

Contrôle des connaissances. Durée : 3 heures

Le sujet se compose de 8 exercices indépendants. Les exercices non étoilés sont très proches du cours et de ceux proposés en TD. Les exercices étoilés sont (un peu) plus difficiles et demandent une plus grande prise d'initiative.

Merci de veiller à la rédaction de vos copies et à justifier vos réponses avec soin. Il en sera tenu compte.

EXERCICE 1

On considère le système du premier ordre en dimension 3 (d'inconnue $\mathbf{u}(x, t) \in \mathbb{R}^3$)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A(m) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0$$

où $A(m)$ est une matrice réelle 3×3 et m un paramètre réel.

Discuter, suivant les valeurs de m , le caractère hyperbolique du système dans chacun des cas suivants :

$$(a) \quad A(m) = \begin{pmatrix} 3 & 2 - m & m \\ 2 - m & m & -m \\ m & -m & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad A(m) = \begin{pmatrix} 1 + m & 4 & 2m - 3 \\ -4 & 1 + m & 2 - m \\ 3 - 2m & m - 2 & 1 + m \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 - m & m \\ 0 & m & 2 - m \\ 2 & m & -m \end{pmatrix}$$

Indication : les trois cas se traitent presque sans calculs. Pour (b), on rappelle qu'une matrice antisymétrique réelle 3×3 non nulle admet une valeur propre nulle et deux valeurs propres imaginaires pures opposées. Pour (c) on pourra calculer l'image par $A(m)$ du vecteur $(1, 1, 1)^t$. On pourra éviter les cas d'apparition d'éventuelles valeurs propres doubles (des points bonus seront accordés si ces cas sont traités).

Corrigé : Dans la cas (a), la matrice est toujours symétrique réelle, donc diagonalisable en base orthonormée. Le système est donc toujours hyperbolique.

Dans la cas (b), on remarque $A(m) = (1 + m)I + B(m)$ où la matrice

$$B(m) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2m - 3 \\ -4 & 0 & 2 - m \\ 3 - 2m & m - 2 & 0 \end{pmatrix}$$

est antisymétrique donc à valeurs propres imaginaires pures. Il s'ensuit que le système n'est jamais hyperbolique.

Dans la cas (c), la somme de chaque ligne de $A(m)$ vaut 2, qui est donc valeur propre associé au vecteur $(1, 1, 1)^t$. La trace de $A(m)$ vaut 1 et son déterminant vaut

$$\det A(m) = m^2 - m(2 - m) + 2(1 - m)(2 - m) - 2m^2 = 4(1 - 2m)$$

Les deux autres valeurs propres ont donc une somme égale à -1 et un produit égal à $2(1 - 2m)$. Ce sont donc les racines du trinôme $\lambda^2 + \lambda + 2(1 - 2m)$, de discriminant

$$\Delta(m) = 1 - 8(1 - 2m) = 16m - 7.$$

Donc pour $m > 7/16$, le système est hyperbolique et pour $m < 7/16$ il ne l'est pas.

Finalement pour $m = m_* := 7/16$, les valeurs propres sont 2, qui est simple, et $-1/2$ qui est racine double du polynôme caractéristique. Or on calcule que

$$A(m_*) + \frac{1}{2} I = \begin{pmatrix} 1 & 9/16 & 7/16 \\ 0 & 7/16 & 25/16 \\ 2 & 7/16 & -7/16 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} I = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 24 & 9 & 7 \\ 0 & 15 & 25 \\ 32 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

a donc un rang égal à 2, ce qui montre que $A(m_*)$ est diagonalisable, donc que le système est hyperbolique.

EXERCICE 2 (*)

Soit $\varphi(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que

$$\begin{cases} \varphi(x) = 0 \text{ pour } x < 0, & \varphi(x) = 1 \text{ pour } x > 1, \\ \varphi \text{ est strictement croissante de } [0, 1] \text{ dans } [0, 1]. \end{cases}$$

On considère l'équation de Burgers $\partial_t u + \partial_x(u^2/2) = 0$ avec la condition initiale :

$$u_\varepsilon^0(x) = \varphi(x/\varepsilon), \quad \text{pour } \varepsilon > 0 \text{ donné.}$$

Question 1. Quel est le temps d'existence de la solution classique $u_\varepsilon(x, t)$? En appliquant le cours, donner une expression de cette solution.

Indication : on pourra représenter l'allure des caractéristiques associées à la données u_ε^0 et on distinguera trois régions du demi-plan ($x \in \mathbb{R}, t > 0$) en fonction du pied x_0 de la caractéristique : $x_0 < 0, x_0 \in [0, \varepsilon]$ ou $x_0 > \varepsilon$.

Corrigé. La solution est globale parce que la donnée initiale $u_\varepsilon^0(x)$ est croissante. Les équations des caractéristiques issues d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ sont

- pour $x_0 < 0$, $x = x_0$. Elle remplissent $D_0 = \{x < 0, t \geq 0\}$
- pour $0 < x_0 < \varepsilon$, $x = x_0 + \varphi(x_0/\varepsilon)t$. Elle remplissent $D_1^\varepsilon = \{0 < x < \varepsilon + t, t \geq 0\}$
- pour $x_0 > \varepsilon$, $x = x_0 + t$. Elle remplissent $D_2^\varepsilon = \{x > \varepsilon + t, t \geq 0\}$

La méthode des caractéristique nous dit que la solution est donnée par

$$u_\varepsilon(x, t) = 0 \text{ dans } D_0, \quad u_\varepsilon(x, t) = \varphi(g_\varepsilon(x, t)/\varepsilon) \text{ dans } D_1^\varepsilon, \quad u_\varepsilon(x, t) = 1 \text{ dans } D_2^\varepsilon,$$

où $g_\varepsilon(x, t) \in [0, \varepsilon]$ est le pied de la caractéristique passant par $(x, t) \in D_1^\varepsilon$. Il s'agit de l'unique solution de

$$g_\varepsilon(x, t) + t u_\varepsilon^0(g_\varepsilon(x, t)) = x \iff g_\varepsilon(x, t) + t \varphi(g_\varepsilon(x, t)/\varepsilon) = x$$

Question 2. Identifier la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ de la donnée initiale u_ε^0 et calculer la limite $u(x, t)$ de la fonction $u_\varepsilon(x, t)$. Que retrouvez vous?

Corrigé. Il faut sur distinguer les domaines limites

$$D_0 = \{x < 0, t \geq 0\}, \quad D_1 = \{0 < x < t, t \geq 0\}, \quad D_2 = \{x > t, t \geq 0\}.$$

Si on pose $f_\varepsilon(x, t) = g_\varepsilon(x, t)/\varepsilon \in [0, 1]$, on a

$$u(x, t) = \varphi(f_\varepsilon(x, t)) \text{ et } \varepsilon f_\varepsilon(x, t) + t \varphi(f_\varepsilon(x, t)) = x.$$

Par conséquent la limite de $\varphi(f_\varepsilon(x, t))$ est x/t . On en déduit

$$u(x, t) = 0 \text{ dans } D_0, \quad u(x, t) = x/t \text{ dans } D_1, \quad u(x, t) = 1 \text{ dans } D_2.$$

On retrouve l'onde de détente associée à la donnée initiale limite u^0 qui n'est autre que la fonction de Heaviside.

On ne le demande pas mais on peut aussi avoir la limite de $f_\varepsilon(x, t)$ qui est

$$f(x, t) = \varphi^{-1}(x/t), \quad \text{pour } x \in D_1.$$

EXERCICE 3

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^{p+1}}{p+1} \right) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) := e^{-x^2}. \end{cases} \quad (1)$$

Calculer le temps d'existence de la solution classique.

Corrigé : Comme $a(u) := f'(u) = u^p$ on voit que $a_0(x) := a(u_0(x)) = e^{-p x^2}$ et donc que

$$a'_0(x) = -2px e^{-p x^2}.$$

Pour calculer le minimum de a'_0 , nous calculons sa dérivée

$$a''_0(x) = -2p e^{-p x^2} + (2px)^2 e^{-p x^2} = 2p (2p x^2 - 1) e^{-p x^2}$$

On en déduit que a'_0 atteint son minimum en $x_* = 1/\sqrt{2p}$ et donc que

$$\inf a'_0 = a'_0(x_*) = -2p \times (1/\sqrt{2p}) \times e^{-1/2} = -\sqrt{2p/e}.$$

D'après le cours il s'ensuit que

$$T_{max} = -1/(\inf a'_0) = \sqrt{e/2p}.$$

EXERCICE 4

On s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(e^{-u}) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (2)$$

Question 1. Donner l'équation de la caractéristique issue de $x_0 \in \mathbb{R}$.

Corrigé : D'après le cours, cette equation est (avec les notations du cours)

$$x = x_0 + a_0(x_0)t, \quad a_0 := a \circ u_0$$

Ici $f(u) = e^{-u}$, donc $a(u) = -e^{-u}$ et on obtient

$$x = x_0 - e^{-u_0(x_0)} t.$$

Une exponentielle étant toujours positive, les caractéristiques sont toujours penchées vers la gauche.

Question 2. Calculer la solution faible entropique de ce problème pour

$$u_0(x) = 0 \text{ pour } x < -1, \quad u_0(x) = -1 \text{ pour } x > -1,$$

Corrigé : Comme la discontinuité de u_0 est descendante et que $f(u) = e^{-u}$ est convexe, il faut introduire un choc reliant les valeurs 0 et -1 (noter que les caractéristiques issues des points d'abscisse inférieure à -1 se déplacent à la vitesse -1 alors que celles issues des points d'abscisse supérieure à -1 se déplacent à la vitesse $-e$). La vitesse de ce choc est donnée par la relation de Rankine-Hugoniot

$$s = \frac{e^1 - e^0}{-1 - 0} = 1 - e$$

la solution est donc donnée par

$$u(x) = 0 \text{ si } x < -1 + (1 - e)t, \quad u(x) = -1 \text{ si } x > -1 + (1 - e)t.$$

Question 3. Calculer la solution faible entropique de ce problème pour

$$u_0(x) = -1 \text{ pour } x < 0, \quad u_0(x) = 0 \text{ pour } x > 0,$$

Corrigé : Cette fois, la discontinuité de u_0 étant montante, les caractéristiques issues des points d'abscisse négative se déplacent à la vitesse $-e$ alors que celles issues des points d'abscisse positive se déplacent à la vitesse -1 . Il faut introduire une onde de détente dans la région

$$-et < x < -t$$

dans laquelle la solution est de la forme $u = \mathcal{U}(x/t)$ avec $a(\mathcal{U}(x)) = x$, ce qui donne $\mathcal{U}(x) = -\ln(-x)$. La solution est donc donnée par

$$\begin{cases} u(x, t) = -1 & \text{si } x < -et, \\ u(x, t) = -\ln(-x/t) & \text{si } -et < x < -t, \\ u(x, t) = 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

EXERCICE 5

On considère la loi de conservation scalaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0. \quad (3)$$

On appelle choc stationnaire une fonction $u(x, t)$ de la forme

$$u(x, t) = u^- \text{ si } x < 0, \quad u(x, t) = u^+ \text{ si } x > 0 \quad (\text{avec } u^+ \neq u^-) \quad (4)$$

Question 1. A quelle condition la fonction définie par (4) est-elle une solution faible (non nécessairement entropique) de l'équation (3) ?

Corrigé : La vitesse du choc étant nulle, la relation de Rankine Hugoniot est équivalente à $f(u^+) = f(u^-)$.

Question 2. Quels chocs stationnaires sont des solutions faibles possibles lorsque f est strictement monotone ?

Corrigé : D'après ce qui précède, aucun choc stationnaire ne peut être solution faible.

Question 3. Quels chocs stationnaires sont des solutions faibles possibles pour l'équation de Burgers ? Parmi ceux ci, lesquels fournissent une solution entropique ?

Corrigé : Les seuls chocs possibles sont $(u^-, u^+) = (a, -a)$ avec $a \neq 0$. Les chocs entropiques correspondent à $a > 0$.

Question 4. On considère $f(u) = u^3/3 - u$. Discuter le nombre de chocs stationnaires possibles en fonction des valeurs de u^+ (on pourra s'appuyer sur le graphe de la fonction f , voir figure ci-dessous).

Corrigé : En regardant le graphe de la fonction f on voit que

- Si $|u^+| > 2$, aucun choc stationnaire n'est possible.
- Pour $u^+ = 2$, un seul choc est possible correspondant à $u^- = -1$.
- Pour $u^+ = 1$, un seul choc est possible correspondant à $u^- = -2$.
- Pour $u^+ = -1$, un seul choc est possible correspondant à $u^- = 2$.
- Pour $u^+ = -2$, un seul choc est possible correspondant à $u^- = 1$.
- Pour les autres valeurs de u^+ , deux chocs stationnaires sont possibles.

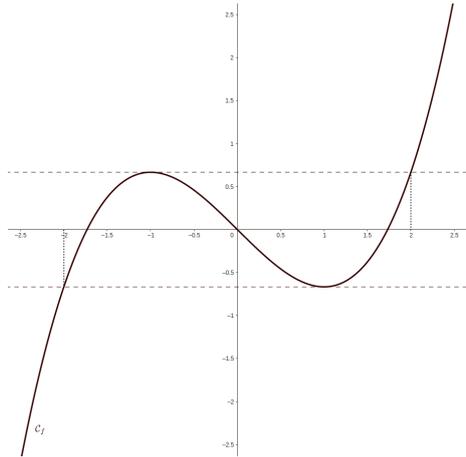


FIGURE 1 – Graphe de la fonction $f(x)$.

Question 5. On suppose que $u^+ > u^-$. On rappelle dans ce cas qu'une solution faible de (3) de la forme (4) est entropique si et seulement si le graphe de la fonction f dans l'intervalle $[u^-, u^+]$ est au dessus de sa corde. En déduire quels sont, parmi les chocs trouvés à la questions 4, quels sont ceux qui sont entropiques.

Corrigé : Toujours en étudiant le graphe de la fonction f on voit que

- Si $|u^+| > 1$, aucun choc entropique n'est possible.
- Pour $-1 \leq u^+ \leq 1$, un seul choc entropique est possible.

EXERCICE 6 (*)

Considérons le problème de Cauchy pour l'équation de transport à vitesse variable :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5)$$

où la fonction $c(x, t)$ satisfait

$$c(x, t) \in C^1(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+), \quad \sup_{x,t} |\partial_x c(x, t)| < +\infty, \quad (6)$$

de telle sorte que, si la donnée initiale u^0 est C^1 à support compact, ce que l'on note $u^0 \in C_c^1(\mathbb{R})$, alors (5) admet une unique solution classique $u(x, t) \in C^1(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+)$ qui est, à tout instant t à support compact en espace

$$\forall t \geq 0, \quad u(\cdot, t) \in C_c^1(\mathbb{R}) \quad (7)$$

Question 1. Montrer que si $x \rightarrow c(x, t)$ est décroissante pour tout t , la fonction $t \rightarrow \|u(\cdot, t)\|_{L^2}$ est décroissante.

Corrigé : Nous avons

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |u(x, t)|^2 dx = 2 \int_{\mathbb{R}} u(x, t) \partial_t u(x, t) dx = -2 \int_{\mathbb{R}} c(x, t) u(x, t) \partial_x u(x, t) dx$$

c'est à dire

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |u(x, t)|^2 dx = - \int_{\mathbb{R}} c(x, t) \partial_x (|u(x, t)|^2) dx = \int_{\mathbb{R}} \partial_x c(x, t) |u(x, t)|^2 dx$$

après intégration par parties. Le résultat demandé est alors immédiat.

Question 2. *Montrer que, dans le cas général, on a l'estimation de stabilité*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \leq \|u^0\|_{L^2}^2 e^{At}, \quad A := \sup_{x,t} \partial_x c(x, t). \quad (8)$$

Corrigé : *D'après la question précédente*

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |u(x, t)|^2 dx \leq A \int_{\mathbb{R}} |u(x, t)|^2 dx$$

et le résultat demandé se déduit de l'intégration de cette inéquation différentielle.

On suppose désormais que $c(x, t) > 0$. On considère le schéma décentré

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c_j^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0, \quad c_j^n := c(x_j, t^n), \quad (9)$$

où u_j^0 est la valeur moyenne de u^0 dans l'intervalle $[x_j - h/2, x_j + h/2]$. Le but de ce qui suit est de démontrer la stabilité du schéma sous la condition CFL

$$\|c\|_{\infty} \frac{\Delta t}{h} \leq 1, \quad \|c\|_{\infty} := \sup_{x,y} c(x, t) \quad (10)$$

Dans la suite, on suppose que (10) est satisfaite, u_h^n désigne la fonction constante par morceaux qui vaut u_j^n dans l'intervalle $[x_j - h/2, x_j + h/2]$.

Question 3. *Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $\gamma \in [0, 1]$*

$$(\gamma x + (1 - \gamma) y)^2 \leq \gamma x^2 + (1 - \gamma) y^2.$$

Corrigé : *Le plus direct est d'invoquer la convexité de $x \rightarrow x^2$. Sinon, par le calcul*

$$(\gamma x + (1 - \gamma) y)^2 = \gamma^2 x^2 + (1 - \gamma)^2 y^2 + 2\gamma(1 - \gamma)xy$$

d'où l'on déduit que

$$(\gamma x + (1 - \gamma) y)^2 = \gamma x^2 + (1 - \gamma) y^2 - \gamma(1 - \gamma)(x - y)^2.$$

Question 4. Montrer que si $x \rightarrow c(x, t)$ est décroissante pour tout t ,

$$\|u_h^{n+1}\|_{\ell^2}^2 \leq \|u_h^n\|_{\ell^2}^2, \quad \text{où } \|u_h^n\|_{\ell^2}^2 = \sum_j |u_j^n|^2 h.$$

Corrigé : Le schéma numérique se réécrit, avec $\gamma_j^n = c_j^n \frac{\Delta t}{h}$

$$u_j^{n+1} = (1 - \gamma_j^n) u_j^n + \gamma_j^n u_{j-1}^n$$

D'après la condition CFL, $0 \leq \gamma_j^n \leq 1$, donc, d'après la question précédente,

$$|u_j^{n+1}|^2 \leq (1 - \gamma_j^n) |u_j^n|^2 + \gamma_j^n |u_{j-1}^n|^2.$$

Après multiplication par h et sommation sur j , il vient

$$\begin{aligned} \|u_h^{n+1}\|_{L^2}^2 &\leq \sum_j (1 - \gamma_j^n) |u_j^n|^2 h + \sum_j \gamma_j^n |u_{j-1}^n|^2 h \\ &= \|u_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \sum_j (\gamma_{j+1}^n - \gamma_j^n) |u_j^n|^2 h \end{aligned}$$

après changement d'indice dans la seconde somme. Le résultat demandé est alors immédiat puisque $\gamma_{j+1}^n - \gamma_j^n \leq 0$.

Question 5. Montrer que, dans le cas général,

$$\|u_h^{n+1}\|_{\ell^2}^2 \leq (1 + A \Delta t) \|u_h^n\|_{\ell^2}^2, \quad A := \sup_{x,t} \partial_x c(x, t).$$

En déduire une estimation de stabilité similaire à (8) pour la solution discrète u_h^n .

Corrigé : Par le théorème des accroissements finis $\gamma_{j+1}^n - \gamma_j^n < A \Delta t$ pour tout j . Donc, d'après la question précédente,

$$\|u_h^{n+1}\|_{\ell^2}^2 = (1 + A \Delta t) \|u_h^n\|_{\ell^2}^2$$

Puisque $1 + A t \leq e^{At}$, on déduit aisément que

$$\|u_h^n\|_{\ell^2}^2 \leq \|u^0\|_{\ell^2}^2 e^{At^n}, \quad A := \sup_{x,t} \partial_x c(x, t), \quad (11)$$

EXERCICE 7

On s'intéresse à l'approximation de l'équation de transport à vitesse constante $c > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (12)$$

à l'aide du schéma numérique suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{c}{h} \sum_{k=0}^K \beta_k u_{j-k}^n = 0. \quad (13)$$

où $K \geq 3$ et où les réels β_k sont indépendants de h et Δt .

Question 1. Que doivent vérifier les β_k pour que le schéma soit consistant? Que doivent-ils vérifier pour qu'il soit d'ordre 2 en espace.

Corrigé : Avec les notations du cours, si $U_j^n = u(x_j, t^n)$ où u est une solution régulière de l'équation de transport, on voit que comme

$$U_{j-k}^n = U_j^n - kh (\partial_x u)_j^n + \frac{k^2 h^2}{2} (\partial_x^2 u)_j^n + O(h^3)$$

on calcule que

$$\sum_{k=0}^K \beta_k u_{j-k}^n = \left(\sum_{k=0}^N k \beta_k \right) (\partial_x u)_j^n + \frac{h}{2} \left(\sum_{k=0}^K k^2 \beta_k \right) (\partial_x^2 u)_j^n + O(h^2)$$

On en déduit que

- Le schéma est consistant si et seulement si $\sum_{k=0}^K \beta_k = 0$ et $\sum_{k=0}^N k \beta_k = -1$.
- Le schéma est d'ordre 2 en espace si et seulement si, de plus, $\sum_{k=0}^K k^2 \beta_k = 0$.

Question 2. Réécrire le schéma sous la forme

$$u_j^{n+1} = \sum_{k=0}^K \gamma_k(\alpha) u_{j-k}^n, \quad \alpha = c\Delta t/h,$$

où on donnera l'expression des fonctions $\gamma_k(\alpha)$.

Corrigé : On trouve, avec $\alpha = c\Delta t/h$,

$$\gamma_0(\alpha) = 1 - \alpha \beta_0, \quad \gamma_k(\alpha) = -\alpha \beta_k \text{ pour } k \geq 1.$$

Question 3. Montrer que si le schéma est consistant et les coefficients $\gamma_k(\alpha)$ tous positifs ou nuls alors le schéma est stable. En déduire qu'une condition suffisante de stabilité du schéma s'écrit (on expliquera pourquoi elle a un sens)

$$\beta_k \leq 0 \text{ pour } k \geq 1, \quad \alpha \leq \beta_0^{-1}. \quad (14)$$

Corrigé : Le coefficient d'amplification du schéma s'écrit $S_h(\xi, \Delta t) = \sum_{k=0}^K \gamma_k(\alpha) e^{-ik\xi h}$.

Si les $\gamma_k(\alpha)$ sont tous positifs on a donc

$$|S_h(\xi, \Delta t)| \leq \sum_{k=0}^K \gamma_k(\alpha) = 1 \quad \left(\text{puisque } \sum_{k=0}^K \beta_k = 0 \right)$$

ce qui entraîne la stabilité du schéma. La fin est évidente. L'inégalité sur α a un sens car le fait que les sommes des β_k et $k\beta_k$ valent respectivement 0 et -1 entraîne $\beta_0 > 0$.

EXERCICE 8 (*)

On s'intéresse toujours à l'approximation de l'équation de transport (12) en réalisant une approximation de celle-ci au point $(x_{j+\frac{1}{2}}, t^n)$ localisé au centre du rectangle délimité par les points

$$(x_j, t^{n+1}), (x_j, t^{n-1}), (x_{j+1}, t^{n+1}) \text{ et } (x_{j+1}, t^{n-1}).$$

Plus exactement on fait, en ce point, les approximations :

$$\partial_t u \sim \frac{1}{2} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}, \quad \partial_x u \sim \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h}$$

à l'aide du schéma numérique suivant :

$$\frac{1}{2} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0. \quad (15)$$

Question 1. Démontrer que ces approximations aux différences sont d'ordre 2 en espace et en temps.

Rappel : si $f(y)$ est régulière, $\frac{f(y+\eta) - f(y)}{\eta} = f'(y + \eta/2) + O(\eta^2)$.

Corrigé : Avec les notations du cours, si $U_j^n = u(x_j, t^n)$ où u est une solution régulière de l'équation de transport, on voit que par un développement de Taylor en temps au point $(x_{j+1}, t^{n+1/2})$

$$\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j+1}^n}{\Delta t} = (\partial_t u)_{j+1}^{n+1/2} + O(\Delta t^2)$$

De même, par un développement de Taylor en temps au point $(x_j, t^{n-1/2})$

$$\frac{U_j^n - U_j^{n-1}}{\Delta t} = (\partial_t u)_j^{n-1/2} + O(\Delta t^2)$$

Le point $(x_{j+1/2}, t^n)$ est exactement le milieu des points $(x_{j+1}, t^{n+1/2})$ et $(x_{j-1}, t^{n-1/2})$. Donc par un argument de symétrie (ou parité)

$$\frac{1}{2} \left[(\partial_t u)_j^{n+1/2} + (\partial_t u)_{j-1}^{n-1/2} \right] = (\partial_t u)_{j+1/2}^n + O(\Delta t^2 + h^2)$$

et par conséquent

$$\frac{1}{2} \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{U_{j-1}^n - U_{j-1}^{n-1}}{\Delta t} = (\partial_t u)_{j+1/2}^n + O(\Delta t^2 + h^2)$$

Par ailleurs, par Taylor en espace au point $(x_j, t^{n+1/2})$ (prendre $y = t^{n+1/2}, \eta = h/2$)

$$\frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{h} = (\partial_x u)_{j+1/2}^n + O(h^2)$$

Il est alors facile de conclure.

Question 2. On s'intéresse maintenant à la stabilité du schéma numérique obtenu à l'aide de ces approximations.

2.a Expliquer pourquoi l'analyse de Fourier - Von Neumann mène à une équation caractéristique du second degré.

Corrigé : On utilise la méthode de Von Neumann. La suite $u_j^n = \hat{u}^n e^{i\xi x_j}$ est solution du schéma si et seulement si

$$\frac{1}{2} \left(e^{i\xi h} \frac{\hat{u}^{n+1} - \hat{u}^n}{\Delta t} + \frac{\hat{u}^n - \hat{u}^{n-1}}{\Delta t} \right) + c \frac{e^{i\xi h} - 1}{h} \hat{u}^n = 0$$

soit encore, après multiplication par $2\Delta t$, et en posant $\alpha = c\Delta t/h$,

$$e^{i\xi h} \hat{u}^{n+1} - \hat{u}^n (1 - e^{i\xi h}) - \hat{u}^{n-1} + 2\alpha (e^{i\xi h} - 1) \hat{u}^n = 0$$

L'étude de cette équation de récurrence mène à l'équation caractéristique

$$e^{i\xi h} r^2 + (1 - 2\alpha)(1 - e^{i\xi h})r - 1 = 0$$

2.b Déterminer la condition de stabilité du schéma à partir de l'étude de cette équation caractéristique.

Indication : on pourra à l'aide d'un changement d'inconnue, se ramener à une équation du second degré à coefficients réels.

Corrigé : En posant $\rho := e^{i\xi h/2} r$, l'équation caractéristique se réécrit

$$\rho^2 - 2i(1 - 2\alpha) \sin \frac{\xi h}{2} \rho - 1 = 0$$

Pour se ramener à des coefficients réels on pose $x = i\rho \equiv i e^{i\xi h/2} r$, ce qui aboutit à

$$x^2 + 2(1 - 2\alpha) \sin \frac{\xi h}{2} x + 1 = 0$$

En reprenant des raisonnements vus en TD, vu que r et x ont même module et que le produit des racines de ce trinôme est égal à 1, il suffit, pour assurer que ses racines soient de module inférieur ou égal à 1, de vérifier que son discriminant réduit est négatif pour tout ξ . Or ce discriminant est donné par

$$\Delta = (1 - 2\alpha)^2 \sin^2 \frac{\xi h}{2} - 1$$

et varie de la valeur -1 à la valeur $(1 - 2\alpha)^2 - 1$. La condition de stabilité est donc

$$(1 - 2\alpha)^2 - 1 \leq 0 \iff -2\alpha(1 - \alpha) \leq 0 \iff \alpha \leq 1.$$