

Approximation par différences finies de l'équation de transport

- Dissipation et dispersion numérique
- Equations équivalentes

Schémas numériques pour les équations hyperboliques non linéaires 1D

- Schémas conservatifs...
- ... entropiques...
- ...monotones...
- ... et le schéma de Godunov

**hors programme
pour l'examen**

Le schéma de Lax Friedrichs

Rappel

$$\frac{u_j^{n+1} - \left(\frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}\right)}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$

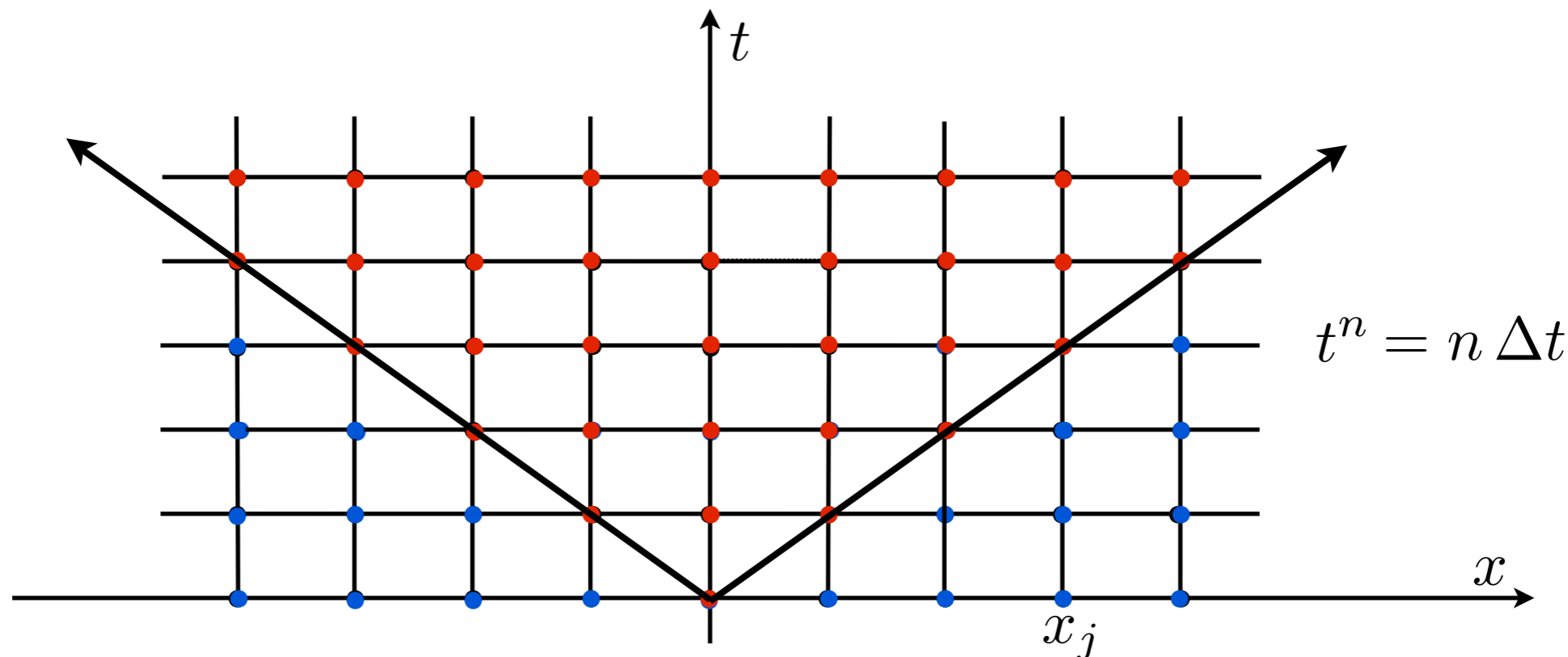
☑ C'est un schéma **explicite à un pas de temps**.

$$u_j^{n+1} = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) u_{j+1}^n + \left(\frac{1+\alpha}{2}\right) u_{j-1}^n$$

Les schémas explicites sont très peu coûteux (en terme de calcul et de stockage)

☑ La **vitesse de propagation numérique** est $V_{num} = h / \Delta t$

Condition nécessaire de convergence $V_{num} \geq c \iff \alpha := \frac{c \Delta t}{h} \leq 1$



Le schéma de Lax Friedrichs



Rappel

$$\frac{u_j^{n+1} - \left(\frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}\right)}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$

☑ C'est un schéma **explicite à un pas de temps**.

$$u_j^{n+1} = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) u_{j+1}^n + \left(\frac{1+\alpha}{2}\right) u_{j-1}^n$$

Les schémas explicites sont très peu coûteux (en terme de calcul et de stockage)

☑ La **vitesse de propagation numérique** est $V_{num} = h / \Delta t$

Condition nécessaire de convergence $V_{num} \geq c \iff \alpha := \frac{c \Delta t}{h} \leq 1$

☑ **Consistance ?**

Si on note $U_j^n := u(x_j, t^n)$ l'erreur de troncature est donnée par

$$\varepsilon_j^n := \frac{U_j^{n+1} - \frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + c \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h}$$

Rappel : Le schéma est **consistant** ssi $\lim_{\Delta t, h \rightarrow 0} \varepsilon_j^n = 0$

Le schéma est précis d'**ordre p** en **temps** et **k** en **espace** ssi

$$\varepsilon_j^n = O(\Delta t^p + h^k) \quad ((p, k) \in \mathbb{N}^2)$$

Outil de démonstration : des développements de Taylor

Le schéma de Lax Friedrichs



Rappel

$$\frac{u_j^{n+1} - \left(\frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}\right)}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$

☑ C'est un schéma **explicite à un pas de temps**.

$$u_j^{n+1} = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) u_{j+1}^n + \left(\frac{1+\alpha}{2}\right) u_{j-1}^n$$

Les schémas explicites sont très peu coûteux (en terme de calcul et de stockage)

☑ La **vitesse de propagation numérique** est $V_{num} = h / \Delta t$

Condition nécessaire de convergence $V_{num} \geq c \iff \alpha := \frac{c \Delta t}{h} \leq 1$

☑ Si $\alpha \neq 1$, le schéma est consistant **d'ordre 1 en temps et en espace** à fixé.

$$\varepsilon_j^n = \frac{c(c\alpha\Delta t - h)}{2\alpha} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^2) = -\frac{ch(1-\alpha^2)}{2\alpha} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^2)$$

on utilisera cette formule plus tard

☑ Stabilité ?

Le schéma de Lax Friedrichs

Rappel

$$\frac{u_j^{n+1} - \left(\frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}\right)}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$

On utilise la méthode de Fourier-Von Neumann et on cherche les solutions sous la forme

$$u_j^n = \hat{u}^n(\xi) e^{i\xi x_j}$$

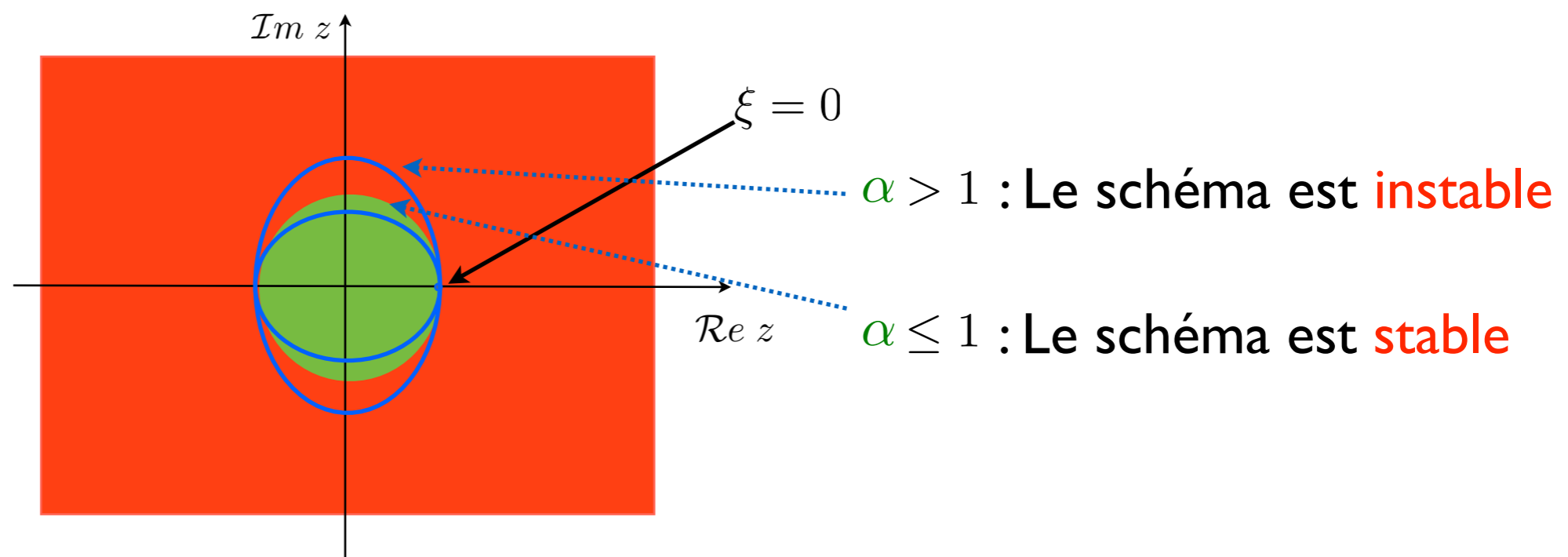
ce qui mène à $\hat{u}^{n+1}(\xi) = \hat{S}_h(\xi, \Delta t) \hat{u}^n(\xi)$ avec

$$\hat{S}_h(\xi, \Delta t) = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) e^{i\xi h} + \left(\frac{1+\alpha}{2}\right) e^{-i\xi h} = \cos \xi h - i\alpha \sin \xi h$$

Théorème : Un schéma à un pas de temps est L^2 stable ssi

$$\exists \nu \geq 0 \quad \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{S}_h(\xi, \Delta t)| \leq 1 + \nu \Delta t$$

Si la condition est réalisée avec $\nu = 0$, on parle de **stabilité uniforme**.



Stabilité ?

Le schéma de Lax Friedrichs



Rappel

$$\frac{u_j^{n+1} - \left(\frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}\right)}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$

☑ C'est un schéma **explicite** à un pas de temps.

$$u_j^{n+1} = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) u_{j+1}^n + \left(\frac{1+\alpha}{2}\right) u_{j-1}^n$$

Les schémas explicites sont très peu coûteux (en terme de calcul et de stockage)

☑ La **vitesse de propagation numérique** est $V_{num} = h / \Delta t$
Condition nécessaire de convergence $V_{num} \geq c \iff \alpha := \frac{c \Delta t}{h} \leq 1$

☑ Si $\alpha \neq 1$, le schéma est consistant **d'ordre 1 en temps et en espace** à fixé.

$$\varepsilon_j^n = \frac{c(c\alpha\Delta t - h)}{2\alpha} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^2) = -\frac{ch(1-\alpha^2)}{2\alpha} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^2)$$

on utilisera cette formule plus tard

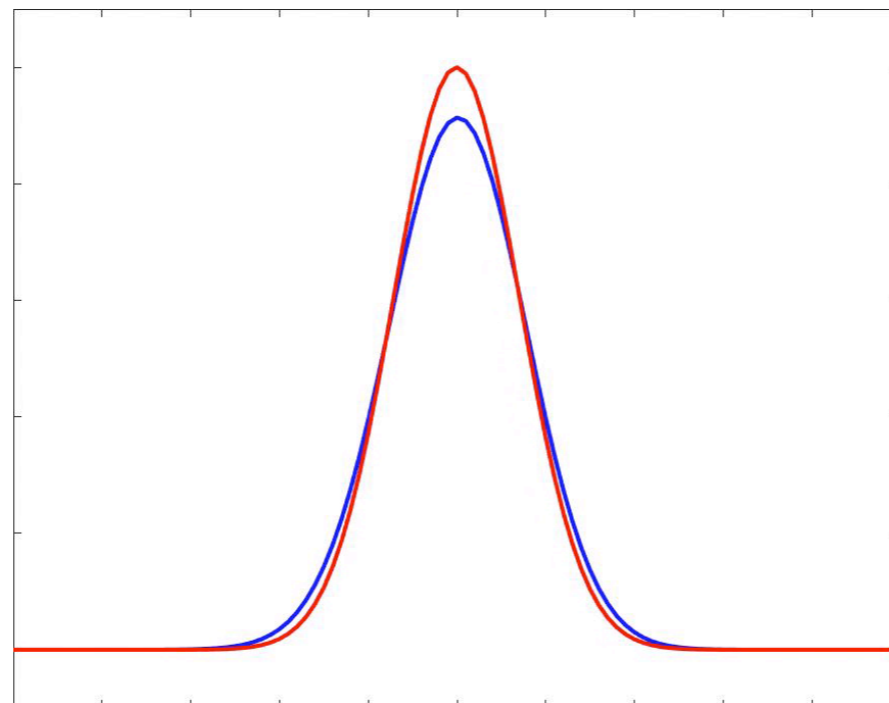
☑ Le schéma est **stable** si et seulement si $\alpha \leq 1$.

☑ Il est donc convergent d'ordre 1 en temps et en espace ssi $\alpha \leq 1$

C'est le **théorème de Lax**.

Le schéma de Lax Friedrichs

Rappel

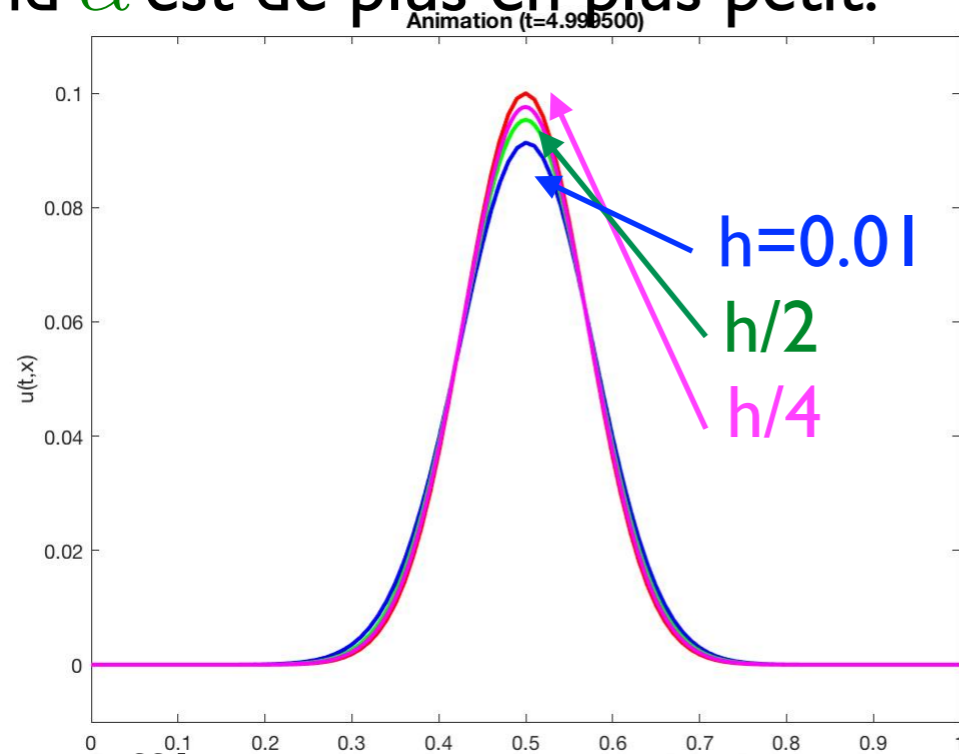


solution de l'EDP
solution du schéma

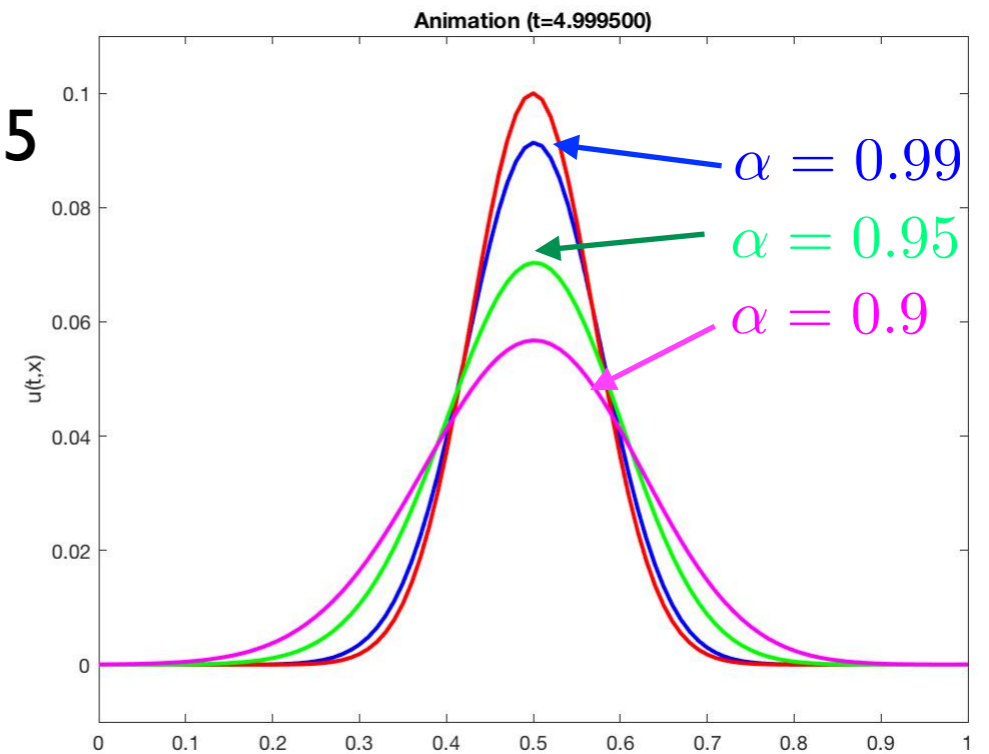
La solution au cours du temps : $h=0.01$, $\alpha = 0.99$

Sous condition CFL le schéma est bien convergent quand $(\Delta t, h) \rightarrow 0$

Mais à $(\Delta t, h)$ fixé, on observe un phénomène de dissipation numérique qui s'accroît quand α est de plus en plus petit.



Solution à T=5



...pour différentes valeurs de h , α fixé

... pour différentes valeurs de α , h fixé

Un schéma implicite (voir Exo I du TD4)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} \right) + c \frac{1}{2} \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} + \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} \right) = 0$$

☑ C'est un schéma **implicite** à **un pas de temps**.

On ne peut pas calculer les $\{u_j^{n+1}, j \in \mathbb{Z}\}$ indépendamment les uns des autres.

Les schémas implicites sont plus coûteux (en terme de stockage (stockage de la matrice) et de calcul (il faut l'inverser)).

☑ La **vitesse de propagation numérique** est infinie.

C'est en général le cas pour les schémas implicites (pas de condition nécessaire de CV)

☑ Le schéma est consistant **d'ordre 2 en temps et en espace** et on a

$$\varepsilon_j^n = C(\alpha) h^2 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{j+1/2}^{n+1/2} + \mathcal{O}(\Delta t^3 + h^3)$$

on utilisera cette formule plus tard

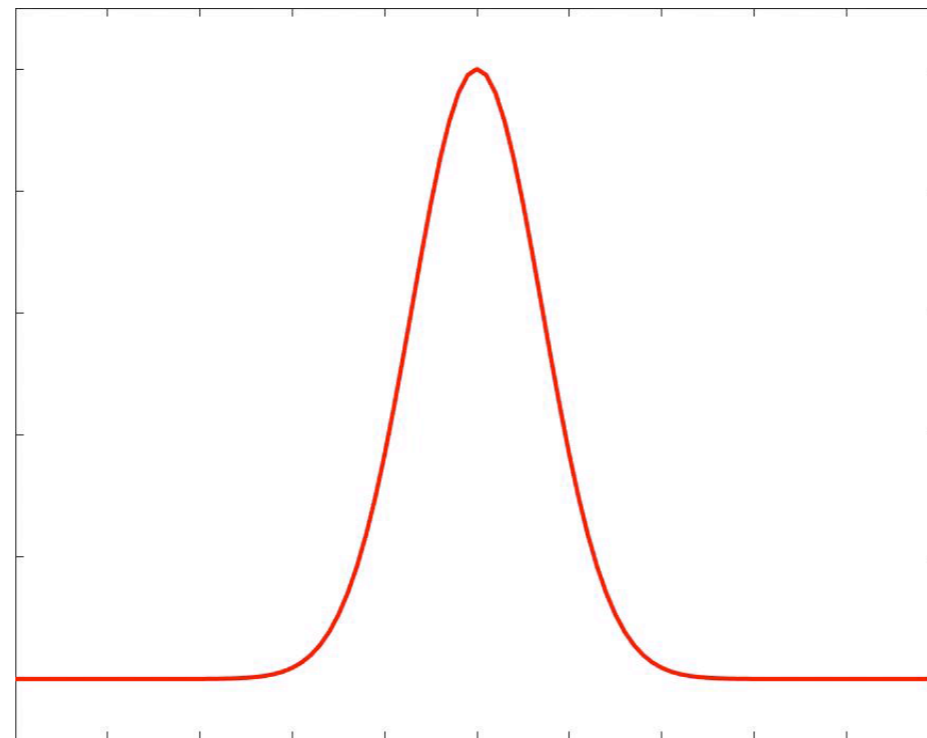
☑ Le schéma est **inconditionnellement stable**.

Il n'y a aucune contrainte sur la discrétisation, i.e. sur le rapport $\frac{\Delta t}{h}$

☑ Il est donc convergent d'ordre 2 en temps et en espace.

Un schéma implicite (voir Exo I du TD4)

Rappel

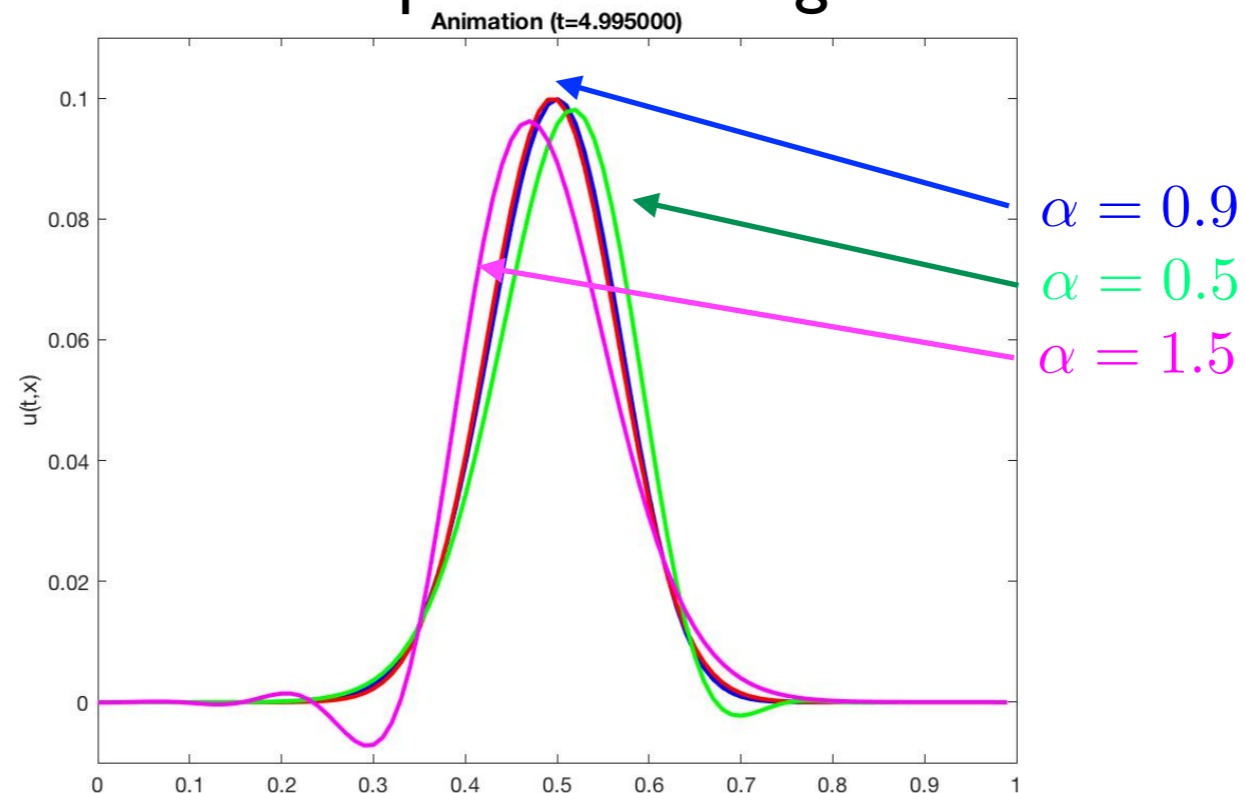


solution de l'EDP
solution du schéma

La solution au cours du temps : $h=0.01$, $\alpha = 1.5$

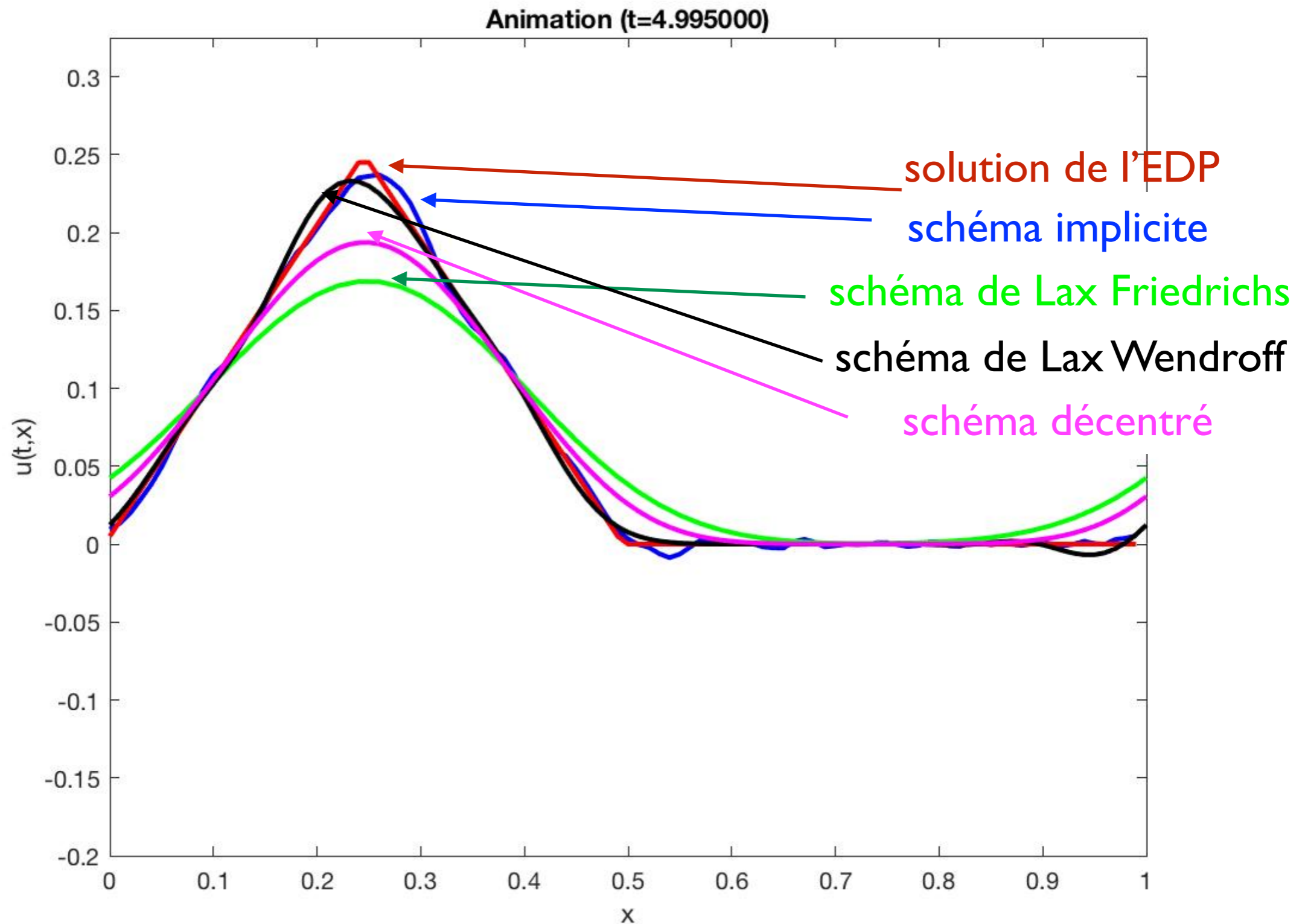
Le schéma est stable quelle que soit la valeur de α . On observe un phénomène de dispersion numérique qui s'accroît quand α s'éloigne de 1

Solution à $T=5$...



... pour différentes valeurs de α , h fixé

Comparaison de schémas



En plus de l'ordre de consistance et la stabilité, la dissipation numérique et la dispersion numérique constitue d'autres éléments de comparaison.

Notion de dissipation et dispersion

Trouver $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

\mathcal{F}

Trouver $\hat{u}(\xi, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{d\hat{u}}{dt} + i c \xi \hat{u} = 0 \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

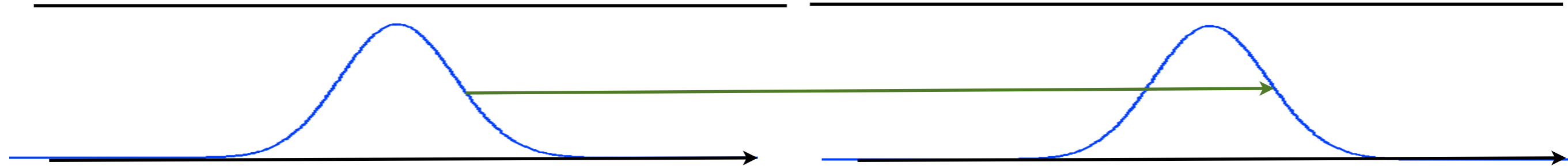
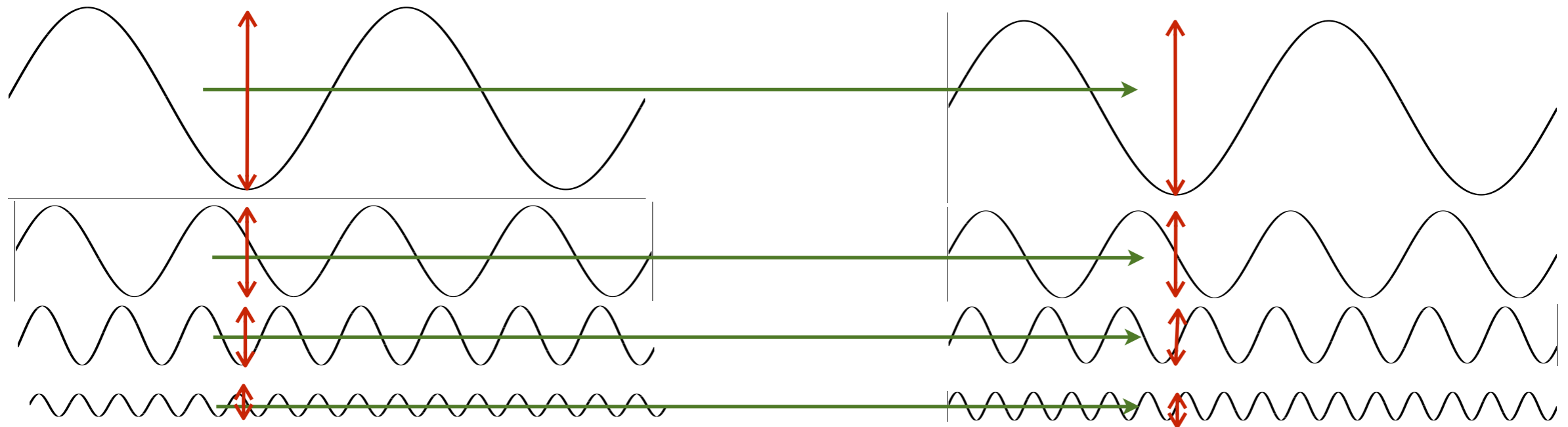
$$\hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}^0(\xi),$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\xi, t) = e^{-i c \xi t} \hat{u}^0(\xi),$$

$$u^0(x) = \int \hat{u}^0(\xi) e^{i x \xi} d\xi$$

\rightarrow

$$u(x, t) = \int \hat{u}^0(\xi) e^{i(x - ct)\xi} d\xi$$



L'équation de transport n'est **ni dissipative** (les ondes planes $e^{i\xi x}$ ne sont pas atténuées au cours du temps) **ni dispersive** (les ondes planes se propage toutes à la même vitesse c)

Notion de dissipation et dispersion

Trouver $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

\mathcal{F}

Trouver $\hat{u}(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{d\hat{u}}{dt} + (ic\xi + \varepsilon\xi^2)\hat{u} = 0 \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

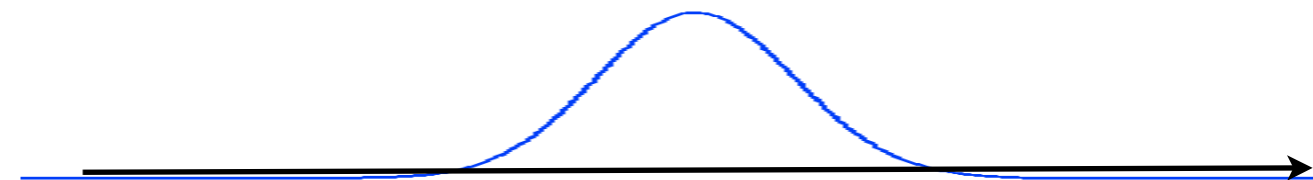
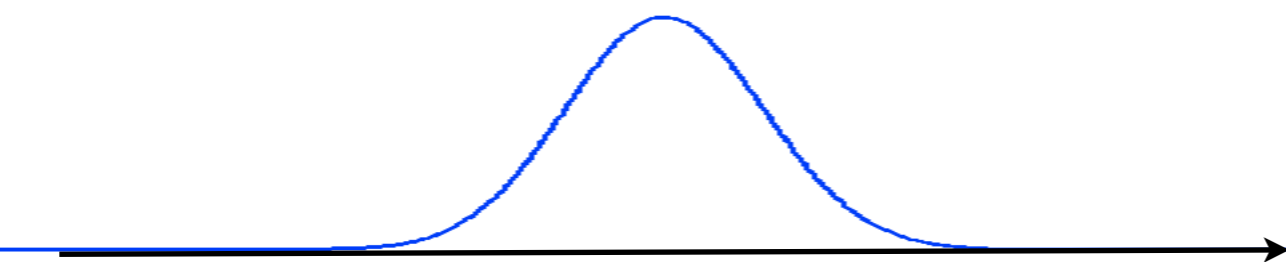
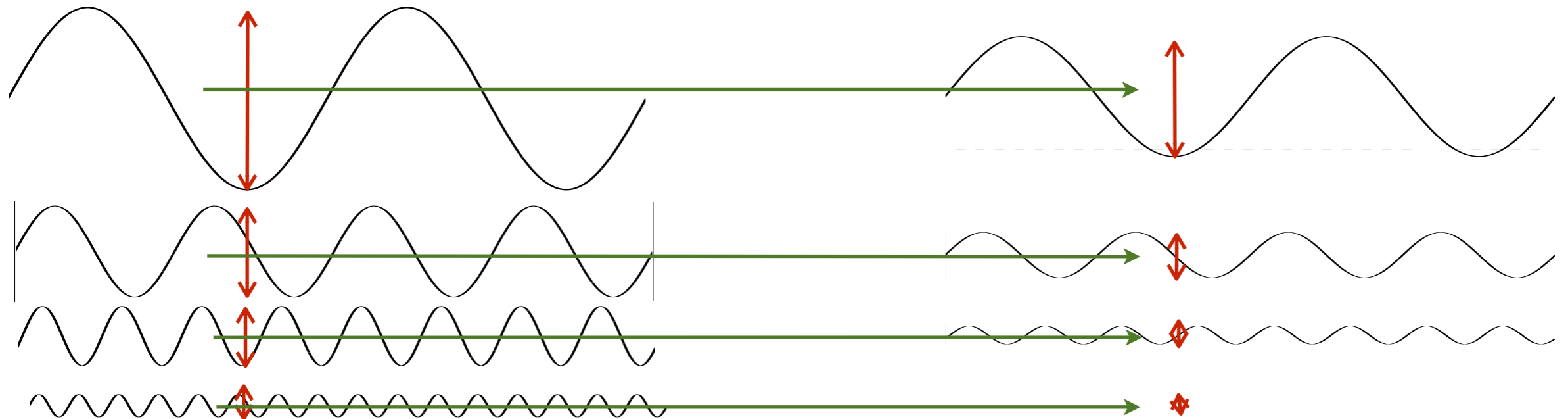
$$\hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}^0(\xi),$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\xi, t) = e^{-\varepsilon\xi^2 t} e^{-ic\xi t} \hat{u}^0(\xi),$$

$$u^0(x) = \int \hat{u}^0(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

\rightarrow

$$u(x, t) = \int \hat{u}^0(\xi) e^{-\varepsilon\xi^2 t} e^{i(x-ct)\xi} d\xi$$



Cette EDP, appelée aussi équation d'advection diffusion, est **dissipative** (les ondes planes $e^{i\xi x}$ sont atténuées au cours du temps, le coefficient d'atténuation dépendant de ξ) mais elle n'est **pas dispersive**.

Notion de dissipation et dispersion

Trouver $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

\mathcal{F}

Trouver $\hat{u}(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{d\hat{u}}{dt} + (ic\xi - iB\xi^3)\hat{u} = 0 \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

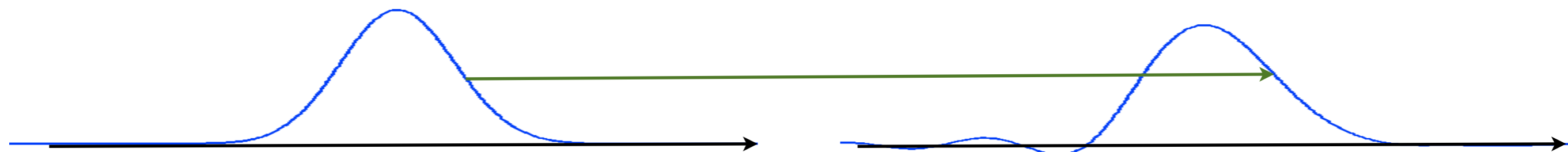
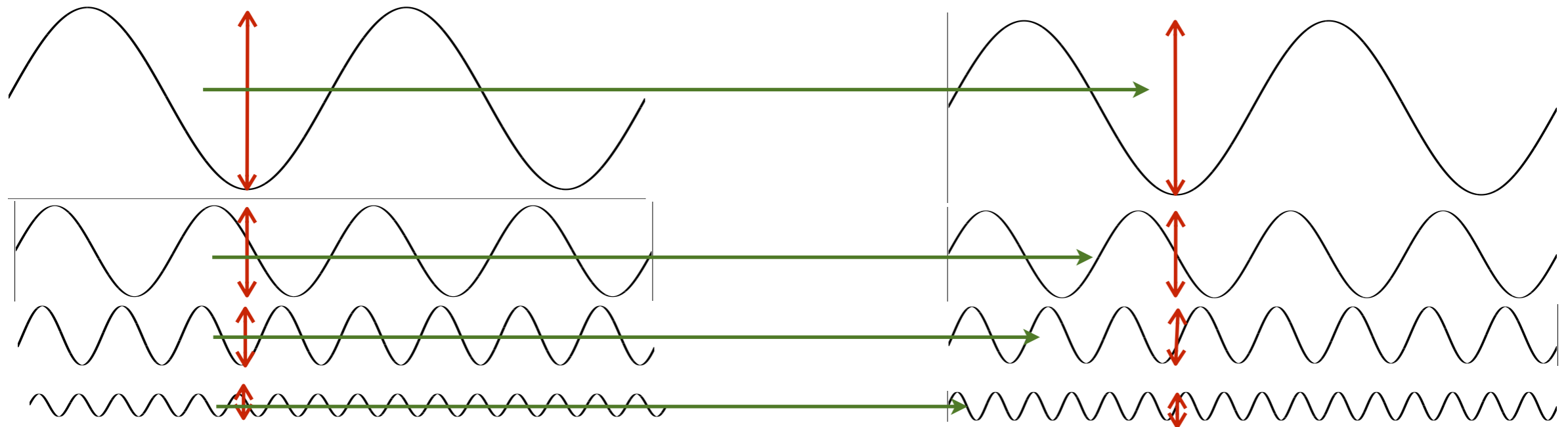
$$\hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}^0(\xi),$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\xi, t) = e^{-i(c-B\xi^2)\xi t} \hat{u}^0(\xi),$$

$$u^0(x) = \int \hat{u}^0(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

\rightarrow

$$u(x, t) = \int \hat{u}^0(\xi) e^{i(x-(c-B\xi^2)t)\xi} d\xi$$



Cette EDP, appelée aussi équation de Korteweg-De Vries linéarisée, est **dispersive** (les ondes planes $e^{i\xi x}$ ne se propagent pas à la même vitesse) mais elle n'est **pas dissipative**.

Dissipation et dispersion numérique

Tous les schémas à un pas de temps peuvent se réécrire

$$\mathbf{u}_h^{n+1} = S_h(\Delta t) \mathbf{u}_h^n \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{\mathbf{u}}_h^{n+1}(\xi) = S_h(\xi, \Delta t) \widehat{\mathbf{u}}_h^n(\xi) \implies \widehat{\mathbf{u}}_h^n(\xi) = S_h(\xi, \Delta t)^n \widehat{\mathbf{u}}_0(\xi)$$

Si on écrit

$$S_h(\xi, \Delta t) = e^{-a_h(\xi, \Delta t)\Delta t} e^{-i c_h(\xi, \Delta t)\xi\Delta t}$$

la TF de la solution du schéma est donnée par

$$\widehat{\mathbf{u}}_h(\xi, t^n) := \widehat{\mathbf{u}}_h^n(\xi) = e^{-a_h(\xi, \Delta t)t^n} e^{-i c_h(\xi, \Delta t)\xi t^n} \widehat{\mathbf{u}}^0(\xi)$$

la solution du schéma est donc

$$\mathbf{u}_h(x, t^n) = \int e^{-a_h(\xi, \Delta t)t^n} e^{i\xi(x - c_h(\xi, \Delta t)t^n)} \widehat{\mathbf{u}}^0(\xi) d\xi$$

Definition

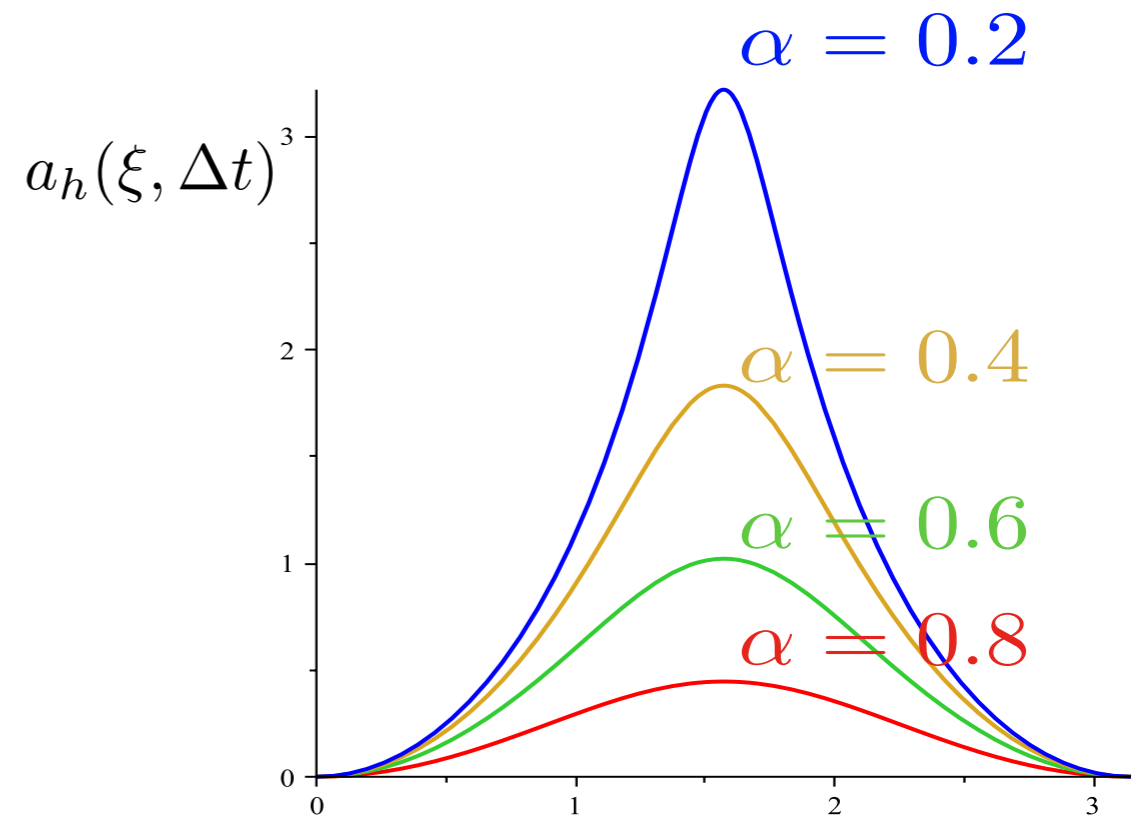
$$c_h(\xi, \Delta t) = -\frac{1}{\xi\Delta t} \text{Arg } S_h(\xi, \Delta t) \iff \text{dispersion numérique (homogène à une vitesse)}$$

$$a_h(\xi, \Delta t) = -\frac{1}{\Delta t} \ln |S_h(\xi, \Delta t)| \iff \text{dissipation numérique (homogène à l'inverse d'un temps)}$$
$$a_h(\xi, \Delta t) \geq 0 \quad \text{si} \quad |S_h(\xi, \Delta t)| \leq 1$$

Dissipation et dispersion numérique

Pour le schéma de Lax Friedrichs $\hat{S}_h(\xi, \Delta t) = \cos \xi h - i \alpha \sin \xi h$

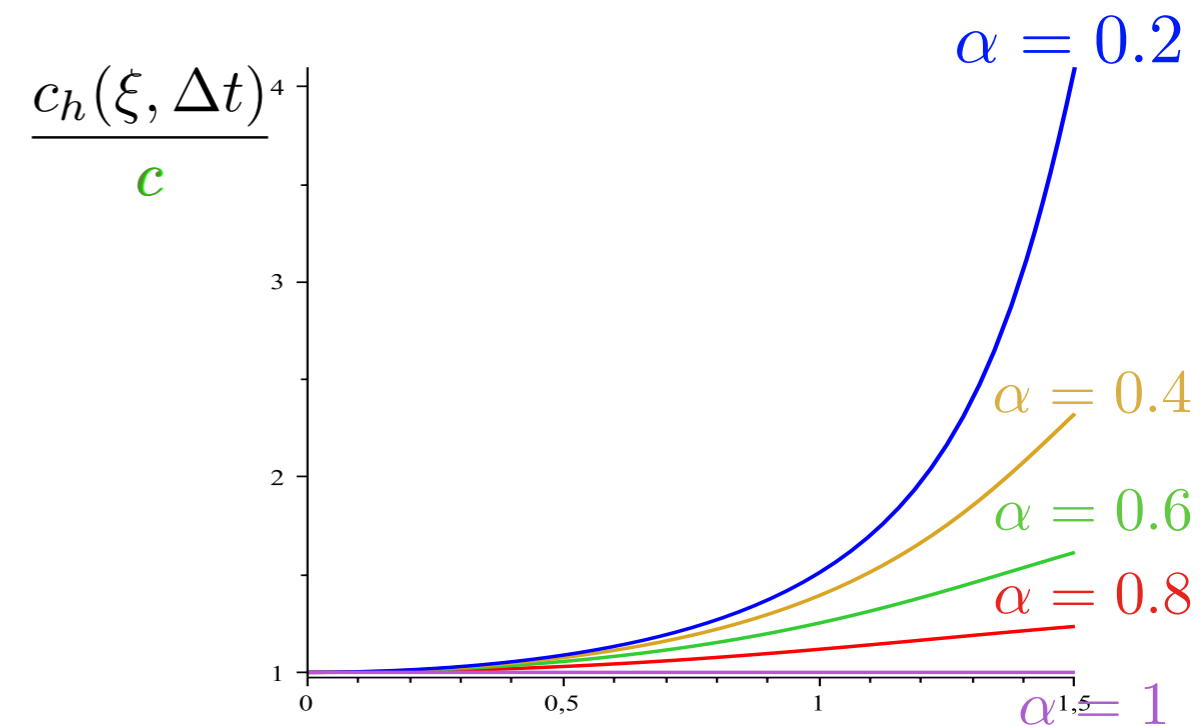
$$\begin{aligned}
 a_h(\xi, \Delta t) &= -\frac{1}{\Delta t} \ln |S_h(\xi, \Delta t)| \\
 &= -\frac{1}{2\Delta t} \ln \left[\cos^2 \xi h + \alpha^2 \sin^2 \xi h \right] \\
 &= -\frac{1}{2\Delta t} \ln \left[1 - (1 - \alpha^2) \sin^2 \xi h \right] \\
 &\sim \frac{1 - \alpha^2}{2\alpha} c h \xi^2 > 0 \text{ ssi } \alpha < 1 \\
 &\text{d'ordre 1}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 c_h(\xi, \Delta t) &= -\frac{1}{\xi \Delta t} \text{Arg } S_h(\xi, \Delta t) \\
 &= \frac{c}{\alpha \xi h} \text{Arctg} \left[\alpha \text{tg}(\xi h) \right]
 \end{aligned}$$

$$\frac{c_h(\xi, \Delta t)}{c} = 1 + \frac{1}{3} (1 - \alpha^2) \xi^2 h^2 + O(\xi^4 h^4)$$

d'ordre 2



Dissipation et dispersion numérique

Pour le schéma implicite $\widehat{S}_h(\xi, \Delta t) = \frac{\cos(\xi h/2) - i \alpha \sin(\xi h/2)}{\cos(\xi h/2) + i \alpha \sin(\xi h/2)}$

$$a_h(\xi, \Delta t) = -\frac{1}{\Delta t} \ln |S_h(\xi, \Delta t)|$$

$$= 0$$

le schéma implicite n'est pas dissipatif.

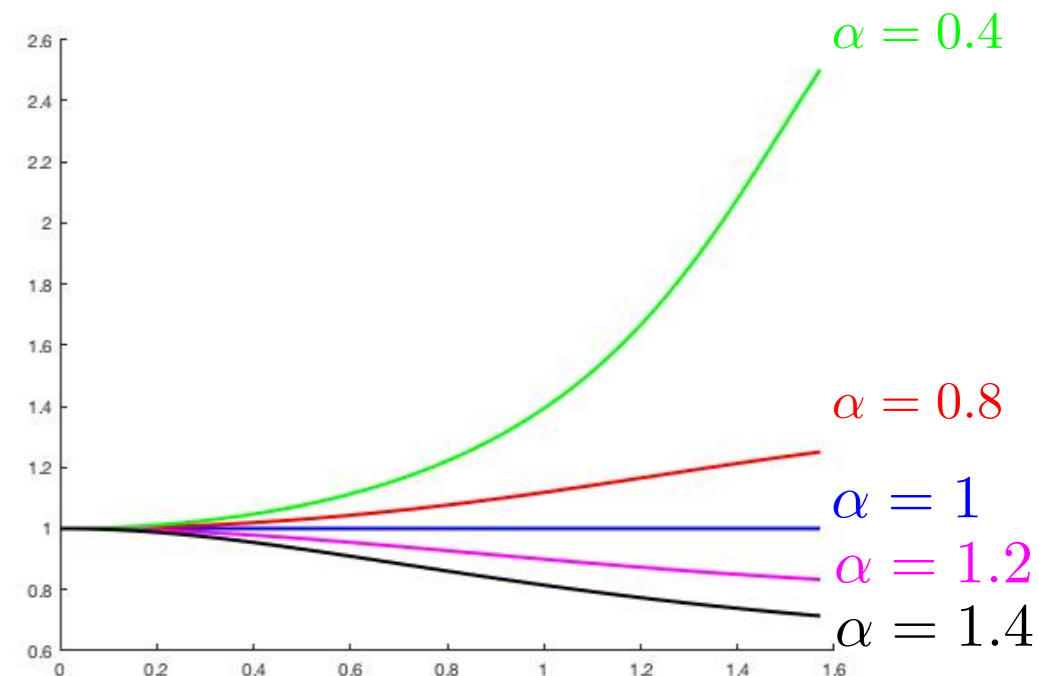
$$c_h(\xi, \Delta t) = -\frac{1}{\xi \Delta t} \text{Arg } S_h(\xi, \Delta t)$$

$$= \frac{2c}{\alpha \xi h} \text{Arctg} \left[\alpha \text{tg} (\xi h/2) \right]$$

$$\frac{c_h(\xi, \Delta t)}{c} = 1 + \frac{2}{3} (1 - \alpha^2) \xi^2 h^2 + O(\xi^4 h^4)$$

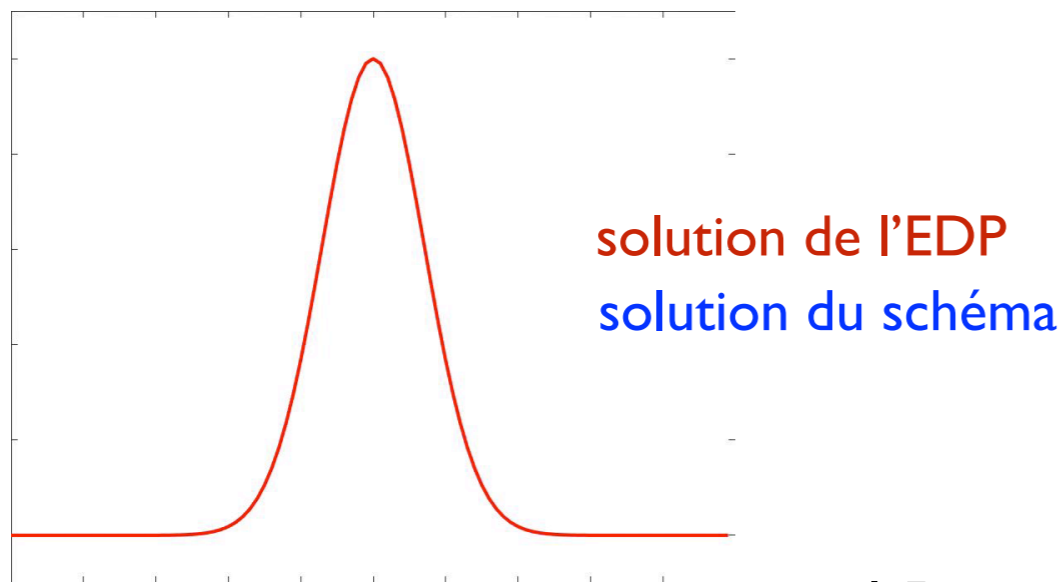
d'ordre 2

$$\frac{c_h(\xi, \Delta t)}{c}$$

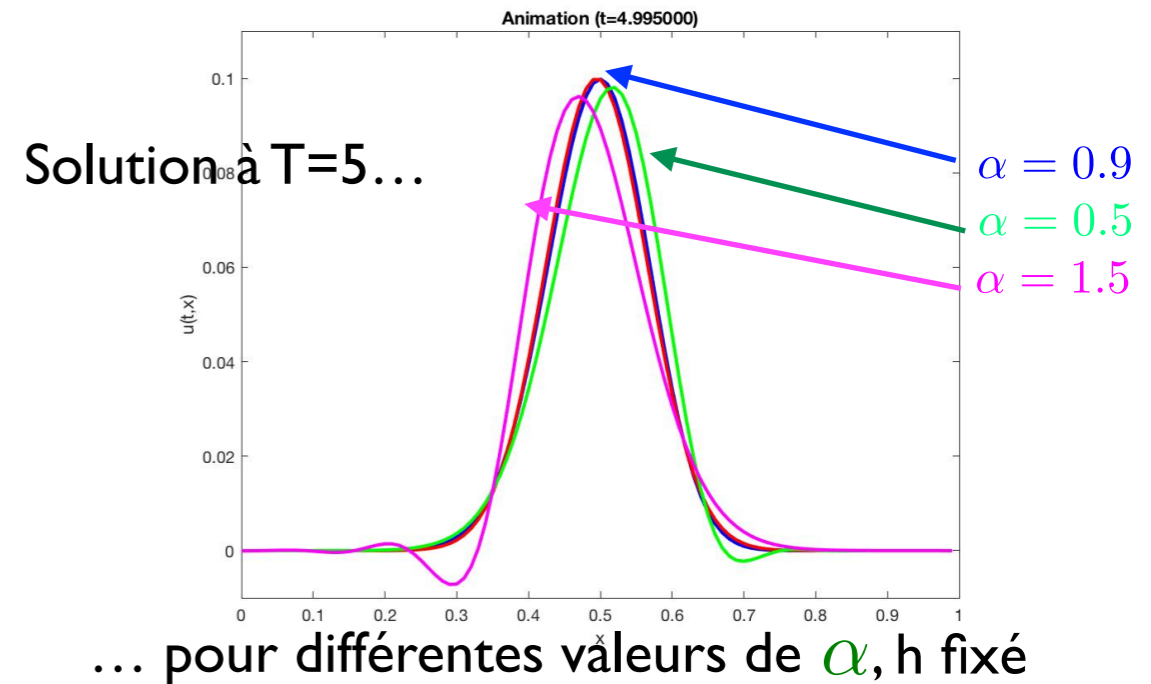


Dissipation et dispersion numérique

Pour le schéma implicite $\widehat{S}_h(\xi, \Delta t) = \frac{\cos(\xi h/2) - i \alpha \sin(\xi h/2)}{\cos(\xi h/2) + i \alpha \sin(\xi h/2)}$



La solution au cours du temps : $h=0.01$, $\alpha = 1.5$

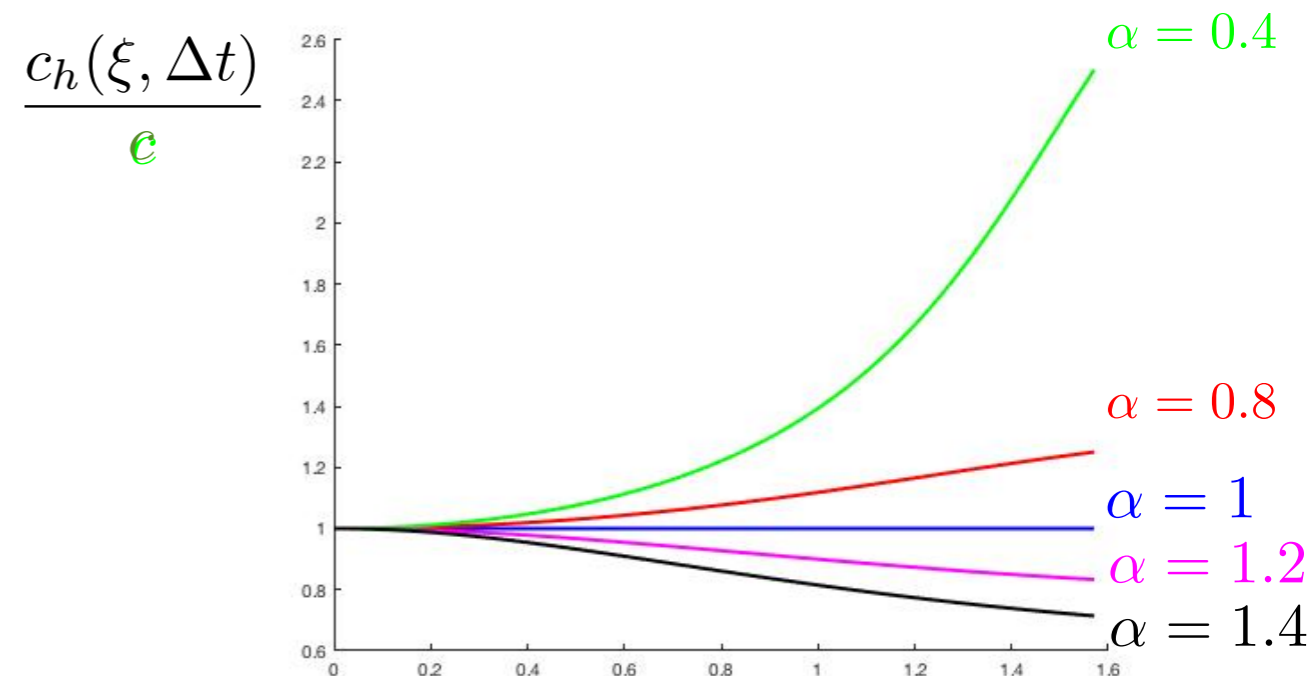


$$c_h(\xi, \Delta t) = -\frac{1}{\xi \Delta t} \text{Arg } S_h(\xi, \Delta t)$$

$$= \frac{2c}{\alpha \xi h} \text{Arctg} \left[\alpha \text{tg} (\xi h/2) \right]$$

$$\frac{c_h(\xi, \Delta t)}{c} = 1 + \frac{2}{3} (1 - \alpha^2) \xi^2 h^2 + O(\xi^4 h^4)$$

d'ordre 2



Equation “équivalente”

Le comportement pratique d'un schéma peut s'analyser en regardant le terme dominant dans l'erreur de consistance.

Definition

On appelle **équation équivalente** d'un schéma, l'équation obtenue en ajoutant au modèle le terme dominant de l'erreur de consistance.

Remarques

- L' équation équivalente ne remplace pas le calcul des dissipation et dispersion numérique mais elle donne des indications qualitatives.
- En général, en utilisant l'équation, on peut réécrire le terme dominant qu'avec des dérivées en espace. Suivant que l'équation équivalente est de type advection-diffusion ou de type KDV, on déduit si le schéma est principalement dissipatif ou dispersif.

Equation(s) “équivalente(s)”

Pour le schéma de Lax Friedrichs

$$\varepsilon_j^n = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n + c \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^n - \frac{c h}{2\alpha} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^2)$$

$$\downarrow \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_j^n = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n + c \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n - \frac{c h(1 - \alpha^2)}{2\alpha} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^2)$$

\downarrow équation équivalente

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{c h(1 - \alpha^2)}{2\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

L'équation équivalente est donc **dissipative**.

Rappel $a_h(\xi, \Delta t) \sim \frac{1 - \alpha^2}{2\alpha} c h \xi^2$

Equation(s) “équivalente(s)”

Pour le schéma implicite

$$\varepsilon_j^n = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n + c \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n - \frac{2c}{3}(1 - \alpha^2) h^2 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^4 + h^4)$$

↓ équation équivalente

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2c}{3}(1 - \alpha^2) h^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

L'équation équivalente est donc **dispersive**.

Rappel $a_h(\xi, \Delta t) = 0$

$$\frac{c_h(\xi, \Delta t)}{c} = 1 + \frac{2}{3}(1 - \alpha^2)\xi^2 h^2 + \mathcal{O}(\xi^4 h^4)$$

Les termes qui suivent dans l'erreur de consistance font intervenir seulement des dérivées d'ordre impair (pas de dissipation numérique)

Conclusions

Comment choisir un schéma? Il faut tenir compte de ses caractéristiques:

Explicite ou implicite.

Les schémas implicites sont plus coûteux en terme de calcul et de stockage que les schémas explicites.

Ordre de consistance

L'ordre de consistance correspond souvent à l'ordre de convergence (attention au schéma de démarrage). Plus l'ordre est élevé, plus précis est le schéma.

Stabilité

Les schémas implicites sont souvent inconditionnellement stables.

Dissipation numérique

Si l'énergie ou l'amplitude de la solution est un élément important dans le phénomène, on ne choisit pas un schéma trop dissipatif.

Dispersion numérique

Si la vitesse de propagation est un élément important, on ne choisit pas un schéma trop dispersif.

Approximation par différences finies de l'équation de transport

- Dissipation et dispersion numérique
- Equations équivalentes

Schémas numériques pour les équations hyperboliques non linéaires 1D

- Schémas conservatifs...
- ... entropiques...
- ... monotones...
- ... et le schéma de Godunov

**hors programme
pour l'examen**

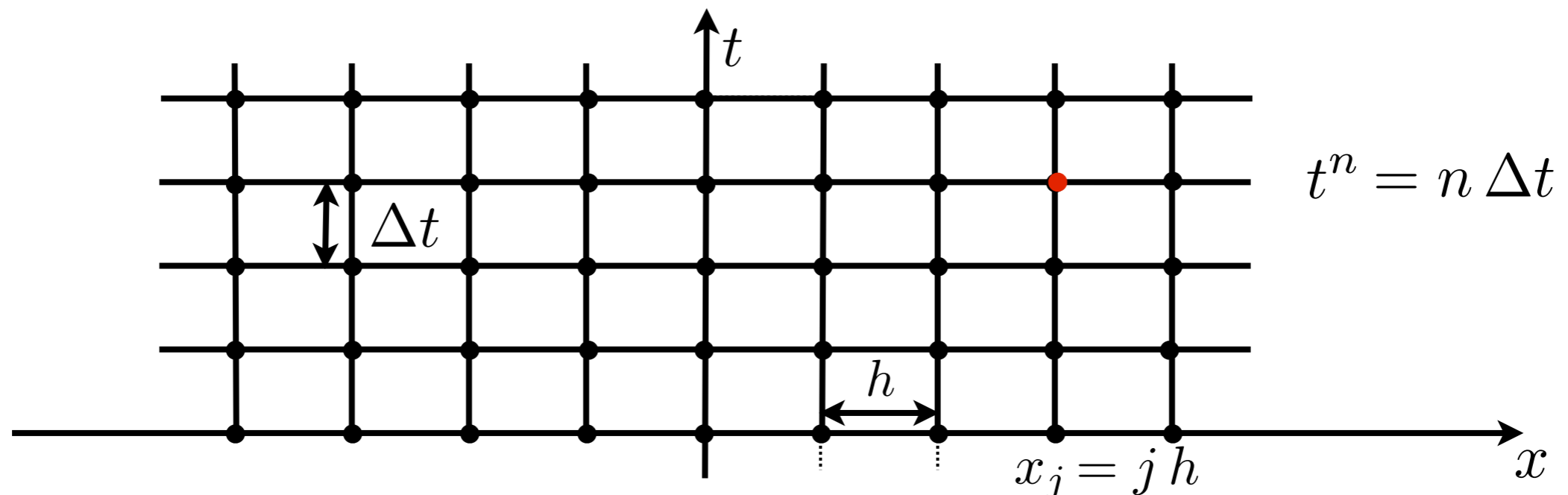
Approximation numérique

On se donne un pas de discrétisation en espace h et un pas de discrétisation en temps Δt et on va calculer

$$u_j^n \sim u(x_j, t^n) \quad x_j = j h \quad t^n = n \Delta t$$

où u est solution de l'EDP hyperbolique non linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$



Approximation numérique

On va étudier des schémas explicites à un pas de temps et 3 pas d'espace qui peuvent s'écrire sous la forme

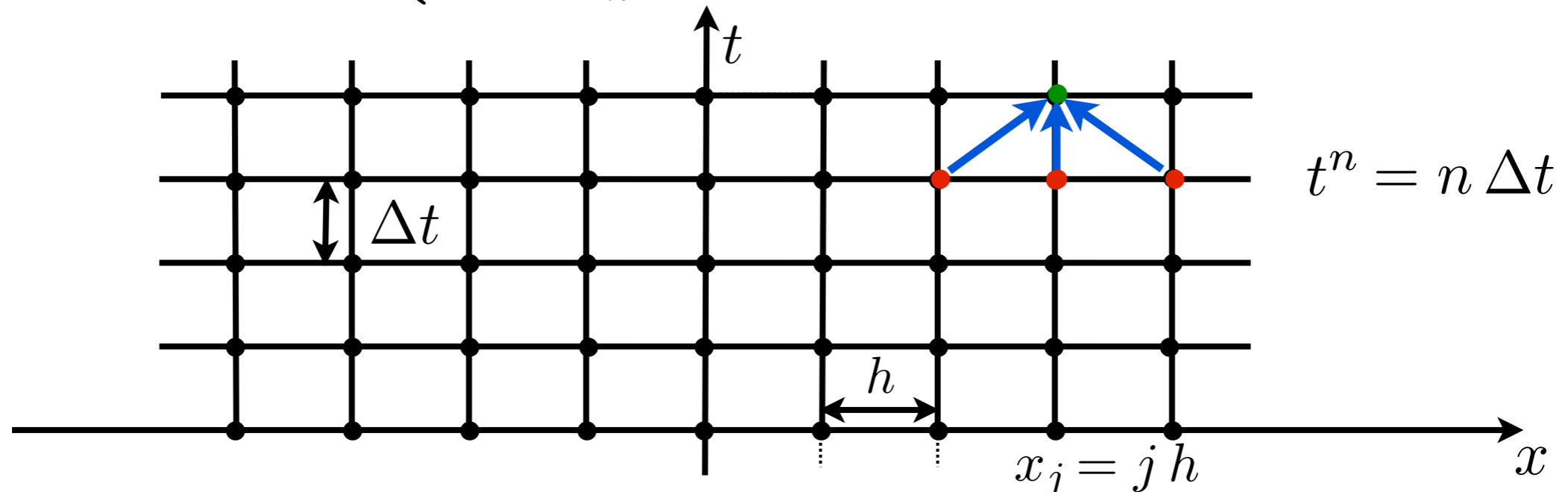
$$u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$$

Exemple: le schéma décentré

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t \frac{f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n)}{h}, & \text{si } a(u_j^n) \geq 0, \\ u_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t \frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)}{h}, & \text{si } a(u_j^n) < 0. \end{cases}$$

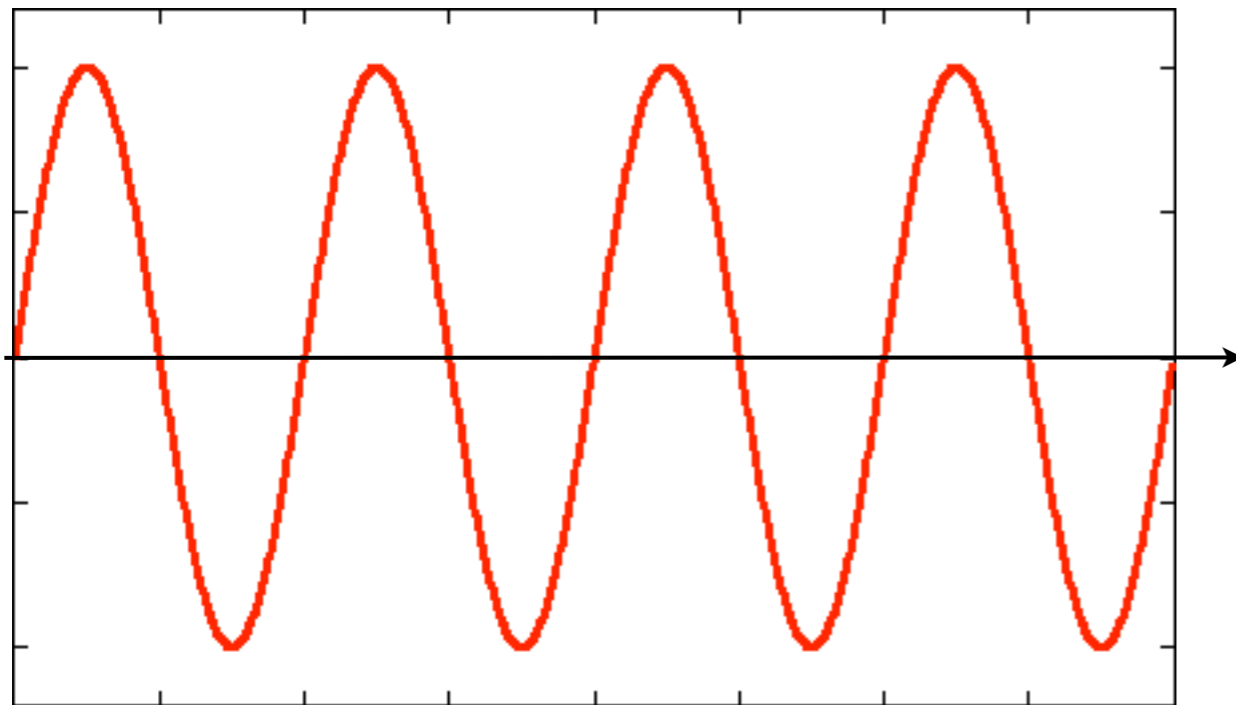
qui se réécrit $u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$

$$H(u, v, w) = \begin{cases} v - \frac{\Delta t}{h} (f(v) - f(u)), & \text{si } a(v) \geq 0, \\ v - \frac{\Delta t}{h} (f(w) - f(v)), & \text{si } a(v) < 0. \end{cases}$$



Exemple du schéma décentré

$$f(u) = u + \frac{u^2}{2} \quad u_0(x) = \sin x$$

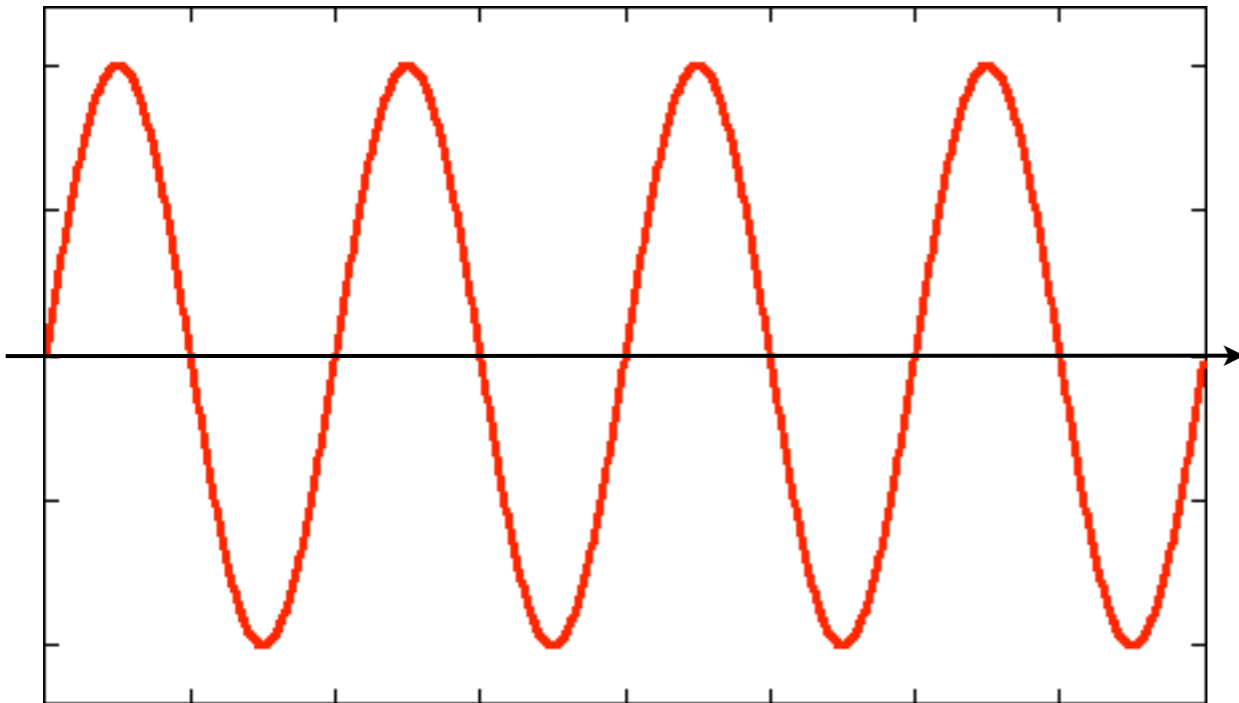


solution exacte

Pour cette donnée initiale, la **solution** est **classique** jusqu'à un certain temps, où une discontinuité apparaît. Cette discontinuité se propage ensuite à une vitesse donnée par la **relation de Rankine Hugoniot**. C'est la **solution faible entropique** car les chocs sont descendants (le flux étant convexe).

Exemple du schéma décentré

$$f(u) = u + \frac{u^2}{2} \quad u_0(x) = \sin x$$



solution exacte

solution approchée par le schéma décentré
(sous condition CFL)

On montre que le schéma décentré (**consistant** et **stable** sous condition CFL pour des EDPs linéaires) approche bien une solution classique (avec donnée initiale régulière) mais pas une solution faible : la relation de Rankine Hugoniot n'est pas satisfaite! (*ici le choc a une vitesse nulle*).

Pour des EDPs non linéaires, d'autres propriétés sont nécessaires pour qu'un schéma converge vers la solution faible entropique du problème...

Schéma conservatif

Pour introduire les schémas dits conservatifs, on s'inspire de la notion de solution faible définie par une intégrale (lien avec la méthode des volumes finis):

On intègre la loi de conservation scalaire entre $x_{j-1/2}$ et $x_{j+1/2}$

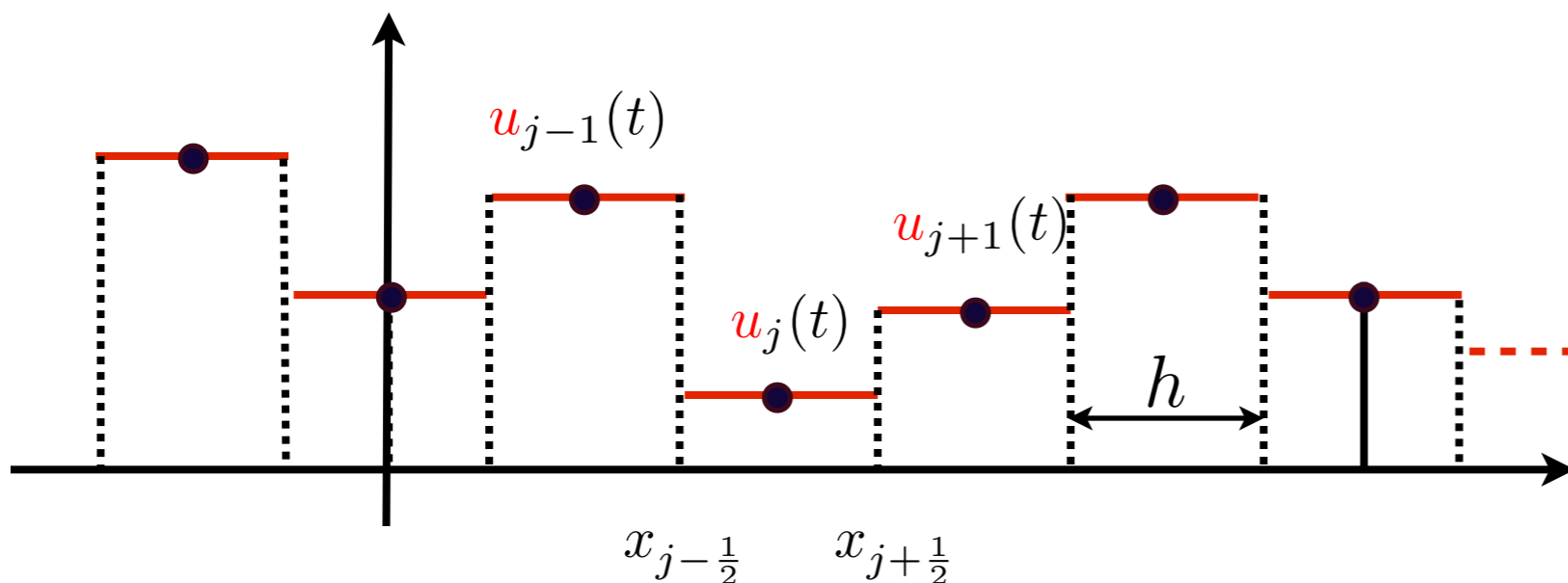
$$\forall t > 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t) dx + \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \frac{\partial}{\partial x} f(u(x, t)) dx = 0,$$

Si on pose $u_j(t) = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t) dx$

$$\forall t > 0, \quad \frac{d}{dt} u_j(t) + \frac{f(u(x_{j+1/2}, t)) - f(u(x_{j-1/2}, t))}{h} = 0,$$

Le schéma numérique conservatif est une approximation de cette équation.

Comment approcher la quantité $f(u(x_{j\pm 1/2}, t))$ à partir des $u_l(t)$?



Choix naturel

$$f(u(x_{j-1/2}, t)) \sim g(u_{j-1}(t), u_j(t))$$

$$f(u(x_{j+1/2}, t)) \sim g(u_j(t), u_{j+1}(t))$$

où g est un **flux numérique** à définir.

Schéma **conservatif**

Définition (Schéma conservatif)

On dit qu'un schéma est **conservatif** s'il existe une fonction g régulière telle que l'on ait :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{h} \left(g(u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-1}^n, u_j^n) \right)$$

La fonction g (définie à une constante additive près) est appelée le **flux numérique**.

- Schéma de la forme $u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$

$$H(u, v, w) = v - \frac{\Delta t}{h} \left(g(v, w) - g(u, v) \right)$$

Question : à quelle condition un schéma conservatif est-il **consistant** ?

Théorème : Consistance des schémas conservatifs

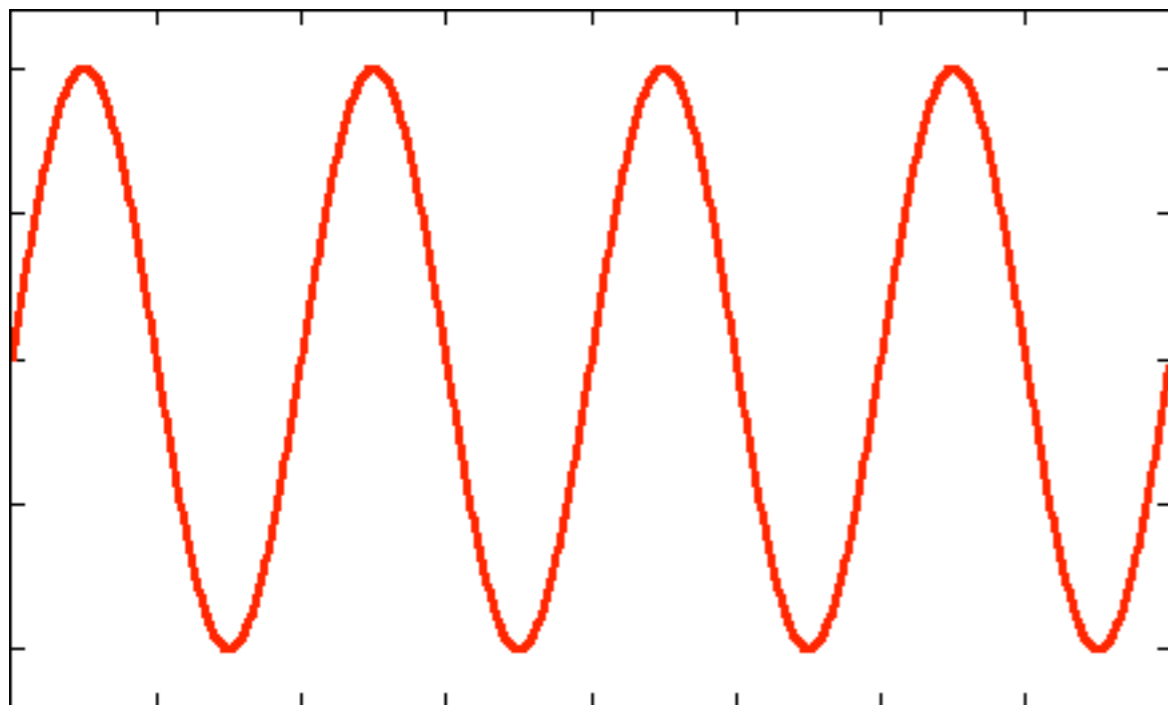
Un schéma **conservatif** est **consistant** ssi $g(u, u) = f(u) + cte, \quad u \in \mathbb{R}$

Il est alors au moins d'ordre 1.

Il existe des schémas **consistants** et **non conservatifs** (ex : schéma décentré)

Un schéma **conservatif** : le schéma de Murman-Roe

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) \quad \text{avec} \quad H(u, v, w) = v - \frac{\Delta t}{h} \left(g(v, w) - g(u, v) \right)$$
$$g(u, v) = \begin{cases} f(u), & \text{si } \tilde{a}(u, v) \geq 0, \\ f(v), & \text{si } \tilde{a}(u, v) < 0, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \tilde{a}(u, v) = \begin{cases} \frac{f(u) - f(v)}{u - v}, & \text{si } u \neq v, \\ f'(u), & \text{si } u = v, \end{cases}$$



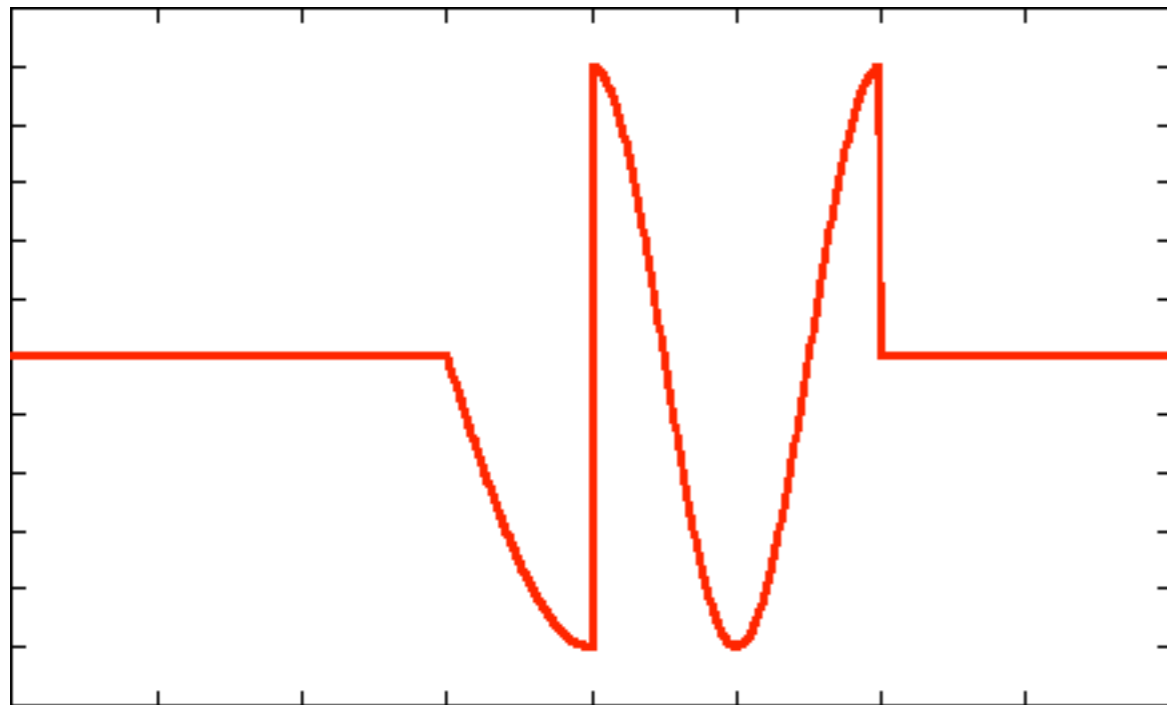
solution exacte

solution approchée par le schéma de Murman Roe

Le schéma de Murman-Roe semble approcher la solution du problème...

Un schéma **conservatif** : le schéma de Murman-Roe

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) \quad \text{avec} \quad H(u, v, w) = v - \frac{\Delta t}{h} \left(g(v, w) - g(u, v) \right)$$
$$g(u, v) = \begin{cases} f(u), & \text{si } \tilde{a}(u, v) \geq 0, \\ f(v), & \text{si } \tilde{a}(u, v) < 0, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \tilde{a}(u, v) = \begin{cases} \frac{f(u) - f(v)}{u - v}, & \text{si } u \neq v, \\ f'(u), & \text{si } u = v, \end{cases}$$



solution exacte

solution approchée par le schéma de Murman Roe

Le schéma de Murman-Roe semble approcher la solution du problème...

En fait il n'approche qu'une solution faible du problème!

Plus généralement les schéma **conservatifs** n'approche pas nécessairement la solution **entropique** du problème.

Schéma entropique

Il s'agit d'un schéma qui réalise un équivalent discret de la condition d'entropie pour le problème continu

$$\frac{\partial}{\partial t} U(\mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial x} F(\mathbf{u}) \leq 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$$

pour toute entropie (U, F)

Définition (Schéma entropique)

Un schéma **conservatif** est **entropique** si pour toute entropie (U, F) , il existe une fonction $G(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ telle que

- $G(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = F(\mathbf{u})$
- $$\frac{U(\mathbf{u}_j^{n+1}) - U(\mathbf{u}_j^n)}{\Delta t} + \frac{1}{h} \left(G(\mathbf{u}_j^n, \mathbf{u}_{j+1}^n) - G(\mathbf{u}_{j-1}^n, \mathbf{u}_j^n) \right) \leq 0$$

Schéma entropique

Théorème : Convergence des schémas conservatifs entropiques

- Si
- le schéma est stable L^∞ : $\|u_h\|_{L^\infty} \leq C$ (C indépendant de h)
 - $u_h(x, t) \rightarrow u^*(x, t)$ p.p. (x, t) quand $h \rightarrow 0$

et si le schéma est **conservatif**, **consistant** et **entropique** alors la limite u^* est une solution **faible entropique** du problème.

Schéma entropique

Théorème : Convergence des schémas conservatifs entropiques

- Si
- le schéma est stable L^∞ : $\|u_h\|_{L^\infty} \leq C$ (C indépendant de h)
 - $u_h(x, t) \rightarrow u^*(x, t)$ p.p. (x, t) quand $h \rightarrow 0$

et si le schéma est **conservatif**, **consistant** et **entropique** alors la limite u^* est une solution **faible entropique** du problème.

- La condition de stabilité L^∞ impose une condition CFL du type :

$$\left(\sup_{|v| \leq \|u^0\|} |a(v)| \right) \frac{\Delta t}{h} \leq C$$

Schéma entropique

Théorème : Convergence des schémas conservatifs entropiques

- Si
- le schéma est stable L^∞ : $\|u_h\|_{L^\infty} \leq C$ (C indépendant de h)
 - $u_h(x, t) \rightarrow u^*(x, t)$ p.p. (x, t) quand $h \rightarrow 0$

et si le schéma est **conservatif**, **consistant** et **entropique** alors la limite u^* est une solution **faible entropique** du problème.

- La condition de stabilité L^∞ impose une condition CFL du type :

$$\left(\sup_{|v| \leq \|u^0\|} |a(v)| \right) \frac{\Delta t}{h} \leq C$$

- L'existence de la limite u^* est en général difficile à démontrer (argument de compacité)

Schéma entropique

Théorème : Convergence des schémas conservatifs entropiques

- Si
- le schéma est stable L^∞ : $\|u_h\|_{L^\infty} \leq C$ (C indépendant de h)
 - $u_h(x, t) \rightarrow u^*(x, t)$ p.p. (x, t) quand $h \rightarrow 0$

et si le schéma est conservatif, consistant et entropique alors la limite u^* est une solution faible entropique du problème.

- La condition de stabilité L^∞ impose une condition CFL du type :

$$\left(\sup_{|v| \leq \|u^0\|} |a(v)| \right) \frac{\Delta t}{h} \leq C$$

- L'existence de la limite u^* est en général difficile à démontrer (argument de compacité)
- Vérifier le caractère entropique du schéma est en pratique difficile (pour toute entropie ...)

Schéma **monotone**

Définition (Schéma monotone)

Un schéma à 3 points

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$$

est dit **monotone** si et seulement si la fonction H est **croissante** par rapport à chacune de ses variables.

En pratique, H dépend de Δt et h et la monotonie n'est réalisée que sous condition CFL.

Théorème : Convergence des schémas monotones

Si un schéma est **conservatif**, **consistant** et **monotone** alors

- le schéma est stable L^∞ et $\|u_h\|_{L^\infty} \leq \|u^0\|_{L^\infty}$
- Il est **entropique**
- Il est **convergent** $u_h(x, t) \rightarrow u^*(x, t)$ p.p. (x, t) quand $h \rightarrow 0$
et u^* est la solution **faible entropique**.

Théorème : Ordre des schémas monotones

Un schéma **conservatif**, **consistant** et **monotone** est d'**ordre 1** (exactement)

Un schéma **monotone** : le schéma de Lax-Friedrichs

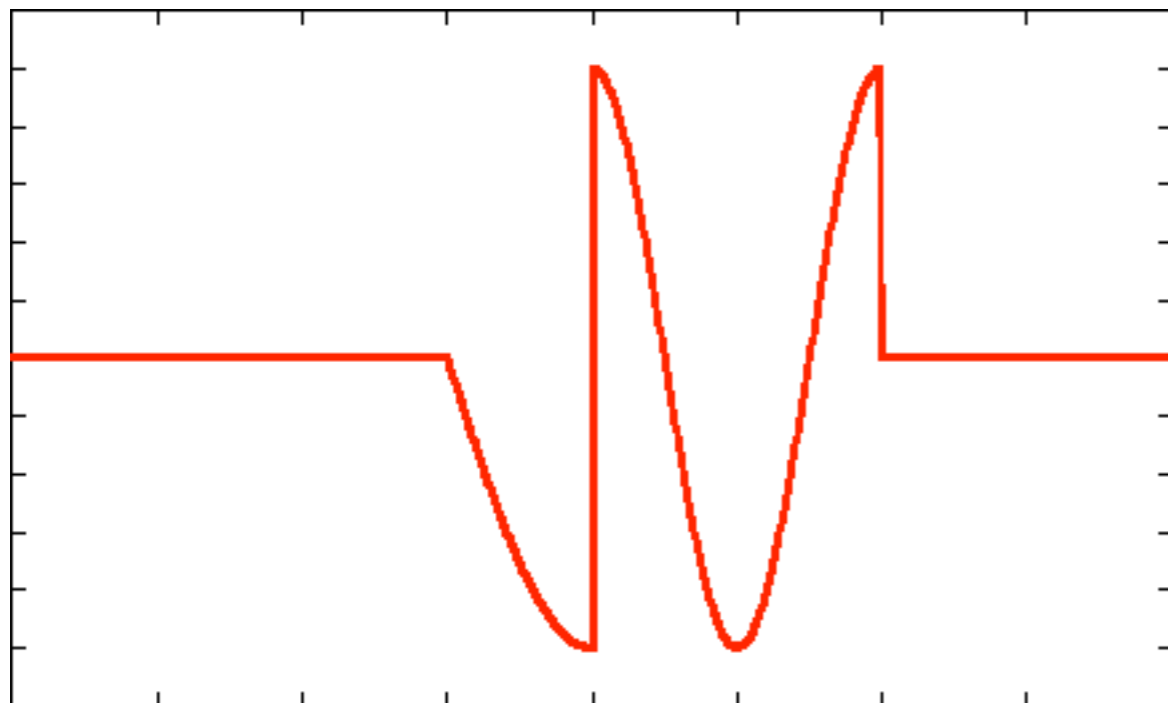
Il s'agit du schéma correspondant au flux

$$g(u, v) = \frac{1}{2} \left(f(u) + f(v) + \frac{h}{\Delta t} (u - v) \right)$$

C'est un schéma **conservatif**, **consistant** (ordre 1), **monotone** sous la condition **CFL**

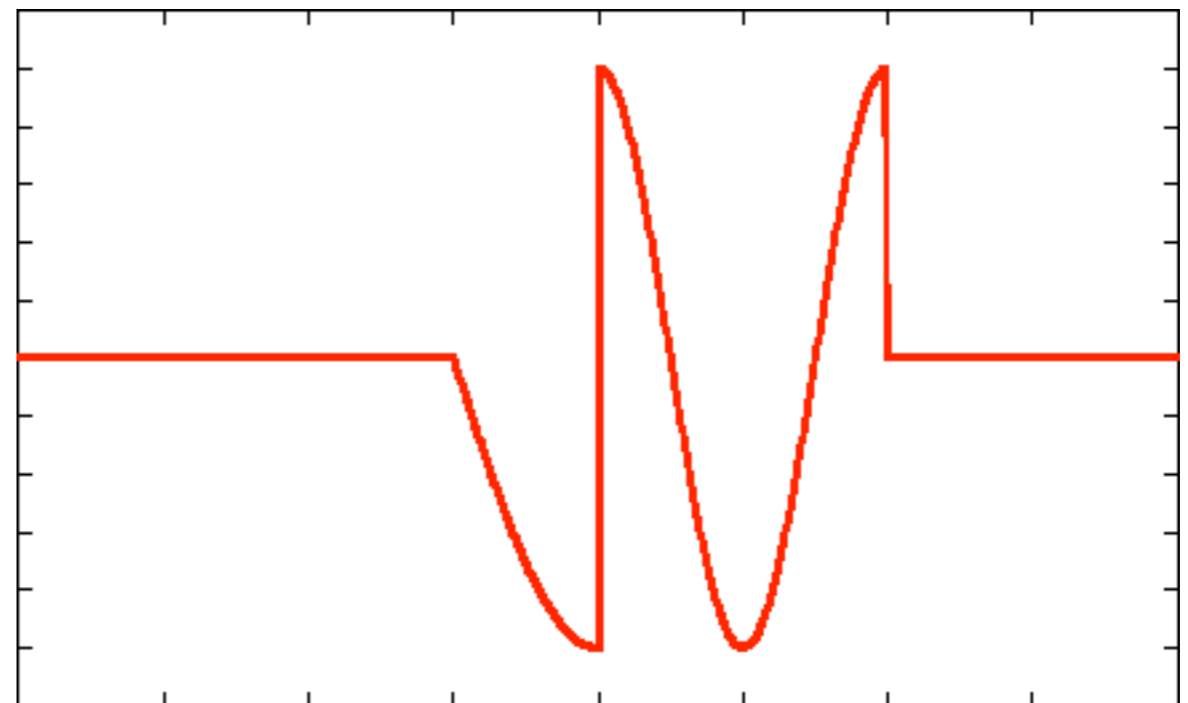
$$\left(\sup_{j \in \mathbb{Z}} |a(u_j^n)| \right) \frac{\Delta t}{h} \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \iff \quad \left(\sup_{j \in \mathbb{Z}} |a(u_j^0)| \right) \frac{\Delta t}{h} \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

solution exacte



CFL respectée

solution approchée par le schéma de Lax-Friedrichs



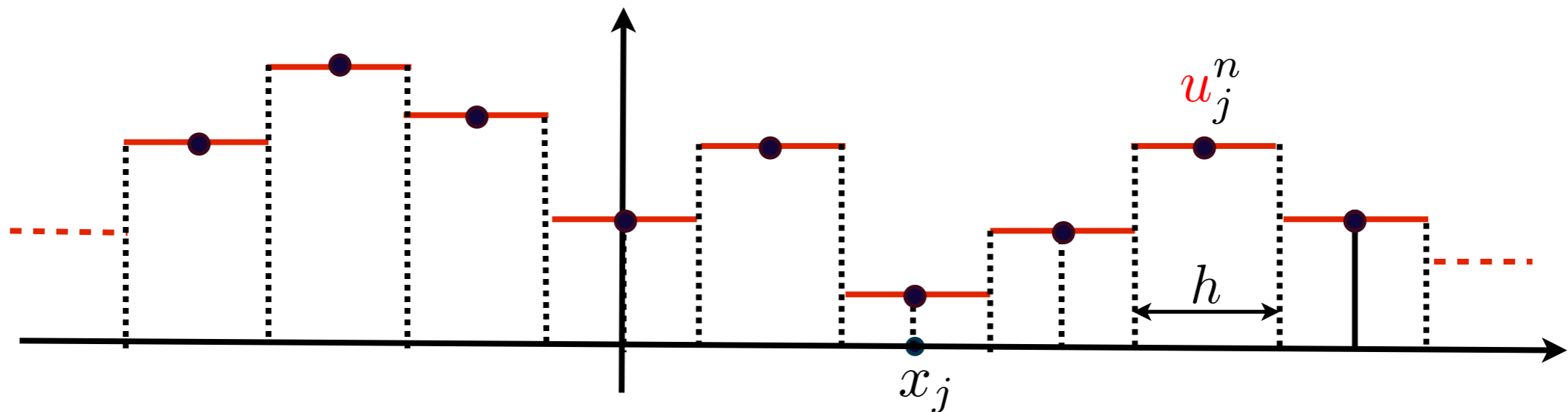
CFL non respectée

Un exemple fondamental : le schéma de Godunov

Principe du schéma

Dans son principe, le schéma consiste à générer une suite u_h^n de fonctions constantes par morceaux

$$u_h^n(x) = u_j^n, \quad x \in]x_j - \frac{h}{2}, x_j + \frac{h}{2}[$$



Un exemple fondamental : le schéma de Godunov

Principe du schéma

Dans son principe, le schéma consiste à générer une suite u_h^n de fonctions constantes par morceaux

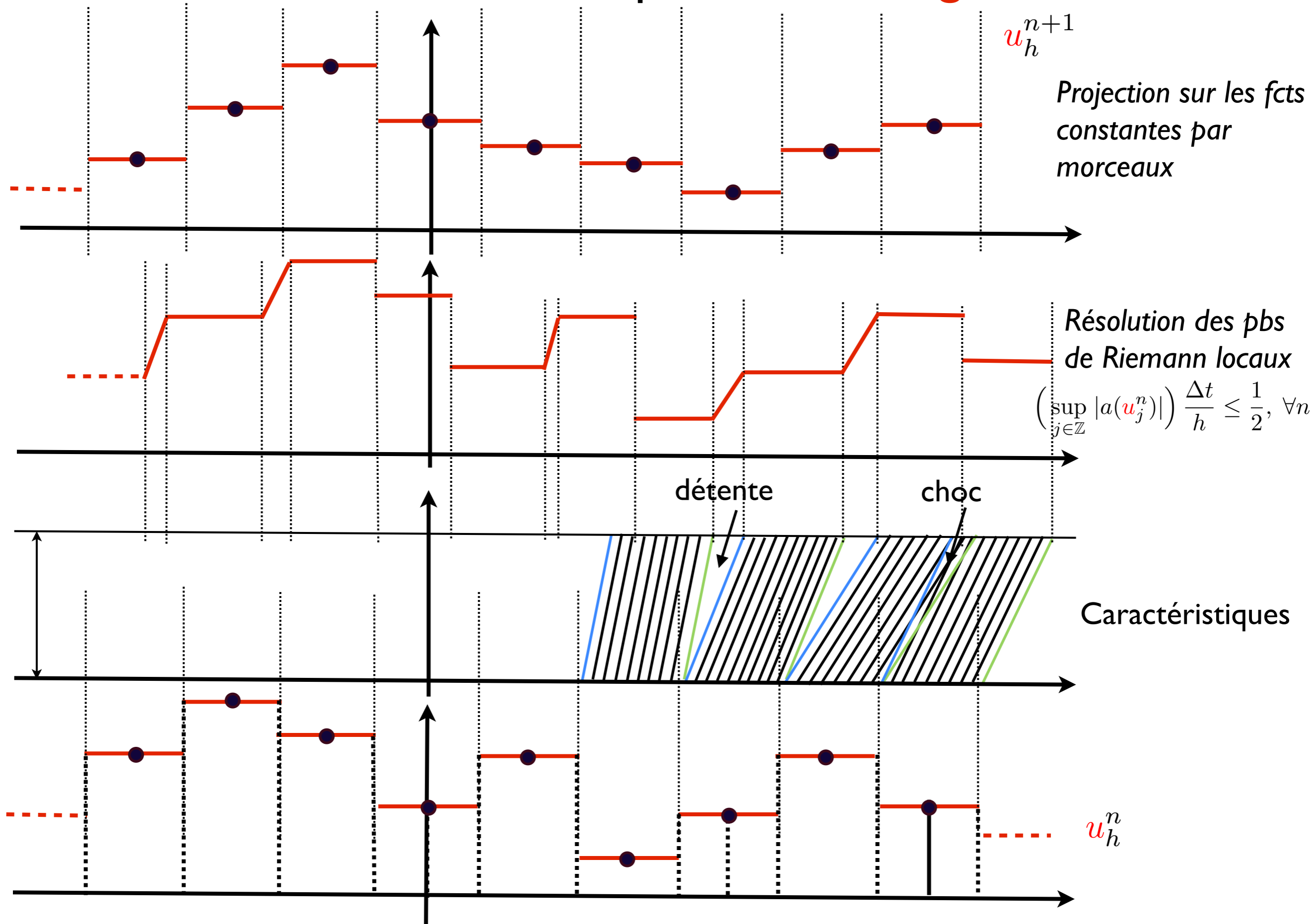
$$u_h^n(x) = u_j^n, \quad x \in]x_j - \frac{h}{2}, x_j + \frac{h}{2}[$$

Le passage de u_h^n à u_h^{n+1} repose sur deux étapes :

- la résolution exacte de problèmes de Riemann locaux sur un intervalle Δt
- une projection orthogonale locale sur les fonctions constantes par morceaux

On montre que le schéma de Godunov est **conservatif, consistant et monotone**

Illustration sur l'équation de Burgers



La semaine prochaine: examen sans documents.

Fin du cours: merci pour votre attention et bon courage pour la suite!

Sonia Fliss

sonia.fliss@ensta-paris.fr

UMA - Bureau 2.2.30

Sarah Al Humaikani (Gr. 4), Lorenzo Audibert (Gr. 6), Antonin Boisneault (Gr. 9), Eliane Bécache (Gr. 2), Benjamin Bonrepaux (Gr. 10), Farah Chaaban (Gr. 5), Sonia Fliss (Gr. I), Patrick Joly (Gr 8.), Aurélien Parigaux (Gr. 3), Simone Pescuma (Gr. 7).

Un petit conseil lecture

les mathématiques sont humaines et à la portée de tous. C'est comme une activité physique qui nécessite de l'entraînement où il faut savoir mobiliser curiosité, imagination et intuition.

