{\partial x} f(\bar{u}) \right]_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( a(\bar{u}) \frac{\partial}{\partial x} f(\bar{u}) \right) \right]_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2),$$

où la notation  $[ \cdot ]_j^n$  signifie que l'on calcule la quantité entre les crochets au point  $x_j$  et au temps  $t^n$ .

Nous allons ensuite discrétiser les termes entre crochets. Le premier terme se traite de manière habituelle (discrétisation ordre 2)

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} (f(\bar{u})) \right]_j^n = \frac{f(\bar{u}_{j+1}^n) - f(\bar{u}_{j-1}^n)}{2h} + \mathcal{O}(h^2).$$

Pour le second, on applique deux fois de suite un schéma centré afin d'obtenir une approximation d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( a(\bar{u}) \frac{\partial}{\partial x} f(\bar{u}) \right) \right]_j^n &= \frac{1}{2h} \left\{ \left[ a(\bar{u}) \frac{\partial}{\partial x} f(\bar{u}) \right]_{j+\frac{1}{2}}^n - \left[ a(\bar{u}) \frac{\partial}{\partial x} f(\bar{u}) \right]_{j-\frac{1}{2}}^n \right\} + \mathcal{O}(h^2), \\ &= \frac{1}{2h} \left\{ a_{j+\frac{1}{2}}^n \frac{f(\bar{u}_{j+1}^n) - f(\bar{u}_j^n)}{h} - a_{j-\frac{1}{2}}^n \frac{f(\bar{u}_j^n) - f(\bar{u}_{j-1}^n)}{h} \right\} + \mathcal{O}(h^2), \end{aligned}$$

où l'on a posé :  $a_{j+\frac{1}{2}}^n = a\left(\frac{\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j+1}^n}{2}\right)$ .

On obtient finalement le schéma du second ordre suivant

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\alpha}{2} (f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) + \frac{\alpha^2}{2} \left( a_{j+\frac{1}{2}}^n (f_{j+1}^n - f_j^n) - a_{j-\frac{1}{2}}^n (f_j^n - f_{j-1}^n) \right),$$

avec

$$\begin{cases} f_j^n &= f(u_j^n) \\ a_{j+\frac{1}{2}}^n &= a\left(\frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2}\right) \end{cases}$$

- **Conservatif.** Le schéma de Lax-Wendroff peut s'écrire sous forme conservative et son flux numérique est donné par

$$g(u, v) = \frac{1}{2} \left\{ f(u) + f(v) - \alpha a \left( \frac{u+v}{2} \right) (f(v) - f(u)) \right\}.$$

- **Consistant.** On vérifie facilement que  $g(u, u) = f(u)$ .
- **Linéairement stable.** Sa version linéarisée correspond au schéma linéarisé de Lax-Wendroff. Il est donc linéairement stable  $L^2$  sous la condition CFL (4.24).
- **Non entropique et donc non monotone.** Enfin, on peut montrer qu'il n'est pas entropique en suivant la même démarche que pour le schéma de Murman-Roe.

#### 4.3.4 Un exemple fondamental - Le schéma de Godounov

La démarche de construction de ce schéma est originale : elle repose sur la résolution exacte de problèmes de Riemann locaux. La construction de  $u^{n+1}$  à partir de  $u^n$  se fait en deux étapes :

- **Première étape :** On note  $u^n(x)$  la fonction définie par

$$u^n(x) = u_j^n \text{ si } x_{j-\frac{1}{2}} \leq x < x_{j+\frac{1}{2}}, \quad (4.26)$$

où  $x_{j+\frac{1}{2}} = \left( j + \frac{1}{2} \right) h, \forall j \in \mathbb{Z}$ .

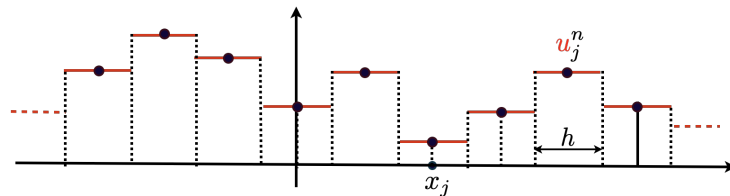


FIGURE 4.7 – La fonction constante par morceaux  $u^n$  définie à partir de  $\{u_j^n, j \in \mathbb{Z}\}$

On calcule alors  $v^n$  solution entropique du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(v) = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in [t^n, t^{n+1}] \\ v(x, t^n) = u^n(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.27)$$

On montrera dans le lemme 4.18 que ce problème peut être résolu de façon exacte à partir de la résolution de problèmes de Riemann locaux si la condition suivante est vérifiée :

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} |a(u_k^n)| \frac{\Delta t^{(n)}}{\Delta x} \leq \frac{1}{2}. \quad (4.28)$$

- **Deuxième étape** : On définit  $u^{n+1}$  comme projection de  $v^n$  sur les fonctions constantes par morceaux :

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} v^n(x) dx, \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (4.29)$$

#### Lemme 4.18

Sous la condition (4.28), la solution du problème (4.27) est donnée par :

$$v^n(x, t) = w_R \left( \frac{x - x_{j+\frac{1}{2}}}{t - t^n}; u_j^n, u_{j+1}^n \right) \quad \text{si } x_j < x < x_{j+1}, \quad (4.30)$$

où  $w_R \left( \frac{x}{t}; u_g, u_d \right)$  est la solution du problème de Riemann pour les états  $(u_g, u_d)$  (voir la Section 2.4).

**DÉMONSTRATION:** Le problème (4.27) consiste en une succession de problèmes de Riemann de la forme

$$(P_j) \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(v) = 0, & x \in [x_j, x_{j+1}], \quad t \in [t^n, t^{n+1}], \\ v(x, t^n) = \begin{cases} u_j^n & \text{si } x < x_{j+\frac{1}{2}}, \\ u_{j+1}^n & \text{si } x > x_{j+\frac{1}{2}}. \end{cases} \end{cases}$$

La solution de ce problème pour  $x \in \mathbb{R}$  est donnée par :

$$v(x, t) = w_R \left( \frac{x - x_{j+\frac{1}{2}}}{t - t^n}; u_j^n, u_{j+1}^n \right). \quad (4.31)$$

Il s'agit d'une onde de détente si  $u_j^n \leq u_{j+1}^n$  et d'un choc dans le cas contraire. La « juxtaposition » de solutions de la forme (4.31) définit bien la solution de (4.27) si les différents problèmes n'ont pas « interagi » avant l'instant  $t^{n+1}$ . Autrement dit, il faut que la solution  $v$  de chacun des problèmes  $(P_j)$  vérifie :

$$\forall t \in [t^n, t^{n+1}[, \quad \begin{cases} v(x_j, t) & = u_j^n, \\ v(x_{j+1}, t) & = u_{j+1}^{n+1}, \end{cases}$$

Ceci s'écrit encore :

$$\forall \tau \in [0, \Delta t[, \quad \begin{cases} w_R \left( -\frac{h}{2\tau}; u_j^n, u_{j+1}^{n+1} \right) = u_j^n, \\ w_R \left( \frac{h}{2\tau}; u_j^n, u_{j+1}^{n+1} \right) = u_{j+1}^{n+1} \end{cases}$$

et ceci est automatiquement vérifié sous la condition :

$$\frac{h}{2\Delta t} \geq \max(|a(u_j^n)|, |a(u_{j+1}^{n+1})|).$$

Autrement dit, la vitesse de propagation de la solution du problème  $(P_j)$  étant :

$$V_j = \max(|a(u_j^n)|, |a(u_{j+1}^{n+1})|),$$

l'onde de choc ou l'onde de détente n'auront pas atteint les bornes de l'intervalle  $x_j$  et  $x_{j+1}$  avant l'instant :

$$T_j = t^n + V_j \frac{h}{2}.$$

Il suffit donc de choisir  $t^{n+1}$  tel que :  $t^{n+1} \leq T_j, \forall j \in \mathbb{Z}$ .

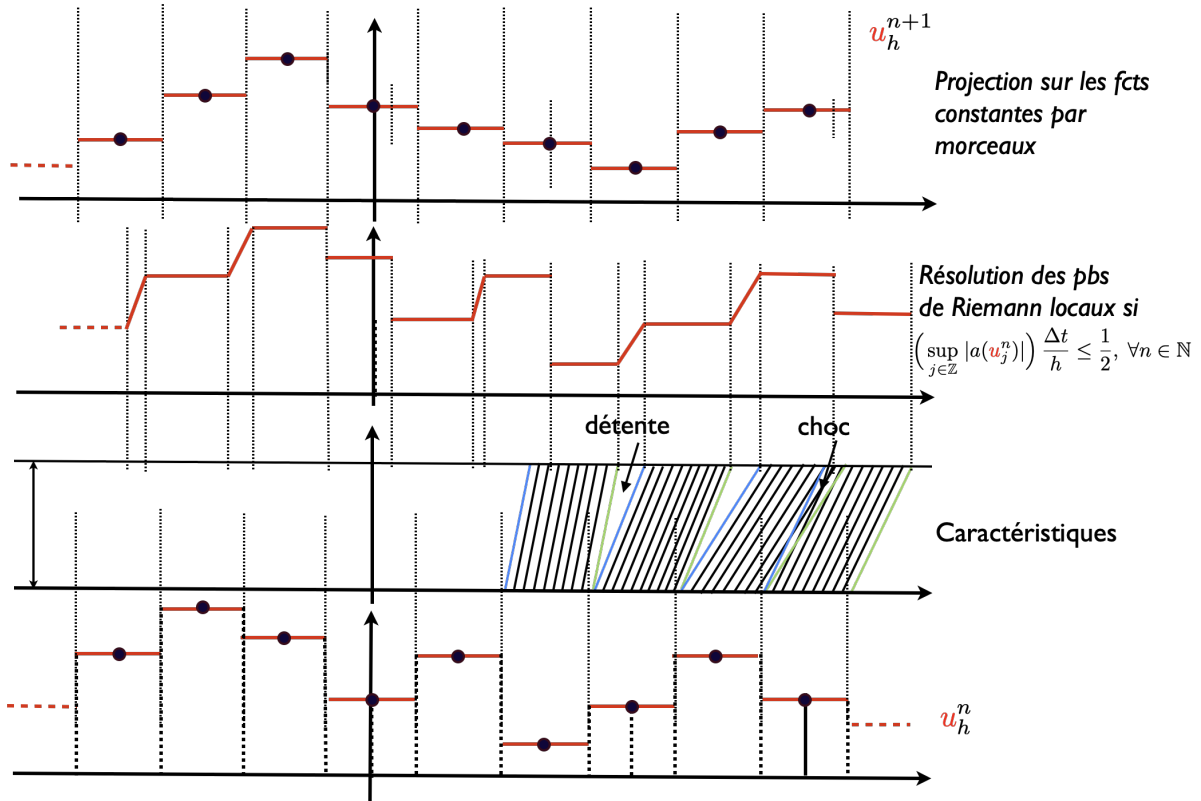


FIGURE 4.8 – Calcul de la solution discrète pour le schéma de Godunov à chaque pas de temps.

— **Le schéma de Godunov est conservatif.** Nous allons maintenant vérifier que le schéma de Godunov décrit précédemment peut se mettre sous forme conservative.

#### Lemme 4.19

- (i) L'application  $\xi \rightarrow f(w_R(\xi; u, v))$  est continue en 0, quels que soient  $u$  et  $v$ .
- (ii) Le schéma de Godunov peut s'écrire sous forme conservative et son flux numérique est donné par :

$$g(u, v) = f(w_R(0; u, v)). \quad (4.32)$$

#### DÉMONSTRATION:

(i) On sait que l'application  $\xi \rightarrow w_R(\xi; u, v)$  est continue partout sauf en  $\xi = \frac{f(u) - f(v)}{u - v}$  si  $u > v$ . Elle est donc continue en 0 sauf si :  $u > v$  et  $f(u) = f(v)$ . Or, on a dans ce cas :  $w_R(0^-; u, v) = u$  et  $w_R(0^+; u, v) = v$ . D'où :  $f(w_R(0^-; u, v)) = f(u) = f(w) = f(w_R(0^+; u, v))$ .

(ii) Intégrons l'équation (4.27) sur la maille

$$\left[ x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}} \right] \times [t^n, t^{n+1}].$$

On a :

$$0 = \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(v) \right) dx dt.$$

A priori, cette écriture n'a de sens que si la maille considérée n'est pas traversée par une ligne de choc. Dans le cas contraire, il faudrait intégrer de part et d'autre du choc. Cependant, comme  $v$  satisfait la relation de Rankine-Hugoniot, on vérifie aisément que l'intégrale sur la ligne de choc issue de l'intégration par parties est nulle. Tout se passe donc comme si  $v$  était régulière !

On a alors

$$0 = \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (v(x, t^{n+1}) - v(x, t^n)) dx + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left( f(v(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) - f(v(x_{j-\frac{1}{2}}, t)) \right) dt.$$

D'où, en vertu de (4.29), (4.30) et du point (i) :

$$0 = h (u_j^{n+1} - u_j^n) + \Delta t (f(w_R(0; u_j^n, u_{j+1}^n)) - f(w_R(0; u_{j-1}^n, u_j^n))).$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. ■

Remarquons que le schéma de Godounov coïncide avec le schéma décentré si  $f$  est monotone. En effet, si par exemple

$$a(u_j^n) \geq 0, \forall j \in \mathbb{Z},$$

alors

$$w_R(0; u_j^n, u_{j+1}^n) = u_j^n, \forall j \in \mathbb{Z}$$

et le schéma de Godounov s'écrit

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha (f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n)).$$

- **Le schéma de Godounov est consistant d'ordre 1.** En utilisant (4.32) on remarque que  $g(u, u) = f(u)$  et donc que le schéma de Godounov est consistant d'ordre 1 au moins. Comme il est monotone (cf. ci-après), il est d'ordre 1 exactement.
- **Le schéma est monotone et donc entropique.** Le schéma de Godounov est monotone. En effet, la première étape qui consiste en une résolution exacte d'un problème de Cauchy est monotone (voir cours précédent). La seconde étape l'est trivialement.



---

## Bibliographie

- [Godlewski and Raviart, 2013] Godlewski, E. and Raviart, P.-A. (2013). *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, volume 118. Springer Science & Business Media. 62, 69
- [Jean, 2017] Jean, F. (2017). *Stabilité et commande des systèmes dynamiques*. 17