ENSTA 1ère année, Cours MA 103

P. Joly, Mai 2023

Contrôle des connaissances. Durée : 3 heures

Le sujet se compose de 8 exercices indépendants. Les exercices non étoilés sont très proches du cours et de ceux proposés en TD. Les exercices étoilés sont (un peu) plus difficiles et demandent une plus grande prise d'initiative. Merci de veiller à la rédaction de vos copies et à justifier vos réponses avec soin. Il en sera tenu compte.

EXERCICE 1

On considère le système du premier ordre en dimension 3 (d'inconnue $\mathbf{u}(x,t) \in \mathbb{R}^3$*)*

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A(m)\,\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0$$

où $A(m)$ *est une matrice réelle* 3×3 *et* m *un paramètre réel.*

Discuter, suivant les valeurs de m*, le caractère hyperbolique du système dans chacun des cas suivants :*

$$(a) \quad A(m) = \begin{pmatrix} 3 & 2-m & m \\ 2-m & m & -m \\ m & -m & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad A(m) = \begin{pmatrix} 1+m & 4 & 2m-3 \\ -4 & 1+m & 2-m \\ 3-2m & m-2 & 1+m \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1-m & m \\ 0 & m & 2-m \\ 2 & m & -m \end{pmatrix}$$

Indication : les trois cas se traitent presque sans calculs. Pour (b)*, on rappelle qu'une matrice antisymétrique réelle* 3×3 *non nulle admet une valeur propre nulle et deux valeurs propres imaginaires pures opposées. Pour* (c) *on pourra calculer l'image par* $A(m)$ *du vecteur* $(1,1,1)^t$*. On pourra ignorer les cas d'apparition d'éventuelles valeurs propres doubles (des points bonus seront accordés si ces cas sont traités).*

EXERCICE 2 (*)

Soit $\varphi(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^2 *telle que*

$$\begin{cases} \varphi(x) = 0 \text{ pour } x < 0, \quad \varphi(x) = 1 \text{ pour } x > 1, \\ \varphi \text{ est strictement croissante de } [0,1] \text{ dans } [0,1]. \end{cases}$$

On désigne par $u_\varepsilon(x,t)$ *la solution classique de l'équation de Bürgers,* $\partial_t u + \partial_x(u^2/2) = 0$*, associée à la condition initiale :*

$$u_\varepsilon^0(x) = \varphi(x/\varepsilon), \quad \text{pour } \varepsilon > 0 \text{ donné.}$$

Question 1. *Quel est le temps d'existence de la solution classique $u_\varepsilon(x,t)$? En appliquant le cours, donner une expression de cette solution.*

Indication : on pourra représenter l'allure des caractéristiques associées à la données u_ε^0 et on distinguera trois régions du demi-plan $(x \in \mathbb{R}, t > 0)$ en fonction du pied x_0 de la caractéristique : $x_0 < 0, x_0 \in [0, \varepsilon]$ ou $x_0 > \varepsilon$.

Question 2. *Identifier la limite quand $\varepsilon \to 0$ de la donnée initiale u_ε^0 et calculer la limite $u(x,t)$ de la fonction $u_\varepsilon(x,t)$. Que retrouvez vous ?*

EXERCICE 3

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{u^{p+1}}{p+1}\Big) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \\ u(x,0) = u_0(x) := e^{-x^2}. \end{cases} \tag{1}$$

Calculer le temps d'existence de la solution classique.

EXERCICE 4

On s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\big(e^{-u}\big) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{2}$$

Question 1. *Donner l'équation de la caractéristique issue de $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Question 2. *Calculer la solution faible entropique de ce problème pour*

$$u_0(x) = 0 \text{ pour } x < -1, \quad u_0(x) = -1 \text{ pour } x > -1,$$

Question 3. *Calculer la solution faible entropique de ce problème pour*

$$u_0(x) = -1 \text{ pour } x < 0, \quad u_0(x) = 0 \text{ pour } x > 0,$$

EXERCICE 5

On considère la loi de conservation scalaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0. \tag{3}$$

On appelle choc stationnaire une fonction $u(x,t)$ de la forme

$$u(x,t) = u^- \text{ si } x < 0, \quad u(x,t) = u^+ \text{ si } x > 0 \quad (\text{ avec } u^+ \neq u^-) \tag{4}$$

Question 1. *A quelle condition la fonction définie par (4) est-elle une solution faible (non nécessairement entropique) de l'équation (3) ?*

Question 2. *Quels chocs stationnaires sont des solutions faibles possibles lorsque f est strictement monotone ?*

Question 3. *Quels chocs stationnaires sont des solutions faibles possibles pour l'équation de Burgers ? Parmi ceux-ci, lesquels fournissent une solution entropique ?*

Question 4. *On considère $f(u) = u^3/3 - u$. Discuter le nombre de chocs stationnaires possibles en fonction des valeurs de u^+ (on pourra s'appuyer sur le graphe de la fonction f, voir figure ci-dessous).*

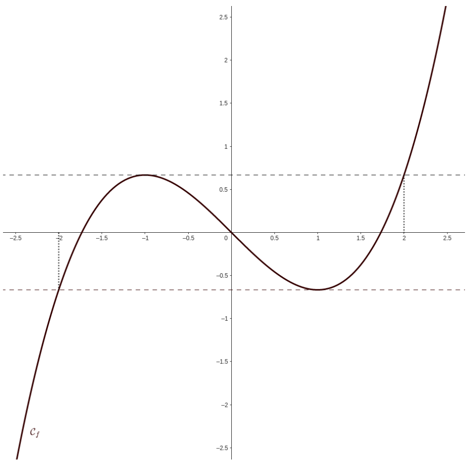

FIGURE 1 – Graphe de la fonction $f(x)$.

Question 5. *On suppose que $u^+ > u^-$. On rappelle dans ce cas qu'une solution faible de* (3) *de la forme* (4) *est entropique si et seulement si le graphe de la fonction f dans l'intervalle $[u^-, u^+]$ est au dessus de sa corde. En déduire quels sont, parmi les chocs trouvés à la questions 4, quels sont ceux qui sont entropiques.*

<u>EXERCICE</u> 6 (*)

Considérons le problème de Cauchy pour l'équation de transport à vitesse variable :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c(x,t)\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\[2ex] u(x,0) = u^0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{5}$$

où la fonction $c(x,t)$ satisfait

$$c(x,t) \in C^1(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+), \quad \sup_{x,t} |\partial_x c\,(x,t)| < +\infty, \tag{6}$$

de sorte que, si la donnée initiale u^0 est C^1 à support compact, ce que l'on note $u^0 \in C^1_c(\mathbb{R})$, alors (5) *admet une unique solution classique $u(x,t) \in C^1(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+)$ qui est, à tout instant t à support compact en espace*

$$\forall\, t \geq 0, \quad u(\cdot,t) \in C^1_c(\mathbb{R}) \tag{7}$$

Question 1. *Montrer que si $x \mapsto c(x,t)$ est décroissante pour tout t, la fonction $t \to \|u(\cdot,t)\|_{L^2}$ est décroissante.*

Question 2. *Montrer que, dans le cas général, on a l'estimation de stabilité*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 \leq \|u^0\|_{L^2}^2 \, e^{A\,t}, \quad A := \sup_{x,t} \partial_x c\,(x,t). \tag{8}$$

On suppose désormais que $c(x,t) > 0$. On considère le schéma décentré

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c_j^n \, \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} \; = \; 0\,, \quad c_j^n := c(x_j, t^n), \tag{9}$$

où u_j^0 est la valeur moyenne de u^0 dans l'intervalle $[x_j - h/2, x_j + h/2]$. Le but de ce qui suit est de démontrer la stabilité du schéma sous la condition CFL

$$\|c\|_\infty \, \frac{\Delta t}{h} \leq 1, \quad \|c\|_\infty := \sup_{x,y} c\,(x,t) \tag{10}$$

Dans la suite, on suppose que (10) *est satisfaite et u_h^n désigne la fonction constante par morceaux qui vaut u_j^n dans l'intervalle $[x_j - h/2, x_j + h/2]$.*

Question 3. *Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $\gamma \in [0,1]$*

$$\big(\gamma\, x + (1-\gamma)\, y\big)^2 \leq \gamma\, x^2 + (1-\gamma)\, y^2.$$

Question 4. *Montrer que si $x \mapsto c(x,t)$ est décroissante pour tout t,*

$$\|u_h^{n+1}\|_{\ell^2}^2 \leq \|u_h^n\|_{\ell^2}^2, \quad \textbf{où} \quad \|u_h^n\|_{\ell^2}^2 = \sum_j |u_j^n|^2 \, h\,.$$

Question 5. *Montrer que, dans le cas général,*

$$\|u_h^{n+1}\|_{\ell^2}^2 \leq (1 + A\,\Delta t)\; \|u_h^n\|_{\ell^2}^2, \quad A := \sup_{x,t} \partial_x c\,(x,t).$$

En déduire une estimation de stabilité similaire à (8) *pour la solution discrète u_h^n.*

<u>EXERCICE</u> 7

On s'intéresse à l'approximation de l'équation de transport à vitesse constante $c > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{11}$$

à l'aide du schéma numérique suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{c}{h} \sum_{k=0}^{K} \beta_k \, u_{j-k}^n = 0. \tag{12}$$

où $K \geq 3$ et où les réels β_k sont indépendants de h et Δt.

Question 1. *Que doivent vérifier les β_k pour que le schéma soit consistant ? Que doivent-ils vérifier pour qu'il soit d'ordre 2 en espace.*

Question 2. *Réécrire le schéma sous la forme*

$$u_j^{n+1} = \sum_{k=0}^{K} \gamma_k(\alpha)\, u_{j-k}^n, \quad \alpha = c\Delta t/h,$$

où on donnera l'expression des fonctions $\gamma_k(\alpha)$.

Question 3. *Montrer que si le schéma est consistant et les coefficients $\gamma_k(\alpha)$ tous positifs ou nuls alors le schéma est stable. En déduire qu'une condition suffisante de stabilité du schéma s'écrit (on expliquera pourquoi elle a un sens)*

$$\beta_k \leq 0 \text{ pour } k \geq 1, \quad \alpha \leq \beta_0^{-1}. \tag{13}$$

EXERCICE 8 (*)

On s'intéresse toujours à l'équation de transport (11) *en réalisant une approximation de celle-ci au point $(x_{j+\frac{1}{2}}, t^n)$ localisé au centre du rectangle délimité par les points*

$$(x_j, t^{n+1}), (x_j, t^{n-1}), (x_{j+1}, t^{n+1}) \text{ et } (x_{j+1}, t^{n-1}).$$

Plus exactement on fait, en ce point, les approximations aux différences finies :

$$\partial_t u \ \sim \ \frac{1}{2}\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}, \quad \partial_x u \ \sim \ \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h}$$

Question 1. *Démontrer que ces approximations sont d'ordre 2 en espace et en temps.*

Rappel : si $f(y)$ est régulière, $\dfrac{f(y+\eta) - f(y)}{\eta} = f'(y+\eta/2) + O(\eta^2).$

Question 2. *On s'intéresse maintenant à la stabilité du schéma numérique du second ordre obtenu à l'aide de ces approximations, à savoir :*

$$\frac{1}{2}\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} + c\,\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0. \tag{14}$$

2.a *Expliquer pourquoi l'analyse de Fourier - Von Neumann mène à une équation caractéristique du second degré.*

2.b *Déterminer la condition de stabilité du schéma à partir de l'étude de cette équation caractéristique. (Indication : on pourra à l'aide d'un changement d'inconnue, se ramener à une équation du second degré à coefficients réels)*